Zbornik gozdarstva in lesarstva, 40, 1992, s. 15-40

Prispelo/Received: novembra/November 1992

GDK 182.51: 188: 568
Math.Subj.Class.(1990) 62P10, 92B15

RAZMESTITEV DREVES V SESTOJU

Anton CEDILNIK*, Marijan KOTAR**

Izvleček

V sestavku najprej pojasnimo, da sta sistematičnost/naključnost in enakomernost/šopastost dve v splošnem nekorelirani lastnosti sestoja. Nadalje izračunamo povprečni minimalni razdalji od stojišča do drevesa in od drevesa do soseda pri nekaterih ekstremnih razmestitvah dreves. Ti računi so utemeljitev definicije dveh parametrov, ki ju predlagamo kot meri za stopnjo enakomernosti in stopnjo naključnosti. Glavna odlika teh parametrov je neodvisnost - tako od izbire merskih enot kot od ocene gostote sestoja.

Dodajamo obširnejši pregled najpomembnejših metod ugotavljanja razmestitve dreves v sestoju.

Ključne besede: razmestitev dreves, minimalna razdalja.

THE ARRANGEMENT OF TREES IN A STAND

Anton CEDILNIK*, Marijan KOTAR**

Abstract

We shall first explain that the two properties of the arrangement of stand, systematic vs. random and uniform vs. cluster, are generally not correlated. Then we calculate the mean minimal distances form point to tree and from tree to neighbour, in cases of exstreme arrangements of trees. These calculations are the argumentation of definition of two parameters, which we suggest as a measures of a degree of uniformity and a degree of randomness. The main advantage of these parameters is independence of chosen units and of estimate of tree density.

We further supply an extensive survey of most important methods of observation of stand arrangement.

Key words: tree arrangement, minimal distance.

* dr.docent A. C., Gozdarski oddelek. Biotehniške fakultete, Večna pot 83, 61000 Ljubljana, SLO.
* dr.profesor M. K., Gozdarski oddelek. Biotehniške fakultete, Večna pot 83, 61000 Ljubljana, SLO.

1 UVOD

Preučevanje razmeščanja rastlin ali živali v prostoru, ki ga poseljuje rastlinska ali živalska združba, je sestavni del preučevanja strukture biocenoz. Tovrstne raziskave so se začele v večjem obsegu šele z uveljavljanjem kvantitativne ekologije. Vzorec razmestitve osebkov v prostoru (spatial pattern) nam mnogokrat pojasnjuje delovanje nekaterih ekoloških dejavnikov.

Večina dosedanjih raziskav obravnava razmeščanje zelišč in trav v posameznih rastlinskih združbah, manj pa je takšnih, ki proučujejo razmeščanje dreves ali drevesnih vrst v sestojih. Zato je tudi večina metod, s katerimi ugotavljamo način razmestitve (vzorcev razmestitve), primernejša za obravnavanje takih rastlinskih vrst, pri katerih so medsebojne razdalje med njimi majhne (nekaj centimetrov). Vendar pa lahko nekatere izmed teh metod prilagodimo tako, da z njimi dosegamo dobre rezultate v gozdnih združbah.

Prve tovrstne raziskave segajo v l. 1920 oz. 1922, ko sta Gleason in Sverdberg neodvisno drug od drugega ugotovila, da se več rastlinskih vrst razvršča po površini nenaključno (nonrandomly). Sledili so jima še številni drugi, vendar šele po l. 1932 (CLAPHAM 1932, ASHBY 1935, STEVENS 1937, NEYMAN 1939, FRACKER in BRISCHLE 1944, ARCHIBALD 1948, THOMSON 1952, GOODALL 1952, EVANS 1953, GREIG-SMITH 1952, 1957, 1964, CURTIS 1955, CLARK in EVANS 1955, HOPKINS in SKELLAM 1954, PIELOU 1959, 1977, KERSHAW 1973, 1980, COX 1981, ASKEN 1981, KENT in DRESS 1979, VANDERMEER 1990).

Tudi v Sloveniji je bilo že nekaj raziskav, kjer so se raziskovalci (na primer HORVAT in KOTAR 1980) dotaknili problema razmeščanja dreves, predvsem v gorskih gozdovih. Pri tem so uporabili le najbolj enostavne metode kvantitativne ekologije, ki pa niso prepričljivo dokazale obstoja posameznih načinov razmestitve v obravnavanih gozdovih. Nekatere metode ugotavljanja razmestitve dreves so uporabili tudi študenti v diplomskih nalogah (DAKSKOBLER 1982, POČKAR IN STRITIH 1987, KOŠIČEK 1992) ter magisterskih del (DIACI 1992), vendar v zelo omejenem obsegu.

V tem prispevku je v zadnjem, nekoliko daljšem razdelku podan pregled najpomembnejših metod matematične ekologije, s katerimi ugotavljamo načine razmeščanja osebkov v prostoru. To smo storili zato, da bi bil prispevek razumljiv tudi tistemu, ki se do sedaj ni poglabljal v obravnavano snov, pa tudi zato, da bi bralec videl, v čem je novost načina razmišljanja v prvih razdelkih.

Kljub razmeroma velikemu številu raziskovalcev ostajata problem razmeščanja osebkov v prostoru in povezava med razmestitvijo ter ekološkimi dejavniki še danes v marsičem nepojasnjena. V tem prispevku je izoblikovan nov pristop k ugotavljanju razmestitve osebkov v prostoru, skupaj s potrebnimi matematičnimi osnovami. Ravno pri slednjih smo naredili kompromisa v dveh nasprotnih si smereh. Da bi bil ta zapis dostopen tudi nespecialistu, smo dodali nekaj ključnih klasičnih izpeljav (npr., da je porazdelitev verjetnosti za določeno število dreves na veliki površini Poissonova), zaradi želje po strnjenosti članka nismo pojasnjevali nekaterih povsem matematičnih spekulacij (npr. Stieltjesovega integrala).

Prva glavna novost našega razmišljanja je ocenjevanje tipa razmestitve dreves ob upoštevanju minimalne razdalje od drevesa do drevesa ter minimalne razdalje od stojišča do drevesa hkrati.

Druga novost je drugačna klasifikacija načinov razmeščanja dreves. V dosedanji nastopajo trije načini: slučajna, sistematična in šopasta razmestitev. Menimo, da te lastnosti niso disjunktne, ampak se med sabo prepletajo: sistematična razmestitev je npr. lahko tako šopasta kot enakomerna. Iz tega sledi potreba po jasno določeni meri za sistematičnost razmestitve, ki bi bila neodvisna od mere za grupiranost. Tako mero smo tudi določili in utemeljili.

S tem prispevkom poskušamo tudi urediti slovensko izrazoslovje obravnavanega področja.

2 NAČINI RAZMESTITVE OSEBKOV V PROSTORU

Imejmo zelo obsežno ravninsko področje, na njem pa gozd z gostoto ρ, ki je bolj ali manj konstantna, če jo določamo na velikih podobmočjih našega območja. Dodajmo še predpostavko, da je gozd tako redek oziroma drevesa v povprečju tako daleč narazen, da smemo šteti temeljnice dreves za točke, da je torej ravnina z izbranimi točkami dober geometrijski model našega gozda.

Najprej analizirajmo pojmovno vsebino izraza "razmestitev" ("porazdelitev", "razvrstitev", "razporeditev", arrangement) dreves.

(1) Če primerjamo plantažo in naravni gozd, takoj opazimo bistveno razliko: pri plantažnem nasadu je (bolj ali manj) natančno določeno, na kateri točki je drevo in kje ga ni; pri naravnem gozdu pa je izbor točk - dreves (spet le bolj ali manj) naključen. Zato bomo razlikovali *sistematično* (systematic) in *naključno* (slučajno, random) razmestitev. V resnici bomo raje rekli, da je gozd do določene mere sistematično oz. naključno razmeščen. V dejanskem gozdu - npr. v negovanem redčenem gozdu - so drevesa sicer naključno posejana (če gozd ni nastal s sistematičnim pogozdovanjem), toda razdalje med bližnjimi drevesi se gibljejo v precej ozkih mejah, zaradi česar se zdi na prvi pogled razpored dreves skoraj sistematičen.

(2) Primerjajmo še mladi, komaj nastajajoči gozd in stari redčeni gozd. V prvem primeru so drevesa zbrana v skupine, kot so se pač zasejala okoli pionirjev. V starem gozdu pa tega pojava ni več, ker je v prvotnih gručah večina dreves odmrla v konkurenčnem boju, zasedene pa so bile tudi že

vse niše med gručami. Spet bomo zato razlikovali med *šopasto* (gručasto, cluster) in *enakomerno* (uniform) razmestitvijo.

Opišimo vse štiri kombinacije!

(SUA) *Sistematična enakomerna razmestitev* (systematic uniform arrangement): stari redčeni negovani gozd (npr. parkovni gozdič) ali - kot skrajni primer - plantažni nasad; razdalje med sosednjimi drevesi so bolj ali manj konstantne, drevesa rastejo posamezno.

(SCA) *Sistematična šopasta razmestitev* (slika 5) (systematic cluster arrangement): zelo neobičajna porazdelitev, ki se ji še najbolj približata pašnik ali park, na katerem so namenoma - običajno iz ekoloških razlogov - skupine dreves.

(RUA) *Naključna enakomerna razmestitev* (random uniform arrangement): verjetnost, da bo na izbrani ploskovni enoti drevo, je enakomerno porazdeljena; domnevamo, da je večina gozdov še najbližja temu tipu, kljub temu, da se zanj predpostavlja, naj bi imel osebek na vsaki točki prostora (površine) enake življenske pogoje (TARMAN 1992).

(RCA) *Naključna šopasta razmestitev* (random cluster arrangement): drevesa se sicer zbirajo v gruče, vendar so tako gruče kot drevesa znotraj gruč slučajnostno porazdeljena. V naravi najdemo takšno razmestitev kot posledico vpliva posameznih ekoloških dejavnikov (npr. neenakomerna razporeditev krp plodnih tal na kraškem terenu) ali pa načina razmnoževanja (razmnoževanje iz korenin itd.)

Tip sestoja bomo določevali z dvema observablama:

(a) Na slepo bomo izbrali točko in izmerili razdaljo do najbližjega drevesa - *stojiščna minimalna razdalja* δ.
(b) Na slepo bomo izbrali drevo in izmerili razdaljo do najbližjega soseda - *sosedska minimalna razdalja* d.

δ in d sta vrednosti slučajnih spremenljivk Δ in D. Tip razmestitve dreves bomo določali iz njunih povprečnih vrednosti $E(\Delta)$ in $E(D)$ ter standardnih odklonov $\sigma(\Delta)$ in $\sigma(D)$.

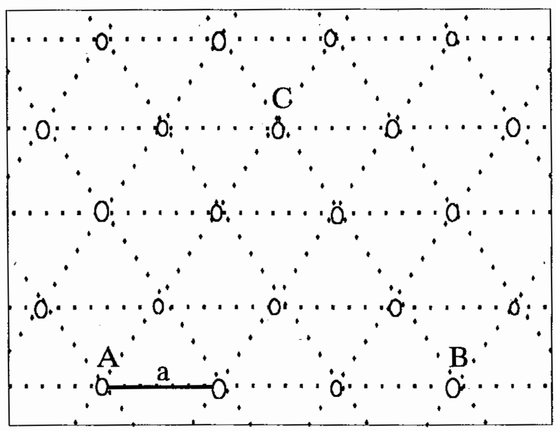
V nadaljevanju bomo izračunali ta štiri števila za ekstremne tipe porazdelitev:

SUA	slika 1, v vsaki točki je eno drevo;
SCA	slika 1, v vsaki točki je m dreves (m je fiksno celo število, večje od 1);
RUA	verjetnost, da bo na izbrani ploskvi drevo, je enakomerno porazdeljena;
RCA	verjetnost, da bo na izbrani ploskvi gruča, je enakomerno porazdeljena, število dreves v gruči je slučajna spremenljivka s povprečno vrednostjo m ($m \geq 1$ je fiksno realno število).

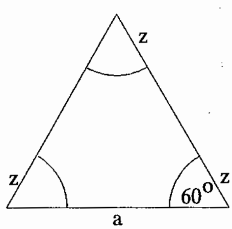
Seveda primera SCA in RCA razumemo tako, da so razdalje med drevesi znotraj posamezne gruče bistveno manjše kot razdalje med gručami.

3 PRIMER "SUA"

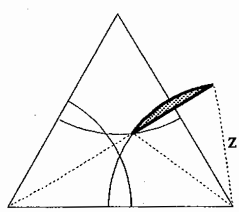
Najprej v skladu s sliko 1 določimo a. Izrežimo iz ravnine velik enakostranični trikotnik ABC s stranico na. Njegova ploščina je $S = (na)^2\sqrt{3}/4$, na njem pa je $N = (n+1)(n+2)/2$ dreves. Gostota dreves na tem trikotniku je



Slika 1



Slika 2



Slika 3

$$N/S = \frac{2(n+1)(n+2)}{n^2a^2\sqrt{3}}.$$

Gostota ρ je limita tega izraza, ko gre n v neskončno: $\rho = 2/(a^2\sqrt{3})$, oziroma

(1) $$a = \sqrt{2/(\rho\sqrt{3})}.$$

Slučajna spremenljivka D seveda ni niti slučajna niti spremenljivka: sosedska minimalna razdalja je namreč vedno a. Zato:

(2) $$\mathrm{E}(D) = \sqrt{2/(\rho\sqrt{3})} = 1,0746/\sqrt{\rho},$$

(3) $$\rho(D) = 0.$$

Na vrsti je Δ. Določimo njeno porazdelitveno funkcijo!

(4) $F(z) = \mathrm{P}(\Delta < z) =$

$= 0$ $\quad (za\ z \leq 0)$

$= 2\pi z^2 (a^2\sqrt{3})^{-1}$ $\quad (za\ 0 \leq z \leq a/2)$

$= (a^2\sqrt{3})^{-1}\left[2\pi z^2 - 12z^2 \arccos(a/(2z)) + 3a\sqrt{4z^2 - a^2}\right]$

$\quad (za\ a/2 \leq z \leq a/\sqrt{3})$

$= 1$ $\quad (za\ z \geq a/\sqrt{3})$.

Pri tem smo si pomagali s slikama 2 in 3. Gostota veretnosti:

(5) $p(z) = 4\pi z/(a^2\sqrt{3})$ $\quad (za\ 0 < z < a/2)$

$= 4\pi z(a^2\sqrt{3})^{-1}\left[1 - \frac{6}{\pi}\arccos(a/(2z))\right]$ $\quad (za\ a/2 < z < a/\sqrt{3})$

$= 0$ $\quad$ (drugod).

(6) $$\mathrm{E}(\Delta^k) = \int_{-\infty}^{\infty} z^k p(z)dz =$$

$$= \frac{4\pi}{a^2\sqrt{3}}\int_0^{a/\sqrt{3}} z^{k+1}dz - \frac{24}{a^2\sqrt{3}}\int_{a/2}^{a/\sqrt{3}} z^{k+1}\arccos(a/(2z))dz =$$

$$= \frac{a^k\sqrt{3}}{(k+2).2^{k-1}}\int_1^{2/\sqrt{3}} \frac{t^{k+1}dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

po substituciji $t = 2z/a$ in integraciji *per partes*.

(7) $$\mathrm{E}(\Delta) = \frac{a}{12\sqrt{3}}[4 + 3.\ln(3)] = \frac{4 + 3.\ln(3)}{6\sqrt[4]{108}\sqrt{\rho}} = \frac{0,3772}{\sqrt{\rho}};$$

(8) $$\mathrm{E}(\Delta^2) = 5a^2/36 = \frac{5}{18\rho\sqrt{3}},$$

(9) $$\sigma(\Delta) = \sqrt{\mathrm{E}(\Delta^2) - \mathrm{E}(\Delta)^2} = \frac{0,1345}{\sqrt{\rho}}$$

4 PRIMER "SCA"

Ker smo predpostavili, da je v vsakem šopu več kot eno drevo, je glede sosedske minimalne razdalje vse jasno:

(10) $$D = \mathrm{E}(D) = \sigma(D) = 0.$$

Pa tudi glede stojiščne minimalne razdalje hitro pridemo do zaključka; zgolj prepišemo *(7)* in *(9)*, spremenimo le ρ, ki tukaj pomeni gostoto gruč in ne gostote dreves; ker je v vsakem šopu m dreves, je gostota gruč ρ/m:

(11) $$\mathrm{E}(\Delta) = \frac{0,3772}{\sqrt{\rho/m}},$$

(12) $$\sigma(\Delta) = \frac{0,1345}{\sqrt{\rho/m}}.$$

Če je m zelo velik, sta velika tudi E(Δ) in σ(Δ). Seveda pa je to res le teoretično, kajti m v naravi ni zelo velik, povrhu pa E(Δ) in σ(Δ) rasteta le tako naglo kot $\sqrt{m}$.

5 PRIMER "RUA"

Poskus, v katerem se bo godilo naslednje dejanje, je takle: krog K_r s polmerom r vržemo na opazovano ploskev. S naj bo slučajna spremenljivka, katere vrednost je število dreves v krogu:

$$S:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \ldots \end{pmatrix}$$

Ker je gostota točk ρ dana in ker predpostavljamo, da je verjetnost za določeno lego slepo izbranega drevesa enakomerno porazdeljena, lahko števila p_i izračunamo. Krog K_r pokrijmo z mnogo večjim krogom K_R s polmerom R, v katerem je $N = \pi R^2\rho$ dreves. Verjetnost, da na slepo izbrano drevo iz K_R leži v K_r, je $p = \pi r^2/(\pi R^2) = (r/R)^2$. Potem je:

$$\mathrm{P}(S = n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

S je zato binomsko porazdeljena: $b(N,(r/R)^2)$. Naj gre sedaj R preko vseh mej; potem gre N v neskončno in p proti 0. Tedaj pa se ta binomska porazdelitev po Poissonovem limitnem izreku približa Poissonovi porazdelitvi s parametrom $\pi r^2\rho(= Np)$.

S je torej po Poissonu porazdeljena slučajna spremenljivka in njena verjetnostna funkcija je potem

(13) $$p_n = \frac{1}{n!}(\pi r^2\rho)^n \exp(-\pi r^2\rho) \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Naj bo $S = n$. Drevesa v krogu so neodvisne realizacije slučajnega vektorja $Z = [X,Y]^{\mathrm{T}}$, ki je zvezno porazdeljen z gostoto verjetnosti

$$p_Z(x,y) = \begin{cases} (\pi r^2)^{-1} & (za \sqrt{x^2+y^2} \le r) \\ 0 & (\text{drugod}) \end{cases}$$

(enakomerna zvezna dvodimenzionalna porazdelitev na krogu K_r). Posamezna drevesa predstavljajo kot realizacije slučajnega vektorja spet slučajne vektorje: $[X_1,Y_1]^{\mathrm{T}},\ldots,[X_n,Y_n]^{\mathrm{T}}$. Definirajmo:

$$D_n^{(i)} := \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \text{ in } M_n := \min\{D_n^{(i)} | i = 1, \ldots, n\}.$$

$D_n^{(i)}$ in M_n so slučajne spremenljivke, $D_n^{(i)}$ je razdalja i-tega drevesa od središča kroga K_r, M_n pa minimalna razdalja dreves od središča.

Naj bo F_n porazdelitvena funkcija spremenljivk $D_n^{(i)}$ (vse so enako porazdeljene):

$$\begin{aligned} (14) \quad F_n(z) = P(D_n^{(i)} < z) &= 0 \quad (za\ z \le 0) \\ &= z^2/r^2 \quad (za\ 0 < z < r) \\ &= 1 \quad (za\ z \ge r). \end{aligned}$$

Ker so spremenljivke $D_n^{(i)}$ neodvisne in enako porazdeljene, ima slučajni vektor $\left[D_n^{(1)}, \ldots, D_n^{(n)}\right]^T$ porazdelitveno funkcijo

$$G_n(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} F_n(z_i).$$

Porazdelitvena funkcija spremenljivke M_n je tedaj (glej JAMNIK 1971, str. 153):

$$H_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k,$$

kjer so

$$s_k = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_k} G_{j_1 j_2 \ldots j_k}$$

in je $G_{j_1 j_2 \ldots j_k} = G_n(z_1, \ldots, z_n)$, če so vsi argumenti z_j na mestih $j_1, \ldots, j_k$ enaki z, ostali pa so ∞.

$$G_{j_1 \ldots j_k} = F_n(z)^k, \quad s_k = \binom{n}{k} F_n(z)^k;$$

$$(15) \qquad H_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} F_n(z)^k = 1 - [1 - F_n(z)]^n.$$

Uvedimo novo slučajno spremenljivko:

$$M := \begin{cases} \lambda r & (za\ S = 0) \\ \text{minimalna oddaljenost središča kroga} & \\ K_r \text{ od } n \text{ na slepo nasajenih dreves} & (za\ S = n, n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Pri tem je $\lambda \ge 1$ fiksni parameter, ki smo ga dodali zato, da predstavlja M v nekem smislu minimalno razdaljo tudi takrat, ko v K_r ni nobenega drevesa; naš namen je pokazati, da λ prej ali slej izgine iz računov.

Naj bo $H(z)$ porazdelitvena funkcija spremenljivke M. Dogodek $(M < z)$ najprej razčlenimo:

$$(M < z) = [(S = 0) \cap (M < z)] \cup [(S = 1) \cap (M < z)] \cup \ldots$$

Če upoštevamo, da so dogodki $[(S = n) \cap (M < z)]$ za različne n paroma nezdružljivi, dobimo:

$$H(z) = \mathrm{P}(M < z) =$$
$$= \mathrm{P}\big((S = 0)\cap(M < z)\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\big((S = n)\cap(M < z)\big) =$$
$$= p_0\mathrm{P}(M < z \,/\, S = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n\mathrm{P}(M < z \,/\, S = n);$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M < z \,/\, S = 0) &= 0 \quad (za\ z \le \lambda r) \\ &= 1 \quad (za\ z > \lambda r); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M < z \,/\, S = n) = P(M_n < z) &= H_n(z) = 0 && (za\ z \le 0) \\ &= 1 - \left(1 - z^2/r^2\right)^n && (za\ 0 < z < r) \\ &= 1 && (za\ z \ge r) \end{aligned}$$

(upoštevali smo *(14)* in *(15)*). Sledi:

$$\begin{aligned} H(z) &= 0 && (za\ z \le 0) \\ &= 1 - p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n\left(1 - z^2/r^2\right)^n && (za\ 0 < z < r) \\ &= 1 - p_0 && (za\ r \le z \le \lambda r) \\ &= 1 && (za\ z > \lambda r). \end{aligned}$$

Za $0 < z < r$ je:

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 - \exp(-\pi\rho r^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\left(\pi\rho r^2\right)^n\left(1 - z^2/r^2\right)^n = \\ &= 1 - \exp(-\pi\rho r^2)\exp\big(\pi\rho r^2\left(1 - z^2/r^2\right)\big) = \\ &= 1 - \exp(-\pi\rho z^2). \end{aligned}$$

Tako smo dobili:

$$(16) \qquad \begin{aligned} H(z) &= 0 && (za\ z \le 0) \\ &= 1 - \exp(-\pi\rho z^2) && (za\ 0 < z < r) \\ &= 1 - \exp(-\pi\rho r^2) && (za\ r \le z \le \lambda r) \\ &= 1 && (za\ z > \lambda r). \end{aligned}$$

Podrobnejši pogled na *H(z)* nam razkrije, da *M* ni niti diskretno niti zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka. Zato moramo za izračun njenih momentov uporabiti Stieltjesov integral (FISZ 1967):

$$(17) \qquad \begin{aligned} \mathrm{E}(M^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^k dH(z) = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{r} + \int_{r}^{\infty} z^k dH(z) \\ &= 0 + 2\pi\rho\int_0^r z^{k+1}\exp(-\pi\rho z^2)dz + (\lambda r)^k\exp(-\pi\rho r^2). \end{aligned}$$

Pri preostalem (Riemannovem) integralu si pomagamo z znanimi formulami (za $a > 0$ in poljubni b):

$$\int_0^b \exp(-az^2)dz = \sqrt{\pi/a}\,\Phi(b\sqrt{2a}),\ \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(t^2)dt;$$

$$\int_0^b z.\exp(-az^2)dz = \frac{1}{2a}\left[1 - \exp(-ab^2)\right];$$

$$\int_0^b z^{k+1}\exp(-az^2)dz = \frac{k}{2a}\int_0^b z^{k+1}\exp(-az^2)dz - \frac{b^k}{2a}\exp(-ab^2)\ (k > 0).$$

Potem iz *(17)* dobimo:

$$(18)\quad \mathrm{E}(M) = (\lambda - 1)r.\exp(-\pi\rho r^2) + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\Phi(r\sqrt{2\pi\rho}),$$

$$(19)\quad \mathrm{E}(M^2) = (\lambda^2 - 1)r^2.\exp(-\pi\rho r^2) + \frac{1}{\pi\rho}\left[1 - \exp(-\pi\rho r^2)\right].$$

Če sedaj vzamemo, da gre r preko vseh mej, dobimo:

$$(20)\quad \mathrm{E}(\Delta) = 1/(2\sqrt{\rho}),$$

$$(21)\quad \mathrm{E}(\Delta^2) = 1/(\pi\rho),$$

$$(22)\quad \sigma(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{\pi^{-1} + 4^{-1}} = \frac{0,2614}{\sqrt{\rho}}.$$

Manj rokodelska, pa bolj utemeljena pot od *(16)* dalje poteka takole.

$$M - \Delta \begin{aligned} &= 0\ (za\ S \neq 0) \\ &\neq 0\ (za\ S = 0). \end{aligned}$$

Za poljubni pozitivni ε je tedaj:

$$\mathrm{P}(|M - \Delta| \geq \varepsilon) \leq \mathrm{P}(S = 0) = p_0 = \exp(-\pi\rho r^2);$$

$$1 \geq \mathrm{P}(|M - \Delta| < \varepsilon) \geq 1 - \exp(-\pi\rho r^2);$$

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{P}(|M - \Delta| < \varepsilon) = 1.$$

Spremenljivka M torej verjetnostno konvergira proti Δ, zato po znanem izreku (JAMNIK 1971, str. 246) konvergira *H(z)* proti porazdelitveni funkciji spremenljivke Δ - označimo jo s $H_0(z)$ - v vseh točkah, kjer je $H_0(z)$ zvezna:

$$(23)\quad H_0(z) = \lim_{r\to\infty} H(z) \begin{aligned} &= 0 && (za\ z \leq 0) \\ &= 1 - \exp(-\pi\rho z^2) && (za\ z > 0). \end{aligned}$$

To nam pove še, da je Δ zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka.

$$\text{(24)}\quad \mathrm{E}(\Delta^k) = \int_{-\infty}^{\infty} z^k H_0'(z)dz = 2\pi\rho\int_0^{\infty} z^{k+1}\exp(-\pi\rho z^2)dz = \frac{\Gamma(1+k/2)}{(\pi\rho)^{k/2}}.$$

Iz tega pa že sledijo *(20)* - *(22)*.

Do rezultata *(20)* vodi še ena pot. Zgolj zaradi zanimivosti jo na kratko opišimo. Spet uvedemo novo slučajno spremenljivko.

$$T := \begin{cases} \lambda r & (za\ S = 0) \\ \text{Povprečna minimalna razdalja središča} & \\ \mathrm{K}_r \text{ od } n \text{ na slepo posejanih dreves} & (za\ S = n, n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Seveda je T spet diskretno porazdeljena slučajna spremenljivka z isto verjetnostno funkcijo kot S:

$$T: \begin{pmatrix} \lambda r & \mathrm{E}(M_n) \\ p_0 & p_n(n = 1, 2, \ldots) \end{pmatrix}$$

Z nekaj več računanja dobimo iz *(15)*:

$$\text{(25)}\quad \mathrm{E}(M_n) = r\int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{r.\, 2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Za E(T) potem dobimo vsoto, ki jo izračunamo po SPANIER in OLDHAM 1987, str. 387, 403, in dobimo *(18)*, kar nam v limiti spet da *(20)*. Izračun E(T^2) je poln trikov brez globje vsebine, dobimo pa

$$\text{(26)}\quad \mathrm{E}(T^2) = \frac{(\lambda^2 - 1)x^2}{2\pi\rho}\exp(-x^2/2) + \frac{x}{\rho\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \exp(-u^2x^2/2)\Phi\left(x\sqrt{1-u^2}\right)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

kjer je $x^2 = 2\pi\rho r^2$. Od tod sledi $\sigma(T)$. Toda sedaj pride (vsaj na prvi pogled) presenečenje: $\lim\limits_{r\to\infty}\sigma(T) = 0$ (limito izračunamo tako, da integral v *(26)* razbijemo v $\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1}$, da ločimo obe singularnosti, in potem vsakega zase ocenimo navzgor in navzdol). Razlaga pa je v resnici čisto preprosta: $\lim\limits_{r\to\infty} T = \mathrm{E}(\Delta)$, torej konstanta!

Preučimo še spremenljivko D. Poskus je tokrat nekoliko drugačen: krog K_r vržemo na ploskev tako, da njegovo središče pokrije slepo izbrano drevo. S je sedaj slučajna spremenljivka, katere vrednost je število *drugih* dreves v krogu. Vendar iz izpeljave *(13)* hitro vidimo, da je porazdelitvena shema spremenljivke

S enaka kot prej. Potem pa je tudi nadaljnje premišljevanje enako kot prej. Zaključek:

$$(27)\quad \mathrm{E}(D) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}},$$

$$(28)\quad \sigma(D) = \frac{0,2614}{\sqrt{\rho}}$$

6 PRIMER "RCA"

Sprejemljivka Δ ne dela težav: uporabimo kar premišljevanje iz prejšnjega razdelka, le gostoto zmanjšajmo za faktor m. Tako iz *(20)* in *(22)* dobimo:

$$(29)\quad \mathrm{E}(\Delta) = \frac{1}{2\sqrt{\rho/m}},$$

$$(30)\quad \sigma(\Delta) = \frac{0,2614}{\sqrt{\rho/m}},$$

Nekaj več dela bo s spremenljivko D. Na slepo izberemo gručo; potem je

D = 0 (če je v gruči več kot eno drevo)
= D_V (če je v gruči eno samo drevo),

kjer je D_V slučajna spremenljivka D iz 5. razdelka. Naj bo N število dreves v na slepo izbrani gruči. N ima potem takole porazdelitveno shemo:

$$N:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}(N) = m \geq 1.$$

$$(D < z) = [(N = 1) \cap (D < z)] \cup [(N > 1) \cap (D < z)]$$

Če je $F(z)$ porazdelitvena funkcija spremenljivke D, je

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathrm{P}((N = 1) \cap (D < z)) + \mathrm{P}((N > 1) \cap (D < z)) = \\ &= q_1 \mathrm{P}(D < z \,/\, N = 1) + (1 - q_1)\mathrm{P}(D < z \,/\, N > 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D < z \,/\, N > 1) &= 0 \quad (za\ z \leq 0) \\ &= 1 \quad (za\ z > 0); \\ \mathrm{P}(D < z \,/\, N = 1) &= H_0(z), \end{aligned}$$

kjer je $H_0(z)$ porazdelitvena funkcija iz *(23)*, le da imamo ρ/m namesto ρ.

$$(31) \quad F(z) = 0 \qquad (za\ z \le 0)$$
$$= 1 - q_1 . \exp\left(-\pi\rho\, z^2/m\right) \ (za\ z > 0).$$

F(z) pri $z = 0$ ni zvezna, zato bomo spet uporabili Stieltjesov integral:

$$(32) \quad \mathrm{E}\left(D^k\right) = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} z^k dF(z) = \int_{+0}^{\infty} z^k F'(z)dz =$$
$$= \frac{2q_1\pi\rho}{m}\int_0^{\infty} z^{k+1}\exp(-\pi\rho\, z^2/m)dz = q_1 . \Gamma(1 + k/2).(\pi\,\rho/m)^{-k/2},$$

tako kot v *(24)*. Od tod:

$$(33) \quad \mathrm{E}(D) = \frac{q_1}{2}\sqrt{\frac{m}{\rho}},$$

$$(34) \quad \mathrm{E}(D^2) = \frac{q_1 m}{\pi\rho};$$

$$(35) \quad \sigma(D) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{q_1 m(1/\pi - q_1/4)}.$$

Če je $m = 1$ (ekvivalentno: $q_1 = 1$), dobimo po pričakovanju *(27)* in *(28)*.

Za primer vzemimo, da je slučajna spremenljivka *N*-1 porazdeljena po Poissonu s povprečno vrednostjo 1 (torej sta v šopu povprečno $m = 2$ drevesi). Potem je $q_1 = e^{-1}$ in

$$\mathrm{E}(D) = (2\rho e^2)^{-1/2} = \frac{0,2601}{\sqrt{\rho}},$$
$$\sigma(D) = \frac{0,4081}{\sqrt{\rho}}.$$

Če je m zelo velik, je:

$$\lim_{m\to\infty}\mathrm{E}(\Delta) = \lim_{m\to\infty}\sigma(\Delta) = \infty$$

(z isto pripombo kot na koncu 4. razdelka). Če je $\lim_{m\to\infty} q_1 > 0$, velja to tudi za E(*D*) in σ(*D*).

7 DVE MERI ZA PRIKAZOVANJE NAČINA RAZMESTITVE

Definirajmo na podlagi dobljenih razultatov meri za enakomernost/šopastost in naključnost/sistematičnost razporeditve dreves. Prva zahteva za takšni meri je, da sta neodvisni od izbire enot, druga pa, da nanju ne vpliva gostota, ki je že sama zase podatek o razporeditvi, obremenjen s takimi ali drugačnimi napakami merilnega in statističnega značaja (PIELOU 1977, str. 154, 155). Prav v teh dveh zahtevah je naša glavna kritika dosedanjih mer za stopnjo grupiranja v sestojih. Meri morata biti zato kvocienta po dveh količin izmed E(Δ), E(D), σ(Δ) in σ(D). Posebej velja poudariti, da se pri takih merah lahko izognemo vplivu velikosti vzorčnih ploskev (PIELOU 1977, str. 136).

Ker se v primeru izrazitega grupiranja E(Δ) povečuje, E(D) pa večinoma ne, definirajmo:
Stopnja enakomernosti je

(35) $U := \mathrm{E}(D)/\mathrm{E}(\Delta)$

Če drevesa nastopajo le v šopih z najmanj dvema osebkoma, je $U = 0$. Z upadanjem grupiranosti U raste. Pri $U = 1$ je grupiranost le še posledica naključnih lokalnih fluktuacij v gostoti drevja. $U > 1$ pomeni že težnjo k individualnosti. Največji U pri popolnoma negrupirani populaciji je v primeru SUA v 3. razdelku in sicer $12\sqrt{3}[4 + 3.\ln(3)]^{-1} = 2,8489$.

Po našem prepričanju je ta mera boljša tako od mer tipa Clark-Evans, ki upoštevajo le sosedske razdalje, kot tudi mer tipa Hopkins-Skellam ali Pielou-Mountford, ki upoštevajo le stojiščne razdalje. Mera U upošteva obe vrsti razdalj in, kot smo pokazali z vsemi štirimi izrazitimi razporeditvami, s tem poudari dobre plati enih in drugih. Ni pa mogoče prezreti, da ostaja problem vzorčenja še naprej aktualen; na terenu zahteva mera U tudi sorazmerno več dela kot katera od pristranskih metod.

Sistematičnost razporeditve se kaže v tem, da so sosedske razdalje precej stalne, torej da je σ(D) majhen. Zato definirajmo:
Stopnja naključnosti je

(36) $R := \sigma(D)/\sigma(\Delta)$.

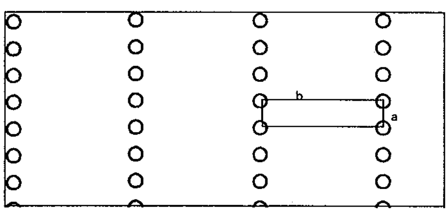
Popolnoma sistematična razporeditev ima najmanjši R : $R = 0$. Strogo naključna negrupirana porazdelitev ima $R = 1$. V nasprotju s pričakovanjem pa je R lahko tudi večji od 1; tak je primer RCA v 4. razdelku, ko pri $q_1 = 2/\pi$ doseže R svoj supremum $2/\sqrt{\pi(4-\pi)} = 1,2179$. To razložimo tako, da je popolnoma slučajna razporeditev posameznih dreves nekoliko sistematična ravno zato, ker drevesa rastejo strogo individualno; če pa dopuščamo tudi šibko naključno grupiranje, povečamo slučajnost razporeditve.

Še opomba glede enot. Če je enota gostote ρ kot običajno drevo/ha, moramo količine E(D), E(Δ), σ(D) in σ(Δ) vse množiti s 100, da so izražene v metrih.

Ob koncu razdelka se moramo vprašati, ali sta tako definirani meri tisto, kar smo iskali. S strogo logičnega stališča je vprašanje pravzaprav nesmiselno: nikjer, ne v dosedanji literaturi iz te problematike ne v tem sestavku ni natančne definicije *količine* enakomernosti ali naključnosti. Edino, kar lahko zatrdno rečemo, je, da je sestoj enakomeren, če je tipa SUA iz 3. razdelka, sicer je neenakomeren; da je sestoj naključen, če ni strogo sistematičen, če torej ni za vsako drevo natančno določeno, kje naj stoji. Vendar pa obstaja dovolj široko soglasje, kaj naj si pod vsemi temi količinami predstavljamo. Ker število U (in analogno R) zadošča pričakovanim vrednostim pri izrazitih in mejnih primerih, ga imamo lahko ne le za definicijo *stopnje* enakomernosti, pač pa kar *enakomernosti*. Smiselno je torej reči: "Ta sestoj ima enakomernost U = ...".

8 DODATEK: PRAVOKOTNIŠKA RAZMESTITEV

Trikotniška razmestitev, ki smo jo obravnavali v 3. razdelku, je teoretično pomembna zaradi ekstremalnih lastnosti, sistematičnosti in enakomernosti. V tem razdelku pa bomo preračunali še pravokotniško in, kot poseben primer, kvadratno razmestitev. Po eni strani bo to ponazoritev rezultatov iz prejšnjih razdelkov, po drugi pa je pravokotniška razmestitev dokaj pogosta v praksi: skoraj vsi umetni sestoji so takšni.



Slika 4

Imejmo torej pravokotniško razmestitev, kakršna je na sliki 4. Naj bo: $0<a\le b$ in $b/a =: c \ge 1$. Očitno je: $\rho = 1/(ab)$. Poleg tega je $D = a$, iz česar že sledi:

$$\mathrm{E}(D) = a = 1/\sqrt{c\rho}, \tag{37}$$

$$\sigma(D) = 0, \tag{38}$$

$$R = 0. \tag{39}$$

Precej več dela bo s spremenljivko Δ. Najprej porazdelitvena funkcija:

$$\begin{aligned} P(\Delta < z) &= 0 && (za\ z \le 0) \\ &= \rho\pi z^2 && (za\ 0 \le z \le a/2) \\ &= \rho\pi z^2 - 2\rho z^2 \arccos(a/(2z)) + a\rho\sqrt{z^2 - a^2/4} && \\ & && (za\ a/2 \le z \le b/2) \\ &= \rho\pi z^2 - 2\rho z^2 \arccos(a/(2z)) - 2\rho z^2 \arccos(b/(2z)) + && \\ &\quad + a\rho\sqrt{z^2 - a^2/4} && (za\ b/2 \le z \le \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}) \\ &= 1 && (za\ z \ge \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}) \end{aligned} \tag{40}$$

Za vsak realen $k > -2$ je:

$$E(\Delta^k) = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}/2} z^k dP(\Delta < z) =$$

$$= \frac{\rho a^{k+2}}{(k+2)2^k} \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}/a} + \frac{\rho b^{k+2}}{(k+2)2^k} \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}/b} \frac{t^{k+1}dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Od tod dobimo:

$$E(\Delta) = \frac{1}{U\sqrt{c\rho}}, \tag{41}$$

$$\sigma(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{c\rho}} \sqrt{\frac{1+c^2}{12} - U^{-2}}, \tag{42}$$

$$U = 12c\left[2c\sqrt{1+c^2} + \ln\left(c + \sqrt{1+c^2}\right) + c^3 \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+c^2}}{c}\right)\right]^{-1} \tag{43}$$

Posebni primeri!

c = 1 (a = b) , U = 2,614 (kvadratna razporeditev):

$$E(\Delta) = \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{6\sqrt{\rho}} = \frac{0,3826}{\sqrt{\rho}}, \tag{44}$$

$$E(\Delta^2) = 1 / (6\rho),$$

$$\sigma(\Delta) = \frac{0,1424}{\sqrt{\rho}}, \tag{45}$$

U je le neznatno manjši kot pri trikotni razporeditvi.

c = 2, U = 1,686:

$$E(\Delta) = \frac{0,4195}{\sqrt{\rho}}, \tag{46}$$

$$\sigma(\Delta) = \frac{0,1799}{\sqrt{\rho}}, \tag{47}$$

c = 3,746, U = 1:

$$(48) \quad \mathrm{E}(\Delta) = \frac{0,5167}{\sqrt{\rho}},$$

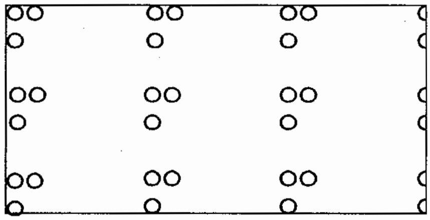
$$(49) \quad \sigma(\Delta) = \frac{0,2598}{\sqrt{\rho}}.$$

Ta primer, ki mu približno ustreza situacija na sliki 4, je zanimiv zato, ker je pri njem stopnja enakomernosti U ravno tolikšna, kot pri strogo naključni enakomerni razmestitvi. Vsako navpično vrsto na sliki 4 že lahko imamo za šop oziroma grupo. Pri še večjih kvocientih c bo ta slika še bolj izrazita.

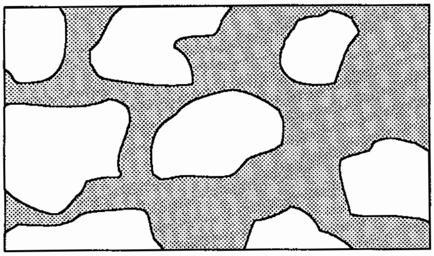
9 ODPRTA VPRAŠANJA

Kot običajno se potem, ko odgovorimo na eno vprašanje, odprejo tri druga. Navedimo tu nekaj po našem mnenju najpomembnejših smeri nadaljnjega razmišljanja.

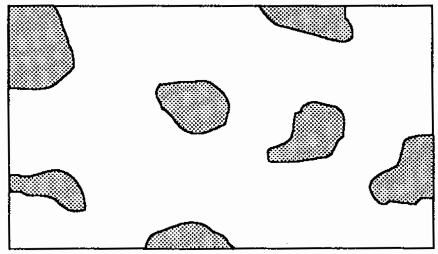
1. Poiskati bo treba dobre cenilke za stopnjo enakomernosti U in stopnjo slučajnosti R ter intervale zaupanja skupaj z ustreznimi testi za te cenilke.
2. S problemom iz točke 1 je povezan problem vzorčenja in merjenja, da bo delo na terenu (čim bolj) preprosto, zanesljivo in poceni.
3. Ocena velikosti šopov pri šopasti porazdelitvi?
4. Problem *granulacije* je prikazan na slikah 6 in 7. Količino, ki razlikuje med tema tipoma razporeditve, bo treba šele definirati. Morda je ta problem metodično povezan s problemom iz 5. točke.
5. Drevesa niso točke, zato bo treba vse dosedanje račune prirediti (posplošiti?) tako, da bodo namesto točk v ravnini diski, katerih polmeri bodo spet bolj ali manj naključno porazdeljeni.
6. Iz točke 5 izhaja naslednja naloga: ocenjevanje porazdelitve temeljnice in s tem lesne zaloge.



Slika 5



Slika 6



Slika 7

10 METODE UGOTAVLJANJA NAČINOV RAZMESTITVE

Metode ugotavljanja načinov razmeščanja lahko delimo v dve skupini:

A. metode, ki slonijo na preštevanju osebkov (dreves) na naključno ali sistematično izbranih vzorčnih ploskvah, in
B. metode, ki temeljijo na razdaljah med drevesi oziroma med naključno izbranimi točkami in drevesi.

A. METODE UGOTAVLJANJA NAČINA RAZMESTITVE Z IZBRANIMI PLOSKVAMI

1 Ugotavljanje nenaključne razmestitve osebkov s χ^2- testom

To metodo je uporabil Blackman l. 1935 (GREIG-SMITH 1967). V sestoju oziroma združbi ugotavljamo način razmeščanja osebkov tako, da naključno izberemo večje število ploskev enakih velikosti. Število ploskev N mora biti večje od 100. Velikost ploskve mora biti večja od rastne površine enega drevesa. Navzgor teoretično sicer ni omejena, iz praktičnih razlogov pa izberemo površino, na kateri lahko raste do 10 dreves, sicer nastopijo težave pri postavljanju mej ploskev. V teh vzorčnih ploskvah preštejemo osebke. Tvorimo frekvenčno porazdelitev, kjer je frekvenca f_r število ploskev z danim številom dreves r (= 0, 1, 2, ...) (razred je torej določen s številom dreves v ploskvi). Tej frekvenčni porazdelitvi prilagodimo teoretično Poissonovo porazdelitev, ki ima enako aritmetično sredino.

$$m = \frac{1}{N} \sum_r r f_r$$

Teoretično relativno frekvenco v razredu r izračunamo po obrazcu, ki podaja verjetnostno funkcijo Poissonove porazdelitve:

$$p(r) = m^r e^{-m} / r!.$$

Teoretična frekvenca je tedaj: $f_r^t = N.p(r)$. Razrede, ki imajo ali f_r ali f_r^t manj kot 1, pridružimo oziroma združimo. Pri tem po možnosti še stremimo k temu, da so si f_r^t čim bolj blizu.

Postavimo hipotezo, da je vzorčna porazdelitev Poissonova z isto vrednostjo parametra. Test izvedemo s Pearsonovim χ^2:

$$\chi^2 = \sum_r \left(f_r - f_r'\right)^2 / f_r'.$$

Če je izračunani χ^2 večji od kriterialnega tabelarnega pri $n = k$-2 stopinjah prostosti (kjer je k število razredov), je hipoteza, da se drevesa razmeščajo v naključni enakomerni porazdelitvi, zavrnjena. V nasprotnem primeru pa menimo, da nismo odkrili odmikov od naključnega enakomernega razmeščanja (departure from randomness).

Ker je rezultat testa odvisen od števila in velikosti ploskev, je priporočljivo, da test opravimo dvakrat in to pri dveh različnih velikostih ploskev. Če je gostota majhna, je treba analizirati veliko število vzorčnih ploskev.

2 Test nenaključne razmnestitve s pomočjo relativne frekvence.

To metodo je uvedel Clapham leta 1936 (GREIG-SMITH 1967). Če je razmeščanje dreves naključno enakomerno, je razmerje med varianco in povprečno vrednostjo števila dreves na vzorčni ploskvi enako 1. To razmerje imenujemo *relativna varianca.* Enako kot pri metodi, opisani v prejšnjem razdelku, naključno položimo vzorčne ploskve in določimo frekvenčno porazdelitev števila dreves na teh ploskvah. Ta frekvenčna porazdelitev je osnova za izračun variance oziroma njene cenilke:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_r \left(r - m\right)^2 f_r$$

(oznake so iste kot v opisu prejšnje metode).

Pri izračunu relativne variance (RV) uporabimo kot cenilko za povprečno vrednost aritmetično sredino na ploskvah, enakih površinam, na podlagi katerih smo oblikovali frekvenčno porazdelitev. To cenilko moramo dobiti neodvisno od cenilke za varianco. Ponavadi ocenimo število dreves oziroma gostoto na precej večji vzorčni površini, potem pa jo preračunamo na površino naključnih vzorčnih ploskev, ki so osnova za frekvenčno porazdelitev.

Relativna varianca ima standardno napako

$$\mathrm{se} = \sqrt{2/(N-1)}.$$

S t-testom preskusimo hipotezo o naključni enakomerni razmestitvi oziroma o odklonu od takšne razmestitve:

$$t = \mathrm{RV}/\mathrm{se} = \mathrm{RV}\sqrt{(N-1)/2}.$$

Če je izračunani t večji kot kriterialni tabelarni (za t-porazdelitev) pri $n = N$-1 stopinjah prostosti, je hipoteza o naključni enakomerni razmestitvi zavrnjena (s predpisanim tveganjem).

Vendar ima ta test enake slabosti kot test iz prejšnje točke. Test je treba izvesti z dvema ponovitvama različnih velikosti ploskev ter ga dopolniti še s χ^2 - testom. Znan je primer, ko je bila vrednost relativne variance natanko 1, χ^2 - test pa je hipotezo o naključni razmestitvi zavrnil s tveganjem $\alpha < 0{,}001$.

Če je vrednost relativne frekvence manjša od 1, se razmeščanje približuje sistematični enakomerni razmestitvi. Če je vrednost relativne variance več kot 1, pa lahko opazovani frekvečni porazdelitvi prilagodimo ali Neymanovo ali negativno binomsko porazdelitev. Obe dobimo tam, kjer se osebki razmeščajo v šopih (contagious distribution). Če je RV > 1, prilagoditev z Neymanovo ali negativno binomsko porazdelitvijo pa uspešna (to ugotovimo spet s χ^2 - testom), se lotimo ugotavljanja velikosti šopa. Imamo več metod, gotovo pa so najbolj zanesljive tiste, ki jih uporabljajo ekologi na področju klastrificiranja oziroma kopičenja (cluster analysis). Edina težava pri izvedbi takšne analize je, da moramo poznati koordinate osebkov oziroma dreves, kar pa zahteva veliko časa in denarja.

3 Ugotavljanje načina razmeščanja z mrežo hierarhično razvrščenih ploskev - 2^n (contagious quadrats method).

Avtor te metode je Greig-Smith (GREIG-SMITH 1982). Najprej jo je preskusil v umetno oblikovanih populacijah, narejenih z različno obarvanimi ploščicami z različnimi načini razvrščanja.

Metoda temelji na mreži razvrščenih ploskev, ki so položene na transektu tako, da jih lahko združujemo v bloke različnih velikosti. Število ploskev je 2^n, kjer n predstavlja velikost bloka (blok je večja ploskev, v katero sta združeni dve manjši ploskvi, dva bloka pa se spet združita v večji blok itd.). Tako so velikosti blokov (BS) 1, 2, 4, 8, 16, ... enot.

Poglejmo si primer s 16 osnovnimi ploskvami (dejansko je potrebnih 512 ali celo 1024 enot). Vseh 16 ploskev ima isto velikost, položene so druga ob drugo (v mreži) tako, da predstavljajo ploskve 1-8 prvo polovico transekta, 9-16 pa drugo polovico. Enote 1-8 so spet položene tako, da enote 1-4 lahko združimo v en blok in ploskve 5-8 v drugega, itd.. V vsaki enoti (ploskvi, bloku, bloku višjega reda) preštejemo osebke (drevesa). Ta števila predstavljajo izhodiščne podatke za analizo variance. Če označimo te vrednosti z a_1 do a_{16}, velikosti bloka pa z BS_1 do BS_{16}, je izračun pomožnih količin za analizo variance naslednji:

$$\mathrm{BS}_1: \sum x_1^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{16}^2$$
$$\mathrm{BS}_2: \sum x_2^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_3 + a_4)^2 + \ldots + (a_{15} + a_{16})^2$$
$$\mathrm{BS}_4: \sum x_4^2 = (a_1 + \ldots + a_4)^2 + (a_5 + \ldots + a_8)^2 + \ldots + (a_{13} + \ldots + a_{16})^2$$
$$\mathrm{BS}_8: \sum x_8^2 = (a_1 + \ldots + a_8)^2 + (a_9 + \ldots + a_{16})^2$$
$$\mathrm{BS}_{16}: \sum x_{16}^2 = (a_1 + \ldots + a_{16})^2$$

Vsota kvadratov odstopanj (SQ) s pripadajočimi stopinjami prostosti (*df*) ter povprečni kvadrat (MQ) za vsak blok je naslednja:

$$\mathrm{BS}_1: \mathrm{SQ}_1 = \tfrac{1}{1}\sum x_1^2 - \tfrac{1}{2}\sum x_2^2;\quad df_1 = 16 - 1 - 7 = 8;\quad \mathrm{MQ}_1 = \mathrm{SQ}_1/8$$
$$\mathrm{BS}_2: \mathrm{SQ}_2 = \tfrac{1}{2}\sum x_2^2 - \tfrac{1}{4}\sum x_4^2;\quad df_2 = 8 - 1 - 3 = 4;\quad \mathrm{MQ}_2 = \mathrm{SQ}_2/4$$
$$\mathrm{BS}_4: \mathrm{SQ}_4 = \tfrac{1}{4}\sum x_4^2 - \tfrac{1}{8}\sum x_8^2;\quad df_4 = 4 - 1 - 1 = 2;\quad \mathrm{MQ}_4 = \mathrm{SQ}_4/2$$
$$\mathrm{BS}_8: \mathrm{SQ}_8 = \tfrac{1}{8}\sum x_8^2 - \tfrac{1}{16}\sum x_{16}^2;\quad df_8 = 2 - 1 - 0 = 1;\quad \mathrm{MQ}_8 = \mathrm{SQ}_8/1$$

Shema analize variance pa je naslednja (WRATTEN in FRY 1980):

BS_k	$\sum x_k^2$	$\sum x_k^2/\mathrm{BS}_k$	SQ_k	*df*	MQ_k	*F*
1	$\sum x_1^2$	$\sum x_1^2/1$	$\sum x_1^2/1-\sum x_2^2/2$	8	$\mathrm{SQ}_1/8$	
2	$\sum x_2^2$	$\sum x_2^2/2$	$\sum x_2^2/2-\sum x_4^2/4$	4	$\mathrm{SQ}_2/4$	$\mathrm{MQ}_2/\mathrm{MQ}_1$
4	$\sum x_4^2$	$\sum x_4^2/4$	$\sum x_4^2/4-\sum x_8^2/8$	2	$\mathrm{SQ}_4/2$	$\mathrm{MQ}_4/\mathrm{MQ}_1$
8	$\sum x_8^2$	$\sum x_8^2/8$	$\sum x_8^2/8-\sum x_{16}^2/16$	1	$\mathrm{SQ}_8/1$	$\mathrm{MQ}_8/\mathrm{MQ}_1$
16	$\sum x_{16}^2$	$\sum x_{16}^2/16$				

F - vrednosti za posamezni blok izračunamo tako, da ustrezne MQ delimo z MQ_1, povprečnim kvadratom bloka, kjer osnovna ploskev tudi predstavlja blok.

Poleg analize variance (*F*-test) je treba pri tej metodi predstaviti za vsako velikost bloka še ustrezni povprečni kvadrat (na abscisni osi predstavimo BS, na ordinatni pa MQ). Tako dobimo točke, ki jih povežemo v poligon. Iz oblike poligona oziroma njegove kulminacijske točke sklepamo, ali je razmestitev naključna enakomerna ali šopasta. Če je poligonska črta brez izrazitega maksimuma in približno vzporedna z *x*-osjo, je razmestitev sistematična enakomerna. Če ima poligonska črta en ali dva izrazita maksimuma, je razmestitev šopasta. Vrh poligona predstavlja tudi srednjo površino šopa (mean area of clump). Če pa je poligonska črta naraščajoča in brez poudarjenih vrhov, je razmestitev naključna enakomerna (WRATTEN in FRY 1980).

Ta metoda se uporablja predvsem pri preučevanju zeliščne in travne vegetacije in sicer tako prilagojena, da namesto števila osebkov uporabljamo abundanco (KERSHAW 1980).

B UGOTAVLJANJE NAČINOV RAZMESTITVE NA PODLAGI MERJENJA RAZDALJ

Pri teh metodah uporabljamo kot kriterij povprečno razdaljo med drevesi ali povprečno razdaljo med naključno izbrano točko ter drevesom. Nekatere metode (tudi ta, ki je opisana v prejšnjih razdelkih tega sestavka) pa uporabljajo obe razdalji.

4 Ugotavljanje nenaključne neenakomerne razmestitve na podlagi kvadrata razdalje od naključno izbrane točke do najbližjega drevesa

Test je utemeljila in podrobno opisala E.C. Pielou (PIELOU 1959), čeprav so ga pred njo uporabili že nekateri drugi raziskovalci.

Test temelji na naslednjih predpostavkah. Če je Δ razdalja od naključno izbrane točke do najbližjega drevesa, ima za $\delta > 0$ naslednjo frekvenčno porazdelitev oz. gostoto verjetnosti:

$$f(\delta) = 2\lambda\delta.\exp(-\lambda\delta^2),$$

λ = gostota, izražena s številom dreves na krogu s polmerom 1: $\lambda = \pi\rho$ (ρ je običajno definirana gostota: število dreves na enoto površine; enota površine je pri tem kvadrat dolžinske enote, s katero izražamo Δ). Če nadomestimo $\Delta = K$, ima K naslednjo frekvenčno porazdelitev:

$$g(k) = \lambda.\exp(-\lambda k).$$

Njegova povprečna vrednost je: $E(K) = 1/\lambda$. $\overline{K}$ ni nepristranska cenilka za $1/\lambda$, pač pa je taka cenilka $n\overline{K}/(n\text{-}1)$ zaradi $E(\overline{K}) = (n\text{-}1)/(n\lambda)$ (n je število razdalj oziroma naključno izbranih točk). Če gostoto ρ izmerimo neodvisno od razdalj (s posebnim vzorcem), velja zveza:

$$E(\pi\rho\overline{K}) = (n\text{-}1)/n.$$

Če vstavimo $\pi\rho\overline{K} = A$, velja, da ima v populaciji z naključno enakomerno razmestitvijo A približno vrednost $(n\text{-}1)/n$. V šopasti razmestitvi je vrednost A večja, nasprotno pa v sistematični enakomerni razmestitvi manjša od $(n\text{-}1)/n$. Zato imamo lahko A za indeks nenaključnosti razmestitve. Izdelane so tabele, ki podajajo interval zaupanja za A pri različnih številih (n) izbranih točk (PIELOU 1959). Pri tej metodi je izredno pomembno, da so točke res izbrane naključno in da gostoto ρ ocenimo neodvisno od cenilke $\overline{K}$.

Postopek je razmeroma enostaven. V sestoju naključno določimo točke (z naključnim izborom koordinat), od katerih merimo razdaljo do najbližjih dreves. Izmerimo razdalje Δ, jih kvadriramo in izračunamo $\overline{K}$. Ocenimo ρ s posebnim vzorcem ter izračunamo A. Če je izračunana vrednost A v intervalu zaupanja, hipoteze o naključni enakomerni razmestitvi ne zavrnemo. Če je A večji od zgornje meje intervala zaupanja, je razmestitev šopasta; če pa je manjši od spodnje meje intervala zaupanja, se razmestitev približuje sistematični enakomerni razmestitvi. Število izbranih točk oziroma merjenih razdalj mora biti razmeroma veliko (vsaj okrog 100).

Interval zaupanja, kadar je $n \geq 100$, lahko izračunamo po naslednjih asimptotičnih aproksimativnih formulah (PIELOU 1959):

za $\alpha = 5\%$ je: $\left(\sqrt{4n-1} \pm 1,9600\right)^2 / (4n)$;

za $\alpha = 1\%$ je: $\left(\sqrt{4n-1} \pm 2,3264\right)^2 / (4n)$.

Za $n < 100$ pa uporabljamo naslednjo tabelo (PIELOU 1959):

Interval zaupanja za A

n	spodnja meja 99%	spodnja meja 95%	zgornja meja 95%	zgornja meja 99%
20	0.554	0.611	1.484	1.592
30	0.625	0.675	1.388	1.473
40	0.669	0.714	1.333	1.404
50	0.701	0.742	1.296	1.358
60	0.719	0.759	1.264	1.318
70	0.738	0.776	1.244	1.293
80	0.754	0.790	1.228	1.273
90	0.767	0.802	1.214	1.257
100	0.779	0.811	1.203	1.243

5 Ugotavljanje nenaključne enakomerne razmestitve z najmanjšo razdaljo med drevesoma

Pri tej metodi je ključno, da imajo vsa drevesa enako verjetnost, da so izbrana. Običajno to dosežemo tako, da izberemo naključna drevesa v sestoju ali, da v naključno izbrani ploskvi izmerimo vsakemu drevesu razdaljo do najbližjega soseda. Pomembno je, da tistim osebkom, ki so blizu meje ploskve, izmerimo razdaljo do najbližjega soseda, četudi ta raste zunaj ploskve.

Če so drevesa naključno enakomerno razmeščena, znaša povprečna vrednost minimalne sosedske razdalje D:

$$\mathrm{E}(D) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}$$

(kot smo videli v prejšnjih razdelkih). Če je dejanska povprečna minimalna sosedska razdalja d_{dej} manjša od tega $\mathrm{E}(D)$, drevesa težijo k šopasti razmestitvi. Zato je razmerje Q med d_{dej} in $\mathrm{E}(D)$

$$Q = d_{dej} \,/\, \mathrm{E}(D) = 2d_{dej}\sqrt{\rho}$$

mera za agregiranost (VANDERMEER 1990). Gostoto ρ moramo spet oceniti z vzorcem, ki je neodvisen od vzorca, s katerim smo določevali sosedske razdalje.

V primeru Q > 1 se razmestitev približuje sistematični. Q lahko zavzame vrednosti od 0 do 2,1491, seveda le teoretično. Vrednost blizu 0 bi bila, če bi po dva ali več dreves raslo iz istega (vsakega) panja. Pri vrednosti 2,1491 pa je razmestitev trikotna sistematična (kot v 3. razdelku). Standardna napaka povprečne minimalne sosedske razdalje znaša

$$\mathrm{se}(D) = 0,2614 \,/\, \sqrt{n\rho}$$

(n je število sosedskih razdalj).

Test o nenaključni razmestitvi izvedemo z normalno deviato z (ker je n velik, običajno nad 60):

$$z = \frac{d_{dej} - \mathrm{E}(D)}{\mathrm{se}(D)}.$$

Če je izračunana vrednost absolutno večja od 1,96, lahko hipotezo o naključni enakomerni razmestitvi zavrnemo s tveganjem $\alpha = 5\%$. Če pa je izračunani z absolutno večji od 2,58, pa isto hipotezo zavrnemo s tveganjem $\alpha = 1\%$.

6 Ugotavljanje načina razmestitve s koeficientom agregacije

Metodo je predstavil in utemeljil B.Hopkins (HOPKINS 1954). Metoda temelji na naključnem izboru dreves, ki jim izmerimo razdaljo do najbližjega soseda (D), in na naključnem izboru istega števila točk ter njihovih razdalj do najbližjega drevesa (Δ). Če so drevesa razmeščena naključno enakomerno, so srednje vrednosti kvadratov razdalj Δ in D enake.

Koeficient agegacije (coefficient of aggregation) je definiran z razmerjem

$$A = \sum(\Delta^2) \,/\, \sum(D^2).$$

Če je populacija razmeščena naključno enakomerno, bo vrednost A enaka 1 (upoštevaje standardno napako). Če je populacija razmeščena v šopih, bo $A>1$, in če so osebki razmeščeni sistematično enakomerno, bo $A<1$. V primerih, ko je število izbranih točk oziroma število izbranih dreves $n>50$, poteka test o nenaključnosti razmestitve po naslednjem vrstnem redu.

1. Izračunamo $\sum(\Delta^2)$ iz merjenj v gozdu.
2. Izračunamo $\sum(D^2)$ iz merjenj v gozdu.

3. Izračunamo A.
4. Izračunamo količino $x = A/(1 + A)$.
5. Izračunamo količino $y = |2x - 1| . \sqrt{2n + 1}$.
6. Količina y se porazdeljuje približno standardizirano normalno, zato je $\alpha = 0{,}5 - \Phi(y)$ tveganje, s katerim zavrnemo osnovno hipotezo, da se drevesa razmeščajo naključno enakomerno.

11 SUMMARY

Usually one can find three types of the arrangement of trees in a stand: random, systematic and cluster. We claim that these characteristics are not disjunct and that there are - from this point of view - four types of the arrangement: systematic uniform, systematic cluster, random uniform and random cluster. In the article we firstly describe the four extremal arrangements (extremal in these senses) and then we deduce the distributions of two random variables, poit-to-tree and tree-to-neighbour distance, Δ and D. We show that we can define measures for uniformity (vs. clusterness) and randomness (vs. systematicness) with the mean values and the standard deviations of these two variables: uniformity U=E(D)/E(Δ), randomness $R=\sigma(D)/\sigma(\Delta)$. The four external arrangements and the rectangular one serve as a justification and illustration of U and R.

In the wide addendum we describe some most important methods of detection of a tree arrangement that are in practice. According to our conclusions we claim that these methods are partial in the sense of giving answers mostly of yes-no type.

11 REFERENCE

COX, T.F.: Reflexive nearest neighbours. Biometrics 37 (1981), str. 367-369.

DAKSKOBLER, I.: Vraščanje gozda na opuščene kmetijske površine. Diplomsko delo, Biotehniška fakulteta, Ljubljana, 1982.

FISZ, M.: Probability Theory and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney 1967.

FRY, G.A.L., WRATTEN, S.D.: Field and Laboratory Exercises in Ecology. Edward Arnold (P.) Ltd., London 1980.

GREIG-SMITH, P.: The use of random and contiguous quadrats in the study of the structure of plant communities. Ann. of Botany, N.S. Vol. XVI, No. 62 (1952).

.........: Quantitative Plant Ecology. Butter Worths, London 1967.

HOPKINS, B. (SKELLAM, J.G.): A new method for determining the type of distribution of plant individuals. Ann. on Botany, N.S. Vol. XVIII, No. 70 (1954), str. 213-227.

HORVAT-MAROLT, S.: Kakovost smrekovega mladja v subalpskem smrekovem gozdu Julijskih Alp. Disertacija, Biotehniška fakulteta, Ljubljana 19779.
JAMNIK, R.: Verjetnostni račun. Mladinska knjiga, Ljubljana 1971.
KERSHAW, K.A.: Quantitative and Dynamic Plant Ecology. Edward Arnold (P.) Ltd, London 1980.
KOTAR, M.: Rast smreke Picea abies (L.) Karst. na njenih naravnih rastiščih v Sloveniji. Strok. in znan. dela 67, IGLG Ljubljana 1980.
PIELOU, E.C.: The use of point-to-plant distances in the study of the pattern of plant populations. J. Ecol. 47 (1959), str. 607-613.
.......: Mathematical Ecology. John Wiley & Sons, New York, Toronto 1977.
POČKAR, B., STRITIH, J.: Strategija rasti gozda na gornji gozdni meji - primerjava med Dinaridi in Julijskimi Alpami. Diplomsko delo, Biotehniška fakulteta, Ljubljana 1987.
SPANIER, J., OLDHAM, K. B.: Atlas of functions. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, New York, London 1987.
TARMAN, K.: Osnove ekologije in ekologija živali. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1992.
UPTON, G., FINGLETON, B.: Spatial Data Analysis by Examples; Vol. 1: Point Pattern and Quantitative Data. John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore 1985.
VANDERMEER, J.: Elementary Mathematical Ecology. Krieger Publ. Comp., Malabar, Florida 1990.