

Oxf. 561- 015.5

Math. Subj. Class. (1980) 92A90

Izvleček:

CEDILNIK, A.: PRODANOVA RASTNA FUNKCIJA

V sestavku so zbrane formule o rastni funkciji

$$y = x^2 / (a + bx + cx^2)$$

pri poljubni izbiri koeficientov a , b , c . Dodanih je nekaj napotkov za prilagajanje te funkcije numeričnim podatkom

Abstract:

CEDILNIK, A.: PROGAN GROWTH FUNCTION

In the article there are collected formulas on growth function

$$y = x^2 / (a + bx + cx^2)$$

where the coefficients a , b , c are optional. Added are some instructions on the application of this function to numerical data.

dr. Anton Cedilnik, dipl. mat.
docent
Biotehniška fakulteta, VTOZD za gozdarstvo
61000 Ljubljana, Večna pot 83, YU

KAZALO VSEBINE

Stran:

Izvleček in abstract

UVOD	238
1. SPLOŠNO O RASTNIH FUNKCIJAH	238
2. OSNOVNE FORMULE PRODANOVE RASTI	242
3. TIPI PRODANOVE RASTI	245
4. GRAFI	253
5. APROKSIMACIJA	257
6. TAYLORJEVA VRSTA	262
7. PRIMER	263
DODATEK: KUBIČNA ENAČBA	269
SUMMARY	271
LITERATURA	272

UVOD

Funkcijo $r(t) = t^2/(a + bt + ct^2)$, ki danes nosi ime po MICHAILU PRODANu, je v gozdarstvu prvi uporabil JOHANN WILHELM HOSSFELD že leta 1822, verjetno v obliki z asimptoto, torej če so koeficienti a , b in c pozitivni. Uporaba te funkcije ima potemtakem že dolgo tradicijo in dandanes je priljubljena bolj kot kdajkoli prej, ker zaradi uporabe računalnikov njena relativna kompliciranost ni več problem. Zato je naravno vprašanje, ali ima dejstvo, da ta funkcija tako uspešno opisuje rast dreves, kakšno biološko osnovo. Odgovor je nikalen: funkcija je le dovolj fleksibilna in nima nikakršnega biološkega ozadja. Pa še navkljub njeni gibkosti je uporabna samo za opisovanje enakomerne neovirane rasti dreves ali sestojev. Če je rast količkaj problematična, je iskanje kakršne koli prilagoditvene funkcije precej neumestno in raje uporabljamo metode numerične analize.

Tole delo naj bi bilo predvsem priročnik o Prodanovi rasti. Morebitni uporabnik najprej prilagodi Prodanovo funkcijo svojim numeričnim podatkom, upošteva (ali pa tudi ne) napotke iz 5. razdelka. Potem določi tip rasti in izračuna količine, ki ga zanimajo, vse po formulah iz 3. razdelka. V pomoč so grafi v 4. razdelku in preprost primer obdelan v 7. razdelku. Prav ta primer pa kaže, da je zelo pomembna izbira metode aproksimacije in nasploh tiste predpostavke, ki jih uporabnik naredi po svoji presoji glede na predmet obdelave, ki pa ne sodijo v koncept tega dela, saj niso matematične narave.

Da pa bi bilo delo v pomoč tudi uporabniku, ki dela s kako drugo rasto funkcijo, je vsebina nekoliko obsežnejša; dodanih je nekaj splošnih dejstev o rastnih funkcijah in samo zato so obdelani tudi taki tipi Prodanove rasti, ki sicer v praksi ne nastopajo. Skratka, v razdelkih od 2. do 6. je podan primer analize neke rasti.

1. SPLOŠNO O RASTNIH FUNKCIJAH

Rastna funkcija $r = r(t)$ je realna povsod definirana funkcija, ki zadošča naslednjim štirim lastnostim

(R1) $r(t)$ je naraščajoča funkcija;

(R2) $r(t)$ je z leve zvezna funkcija;

(R3) $r(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} r(t) = 0$;

(R4) $r(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} r(t) < \infty$

Rastna funkcija je torej z nenegativno konstanto $V = r(\infty)$ pomnožena porazdelitvena funkcija. Konstanto V imenujemo *končna velikost*. Ta definicija rastne funkcije je še preveč splošna, da bi bila uporabna v praksi. Zato ji dodamo dve zahtevi.

Biološka rastna funkcija je rastna funkcija $r = r(t)$ z dodatnima lastnostima:

(BR1) Eksistirata števili R in S , da je

$$r(R) = 0, \tag{1}$$

$$r(S) = V, \tag{2}$$

za vsak t med R in S pa je $0 < r(t) < V$.

(BR2) Eksistira funkcija $p = p(t)$, da je

$$r(t) = \int_{-\infty}^t p(u) du \tag{3}$$

pri čemer je $p(t)$ taka, da jo lahko zapišemo kot razliko dveh rastnih funkcij.

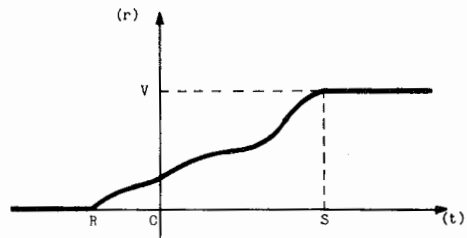
Če je t čas, potem (BR1) pove, da je rast časovno omejena. R je *začetek*, S pa *konec rasti*. (BR2) pa zagotavlja, da lahko govorimo o prirastku in da je rast zvezna. Slika biološke rasti je torej vedno taka, kot kaže Slika 1.

Funkcija $p(t)$ je definirana z integralom (3) in njene vrednosti v posameznih točkah niso enolično določene. Zato se domenimo za dodatek k definiciji:

$$p(t) = \frac{1}{2} \left[\lim_{u \nearrow t} p(t) + \lim_{u \searrow t} p(u) \right] \tag{4}$$

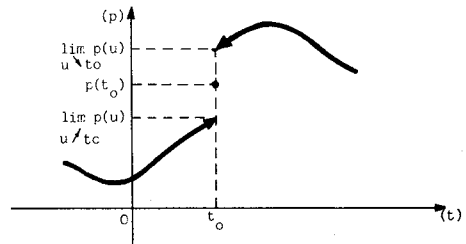
**Slika 1 OBICAJNA OBLIKA
BIOLOSKE RASTNE
FUNKCIJE**

*Usual form of biological
growth function*



To pomeni, da če je $p(t)$ v neki točki t_0 nezvezna, je tam njena vrednost ravno sredi med levo in desno limito (Slika 2). Definicija je dobra, ker ima vsaka funkcija p iz (BR2) zagotovo levo in desno limito v vsaki točki.

Slika 2 **NEZVEZNOST PRIRASTNE FUNKCIJE**
Discontinuity of current increment function



Tako definirani funkciji $p(t)$ bomo rekli *prirastna funkcija* in je očitno omejena in nenegativna. Njena analogija v verjetnostnem računu je gostota porazdelitve. Pogoji, da je $p(t)$ razlika dveh rasti funkcij, ni hud, saj je taka vsaka integrabilna omejena odsekoma monotona funkcija.

Izkaže se, da sta rastna in prirastna funkcija skoraj povsod odvedljivi (skoraj povsod pomeni povsod razen na množici točk, ki jih lahko pokrijemo z intervali s poljubno majhno skupno dolžino). Torej je skoraj povsod

$$p(t) = r'(t) \quad (5)$$

Definirajmo še *rastni pospešek*:

$$q(t) = p'(t) \quad (6)$$

kjer ta odveč pač eksistira.

Vpeljimo še dve funkciji. *Poprečni prirastek*:

$$\bar{p}(t) = \lim_{u \nearrow t} \frac{r(u)}{u - R} = \begin{cases} \frac{r(t)}{t - R} & , t \neq R \\ 0 & , t = R \end{cases} \quad (7)$$

in *rastni potencial*:

$$p^*(t) = \lim_{u \searrow t} \frac{V - r(u)}{S - u} = \begin{cases} \frac{V - r(t)}{S - t} & , t \neq S \\ 0 & , t = S \end{cases} \quad (8)$$

Poprečni prirastek je poprečna vrednost prirastne funkcije na intervalu $[R, t]$, rastni potencial pa je poprečna vrednost prirastne funkcije na intervalu $[t, S]$. O ravnem potencialu je smiselno govoriti le, če je S v kakšnem smislu "naravni" konec rasti.

Obe funkciji sta zvezni povsod razen morda \bar{p} v R , kjer je zvezna z leve, in p^* v S , kjer je zvezna z desne.

$$\lim_{t \searrow R} \bar{p}(t) = \lim_{t \searrow R} p(t) \quad (9)$$

$$\lim_{t \nearrow S} p^*(t) = \lim_{t \nearrow S} p(t) \quad (10)$$

Izven intervala $[R, S]$ sta precej nezanimivi. Za vsak $t \geq 0$ je $\bar{p}(R - t) = p^*(S + t) = 0$ (11)

$$\bar{p}(S + t) = p^*(R - t) = \frac{V}{S - R + t} \quad (12)$$

Izraz

$$D = \frac{V}{S - R} = \bar{p}(S) = p^*(R) \quad (13)$$

imenujemo *končni poprečni prirastek*.

Če je $\bar{p}(t_0) = p(t_0)$, je t_0 za $\bar{p}(t)$ stacionarna ali ekstremalna točka. Če je $p^*(t_0) = p(t_0)$, je t_0 za $p^*(t)$ spet stacionarna ali ekstremalna točka.

Med R in S velja, da

$\bar{p}(t)$ strogo narašča tam, kjer je $\bar{p}(t) < p(t)$,
 $\bar{p}(t)$ strogo pada tam, kjer je $\bar{p}(t) > p(t)$,
 $p^*(t)$ strogo narašča tam, kjer je $p^*(t) > p(t)$,
 $p^*(t)$ strogo pada tam, kjer je $p^*(t) < p(t)$.

V skladu s tem definirajmo za točke na intervalu $[R, S]$:

inicialna faza = $\{t \mid \bar{p}(t) \leq p(t), p^*(t) > p(t)\}$

optimalna faza = $\{t \mid \bar{p}(t) \leq p(t), p^*(t) \leq p(t)\}$

terminalna faza = $\{t \mid \bar{p}(t) > p(t), p^*(t) \leq p(t)\}$

faza stagnacije = $\{t \mid \bar{p}(t) > p(t), p^*(t) > p(t)\}$

Meje med fazami so v teh definicijah ostro določene. V aplikaciji pa se običajno faze zvezno prelivajo druga v drugo in tako moramo tudi razumeti gornje definicije.

Če je prirastek $p(t)$ v točki t zvezna funkcija, je za $t \neq R$

$$p(t) - \bar{p}(t) = (t - R)\bar{p}'(t) \quad (14)$$

in za $t \neq S$

$$p^*(t) - p(t) = (S - t)p^*(t) \quad (15)$$

V točkah, kjer je $\bar{p}(t) = p(t)$ (oziroma $p^*(t) = p(t)$), gre tangenta na krivuljo $r = r(t)$ skozi točko $(R, 0)$ (oziroma (S, V)). Krivulji $\bar{p} = \bar{p}(t)$ in $p^* = p^*(t)$ se sekata natanko v tistih točkah, kjer se sekata krivulja $r = r(t)$ in premica $y = D(x - R)$, ki je zveznica točk $(R, 0)$ in (S, V) .

2. OSNOVNE FORMULE PRODANOVE RASTI

Prodanova rast je biološka rast, katere rastna funkcija se na območju spreminjanja, torej med R in S , izraža s *Prodanovo funkcijo*

$$r(t) = t^2/(a + bt + ct^2).$$

Edina ničla Prodanove funkcije je pri $t = 0$, zato zveznost rastne funkcije implicira: $R = 0$, $S > 0$.

$$V = S^2/(a + bS + cS^2) \quad (16)$$

V splošnem torej velja

$$r(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ t^2/(a + bt + ct^2) & , 0 < t < S \\ V & , t \geq S \end{cases} \quad (17)$$

Obrat formule (16) za $a = 0$ je

$$S = bV/(1 - cV) \quad (18)$$

za $a \neq 0$ pa

$$S = \frac{2a}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4a/V}} \quad (19)$$

Prirastna funkcija:

$$p(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , t < 0 \text{ ali } t > S \\ p(0) & , t = 0 \\ p(S) & , t = S \\ \frac{t(2a + bt)}{(a + bt + ct^2)^2} & , 0 < t < S \end{array} \right\} \quad (20)$$

$p(t)$ je zvezna in odvedljiva funkcija povsod razen morda pri $t = 0$ ali $t = S$. Za $a = 0$ je

$$p(0) = \frac{1}{2} \lim_{t \searrow 0} p(t) = \frac{1}{2b} \quad (21)$$

za $a \neq 0$ pa je $p(0) = 0$. V prvem primeru je $p(t)$ pri $t = 0$ nezvezna, v drugem pa zvezna.

$$p(S) = \frac{1}{2} \lim_{t \nearrow S} p(t) = \frac{S(2a + bS)}{2(a + bS + cS^2)^2} \quad (22)$$

Pri $t = S$ je $p(t)$ zvezna le, če je $p(S) = 0$, kar pa je možno samo pri $a > 0$, $c > 0$, $0 > b > -2\sqrt{ac}$ (tip I), in sicer za

$$S = -2a/b \quad (23)$$

To je potemtakem edini primer, ko je prirastna funkcija v celoti zvezna.

Rastni pospešek:

$$q(t) = p'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , t < 0 \text{ ali } t > S \\ \frac{2(a^2 - 3act^2 - bct^3)}{(a + bt + ct^2)^3} & , 0 < t < S \end{array} \right\} \quad (24)$$

Če je $a = 0$, je

$$\lim_{t \searrow 0} q(t) = -2c/b^2 \quad (25)$$

$$\lim_{t \nearrow S} q(t) = -2bc/(b + cS)^3 \quad (26)$$

Če pa je $a \neq 0$, je

$$\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = 2/a \quad (27)$$

$$\lim_{t \rightarrow S} q(t) = \frac{2(a^2 - 3acS^2 - bcS^3)}{(a + bS + cS^2)^3} \quad (28)$$

$q(t)$ pri $t = 0$ in $t = S$ ni nikoli definiran, ker $p(t)$ ni tam nikoli odvedljiva funkcija.

Za študij ravnega pospeška, pa tudi prirastne funkcije, potrebujemo še naslednji odvod:

$$p''(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \text{ ali } t > S \\ \frac{6(ct^2 - a)(bct^2 + 4act + ab)}{(a + bt + ct^2)^4} & , 0 < t < S \end{cases} \quad (29)$$

Poprečni prirastek:

$$\bar{p}(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ t/(a + bt + ct^2) & , 0 < t < S \\ V/t & , t \geq S \end{cases} \quad (30)$$

Rastni potencial:

$$p^*(t) = \begin{cases} V/(S - t) & , t \leq 0 \\ \frac{aS + (a + bS)t}{(a + bS + cS^2)(a + bt + ct^2)} & , 0 < t < S \\ 0 & , t \geq S \end{cases} \quad (31)$$

$$\bar{p}(S) = p^*(0) = D = V/S = S/(a + bS + cS^2) \quad (32)$$

Na intervalu $0 < t < S$ veljata formuli:

$$\bar{p}(t) - p(t) = \frac{t(ct^2 - a)}{(a + bt + ct^2)^2} \quad (33)$$

$$p^*(t) - p(t) = \frac{(S - t) [(cSt - a)^2 - ct^2(a + bS + cS^2)]}{(a + bS + cS^2)(a + bt + ct^2)^2} \quad (34)$$

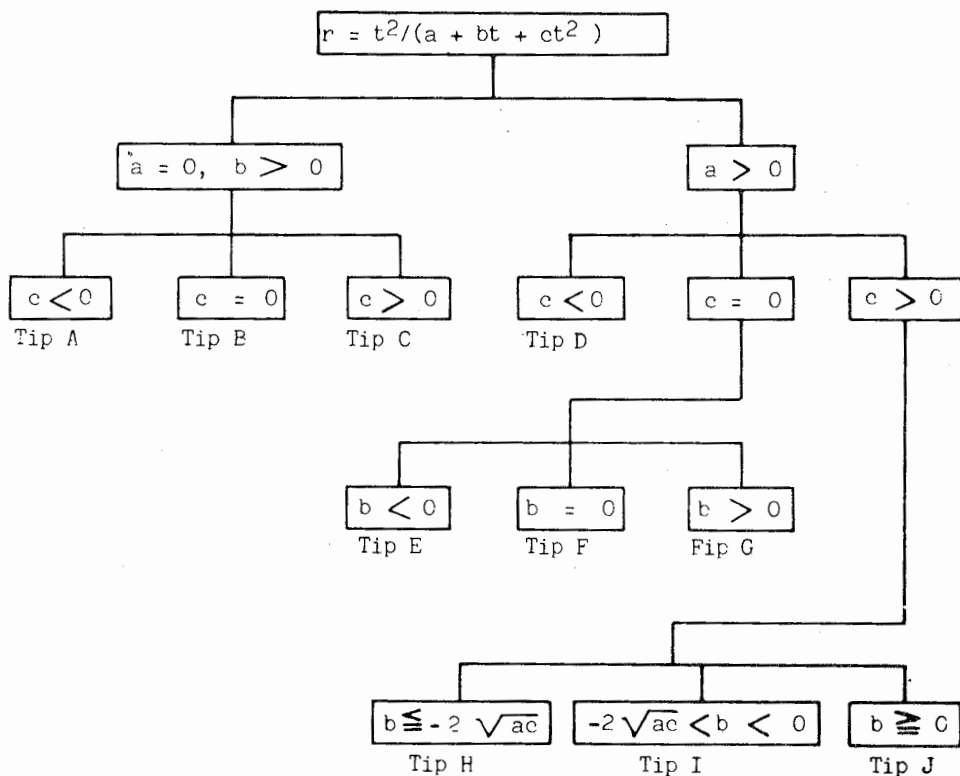
Prodanova rast ima 2 ali 3 faze rasti, ki so vedno intervali, torej povezane množice. Faze si sledijo po vrstnem redu: inicialna — optimalna — terminalna. Nikoli pa ne nastopa faza stagnacije.

Prirastna funkcija ima včasih absolutni maksimum. Označimo čas absolutnega maksimuma s P . Vedno je $0 < P < S$ in vedno je P v optimalni fazi. Če je P enolično določen, je najmanjša pozitivna rešitev enačbe

$$bcP^3 + 3acP^2 - a^2 = 0 \quad (35)$$

V splošnem pa je P vsako število med 0 in S , ki zadošča (35).

3. TIPI PRODANOVE RASTI



Tip A $a = 0, b > 0, c < 0, S < -b/c$

Grafi: $r = r(t)$ (Slika 3), $p = p(t)$ (Slika 10), $q = q(t)$ (Slika 16)

Zgornja meja za S je pol Prodanove funkcije in odvodov.

Faze: $[0, S)$ inicialna faza
 $\{S\}$ optimalna faza za $S \geq -b/(2c)$
terminalna faza za $S < -b/(2c)$

Tip B

$$a = c = 0, b > 0$$

Enakomerna zvezna rast

Grafi: $r = r(t)$ (Slika 4), $p = p(t)$ (Slika 11), $q = q(t)$ (Slika 17)

Prodanova funkcija je linearna, odvoda sta konstanti.

Faze: $\{0\}$ inicialna faza
 $(0, S)$ optimalna faza
 $\{S\}$ Terminalna faza
 $0 < P < S$ (katerakoli vrednost !)

$$p(P) = 1/b$$

(36)

Tip C

$$a = 0, b > 0, c > 0, V < 1/c$$

Grafi: $r = r(t)$ (Slika 5), $p = p(t)$ (Slika 12), $q = q(t)$ (Slika 18)

Prodanova funkcija ima za $t \rightarrow \infty$ asimptoto $r = 1/c$, odvoda pa imata asimptoti $p = 0$ in $q = 0$.

Faze: $\{0\}$ inicialna faza za $S < b/c$
optimalna faza za $S \geq b/c$
 $(0, S]$ terminalna faza

Tip D

$$a > 0, c < 0, S < \frac{2a}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Grafi: $r = r(t)$ (Slika 6), $p = p(t)$ (Slika 13), $q = q(t)$ (Slika 16)

Zgornja meja za S je pol Prodanove funkcije in odvodov.

Faze: $[0, S)$ inicialna faza
 $\{S\}$ optimalna faza za $S \geq -b/(2c)$
 terminalna faza za $S < -b/(2c)$

Tip E $a > 0, b < 0, c = 0, S < -a/b$

Grafi: $r = r(t)$ (Slika 6), $p = p(t)$ (Slika 13), $q = q(t)$ (Slika 16)

Zgornja meja za S je pol Prodanove funkcije in odvodov.

Faze: $[0, S)$ inicialna faza
 $\{S\}$ optimalna faza

Tip F $a > 0, b = c = 0$

Grafi: $r = r(t)$ (Slika 6), $p = p(t)$ (Slika 14), $q = q(t)$ (Slika 19)

Prodanova funkcija je kvadratna, prvi odvod je linearna in drugi odvod konstantna funkcija.

Faze $[0, S)$ inicialna faza
 $\{S\}$ optimalna faza

Tip G $a > 0, b > 0, c = 0$

Grafi. $r = r(t)$ (Slika 6), $p = p(t)$ (Slika 15), $q = q(t)$ (Slika 20)

Prodanova funkcija ima za $t \rightarrow \infty$ asimptoto $r = (bt - a)/b^2$, prvi odvod $p = 1/b$ in drugi odvod $q = 0$.

Faze: $[0, S)$ inicialna faza
 $\{S\}$ terminalna faza

Tip H $a > 0, c > 0, b \leq -2\sqrt{ac}, S < \frac{2a}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$

Za tip H velja vse isto kot za tip E.

Tip I

$a > 0, c > 0, 0 > b > -2\sqrt{ac}$ $S \leq -2a/b \iff V \leq 4a\sqrt{4ac - b^2}$

Grafi: $r = r(t)$, $q = q(t)$ (Slika 7), $p = p(t)$, $\bar{p} = \bar{p}(t)$, $p^* = p^*(t)$ (Slika 8)

Zgornja meja za S je maksimum Prodanove funkcije. Prvi odvod ima prevoja (in drugi odvod ekstrema) v točki B in C :

$$C = -2a/b - \sqrt{4a^2/b^2 - ac} \quad (37)$$

$$B = +\sqrt{ac} \quad (38)$$

Prevoj Prodanove funkcije, maksimum prvega odvoda in ničla drugega odvoda so v točki P :

$$P = -\frac{2a}{b} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{1}{3} \left[\pi + \arccos \left(1 - \frac{b^2}{2ac} \right) \right] \right) \quad (39)$$

P je absolutni maksimum prirastne funkcije le , če je $S > P$. Tedaj je:

$$C \leq A < P < B \quad (40)$$

kjer je

$$A = \frac{a}{cS + \sqrt{c(a + bS + cS^2)}} \quad (41)$$

$$A = C \iff S = -2a/b$$

Za $S > C$ je:

$$r(C) = \frac{\sqrt{ac} (2\sqrt{ac} - \sqrt{4ac - b^2})}{c(4ac - b^2)} \quad (42)$$

$$p(C) = \frac{-b \sqrt{4ac - b^2} (2\sqrt{ac} + \sqrt{4ac - b^2})}{(4ac - b^2)^2} \quad (43)$$

$$q(C) = \frac{2c(2\sqrt{ac} + \sqrt{4ac - b^2})^2}{(4ac - b^2)^2} \quad (44)$$

Za $S > B$ se funkciji $\bar{p}(t)$ in $p^*(t)$ sekata in sicer v točki

$$T = a/(cS) \quad (45)$$

Veljata oceni:

$$C < -b/(2c) \leq T \quad (46)$$

$$A < T < B \quad (47)$$

Za $S > B$ veljajo še naslednje trditve:

$$B = \sqrt{ST} \quad (48)$$

$$r(T) = DT \quad (49)$$

$$\bar{p}(T) = p^*(T) = D \quad (50)$$

$$\rho(T) = D^2(b + 2cS) \quad (51)$$

$$q(T) = 2cD^3(c^2S^3/a - 3cS - b) \quad (52)$$

$$r(B) = \frac{\sqrt{ac}}{c(2\sqrt{ac} + b)} = B\rho(B) \quad (53)$$

$$\rho(B) = \bar{\rho}(B) = 1/(2\sqrt{ac} + b) \quad (54)$$

$$q(B) = -2c/(2\sqrt{ac} + b)^2 \quad (55)$$

Faze: $S \leq P \Rightarrow \begin{cases} [0, S) & \text{inicialna faza} \\ \{S\} & \text{optimalna faza za } S \leq -b/(2c) \\ & \text{terminalna faza za } S > -b/(2c) \end{cases}$

$P < S \leq B \Rightarrow \begin{cases} [0, A) & \text{inicialna faza} \\ [A, S) & \text{optimalna faza} \\ \{S\} & \text{še optimalna faza za } S \leq -b/(2c) \\ & \text{terminalna faza za } S > -b/(2c) \end{cases}$

$S > B \Rightarrow \begin{cases} [0, A) & \text{inicialna faza} \\ [A, B] & \text{optimalna faza} \\ (B, S] & \text{terminalna faza} \end{cases}$

Ker je $B > -b/(2c)$, velja nasploh, da je S v optimalni fazi za $S \leq -b/(2c)$, in v terminalni fazi za $S > -b/(2c)$.

$-b/(2c)$ je šibek približek za P :

$$|P - (-b/(2c))| < 0.09623(-2a/b) \quad (56)$$

Tip 1. Posebni primer: $S = -2a/b$ (57)

$$V = 4a/(4ac - b^2) \quad (58)$$

$$p(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , t \leq 0 \text{ ali } t \geq S \\ \frac{t(2a + bt)}{(a + bt + ct^2)^2} & , 0 < t < S \end{array} \right\} \quad (59)$$

$$p^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} V/(S - t) & , t \leq 0 \\ \frac{V(2a + bt)}{2S(a + bt + ct^2)} & , 0 < t < S \\ 0 & , t \geq S \end{array} \right\} \quad (60)$$

$\rho, \bar{\rho}$ in ρ^* so povsod zvezne funkcije, r pa je celo povsod zvezno odvedljiva funkcija.

P je absolutni maksimum prirastne funkcije in je:

$$P = S \left[\frac{1}{2} - \cos \frac{1}{3} (\pi + \arccos \rho) \right] \quad (61)$$

kjer je

$$\rho = 1 - b^2/(2ac) \in (-1, 1) \quad (62)$$

$$D = -2b/(4ac - b^2) \quad (63)$$

$$A = C = S(1 - \sqrt{(1 + \rho)/2}) \quad (64)$$

$$B = S\sqrt{(1 - \rho)/2} \quad (65)$$

$$(S - A)^2 = S^2 - B^2 \quad (66)$$

$$T = -b/(2c) = S(1 - \rho)/2 \quad (67)$$

$$r(A) = V(1 - \sqrt{(1 + \rho)/2})/2 \quad (68)$$

$$r(B) = V(1 + \sqrt{(1 - \rho)/2})/2 \quad (2I)$$

$$r(T) = V(1 - \rho)/2 \quad (70)$$

$$\rho(A) = \rho^*(A) = D(1 + \sqrt{2/(1 + \rho)})/2 \quad (71)$$

$$\rho(B) = \bar{\rho}(B) = D(1 + \sqrt{2/(1 - \rho)})/2 \quad (72)$$

$$\rho(T) = 2D \quad (73)$$

$$\bar{\rho}(A) = \rho^*(B) = D/2 \quad (74)$$

V naslednjih formulah naj bo

$$Q = 8ac^2/(4ac - b^2)^2 = 2VS^{-2}/(1 - \rho^2) \quad (75)$$

$$\lim_{t \searrow 0} q(t) = Q(1 + \rho)^2 \quad (76)$$

$$\lim_{t \nearrow S} q(t) = -Q(1 - \rho)^2 \quad (77)$$

$$q(A) = Q(1 + \sqrt{(1 + \rho)/2})^2 \quad (78)$$

$$q(B) = -Q(1 + \sqrt{(1 - \rho)/2})^2 = -\frac{2c^2}{a}r(B)^2 \quad (79)$$

$$q(T) = \lim_{t \searrow 0} q(t) + \lim_{t \nearrow S} q(t) = 4Q\rho \quad (80)$$

Faze: [0, A) inicialna faza
 [A, B] optimalna faza
 (B, S] terminalna faza

Tip J $a > 0, b \geq 0, c > 0, V < 1/c$

Hossfeldova rast

Grafi: $r = r(t)$, $q = q(t)$ (Slika 9), $\rho = \rho(t)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$,
 $\rho^* = \rho^*(t)$ (Slika 8)

Prodanova funkcija ima za $t \rightarrow \infty$ asimptoto $r = 1/c$, odvoda pa imata asimptoto $\rho = 0$ oziroma $q = 0$. Prvi odvod ima en sam prevoj (in drugi odvod minimum) v točki B (enačba (38)). Prevoj Prodanove funkcije, maksimum prvega odvoda in ničla drugega odvoda so v točki P; če je

$$\rho = b^2/(2ac) - 1 \quad (81)$$

je za $\rho = -1$ (to je za $b = 0$)

$$P = +\sqrt{a/(3c)} = \lim_{b \searrow 0} P = \lim_{b \nearrow 0} P \quad (82)$$

za $-1 < \rho \leq 1$ je

$$P = \frac{a}{b} \left[2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\rho\right) - 1 \right] \quad (83)$$

in za $\rho \geq 1$

$$P = \frac{a}{b} \left[\sqrt[3]{\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}} + \sqrt[3]{\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}} - 1 \right] \quad (84)$$

Dodatno še velja: če je $\rho = 1$, je

$$P = a/b \quad (85)$$

in za $\rho = 0$ je

$$P = \frac{a}{b} (\sqrt{3} - 1) \quad (86)$$

P je absolutni maksimum prirastne funkcije l , če je $S > P$.

Tedaj je

$$A < P < B \quad (87)$$

kjer je A podan z enačbo (41).

Za $S > B$ se funkciji \bar{p} in p^* sekata v točki T iz enačbe (45). Tedaj veljajo še formule (47) — (55).

$$\text{Faze: } S \leq P \Rightarrow \begin{array}{l} [0, S) \\ \{S\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{inicialna faza} \\ \text{terminalna faza} \end{array}$$

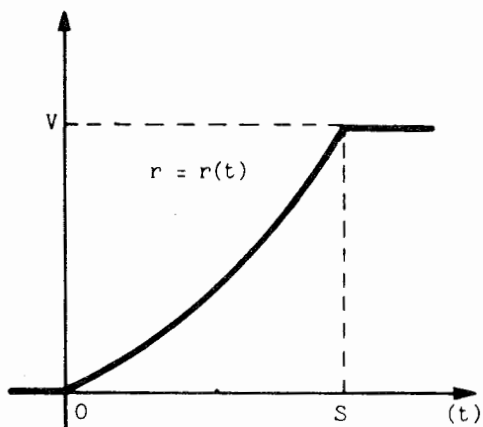
$$P < S \leq B \Rightarrow \begin{array}{l} [0, A) \\ [A, S) \\ \{S\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{inicialna faza} \\ \text{optimalna faza} \\ \text{terminalna faza} \end{array}$$

$$S > B \Rightarrow \begin{array}{l} [0, A) \\ [A, B] \\ B, S] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{inicialna faza} \\ \text{optimalna faza} \\ \text{terminalna faza} \end{array}$$

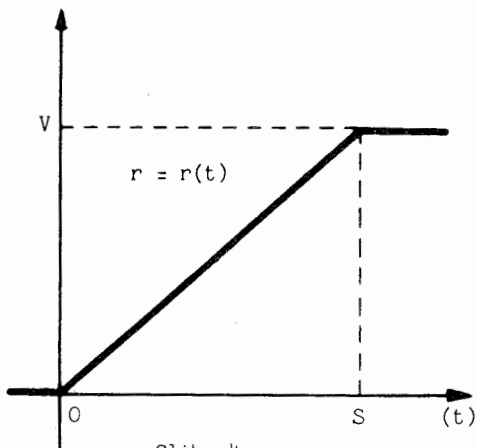
4. GRAFI

V tem razdelku podajamo grafe različnih tipov Prodanove rasti: grafe rastnih funkcij $r(t)$, prirastnih funkcij $p(t)$ in rastnih pospeškov $q(t)$. V prejšnjem razdelku je pri vsakem tipu omenjeno, kateri grafi mu pripadajo.

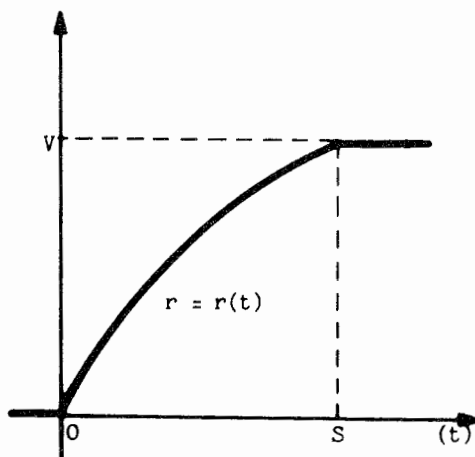
In this paragraph we give graphs of different types of Prodan growth: graphs of growth functions $r(t)$, of current increments $p(t)$, and of growth accelerations $q(t)$. In a discription of each type in the previous paragraph it is mentioned which graphs belong to that type.



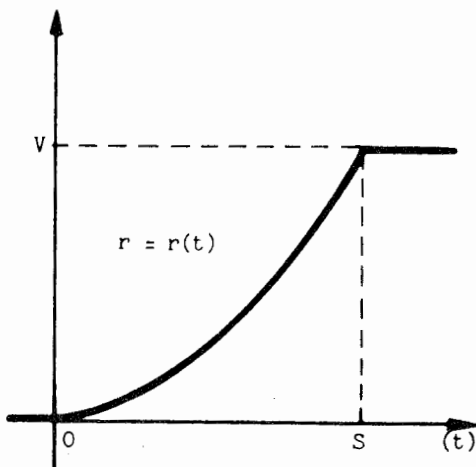
Slika 3



Slika 4

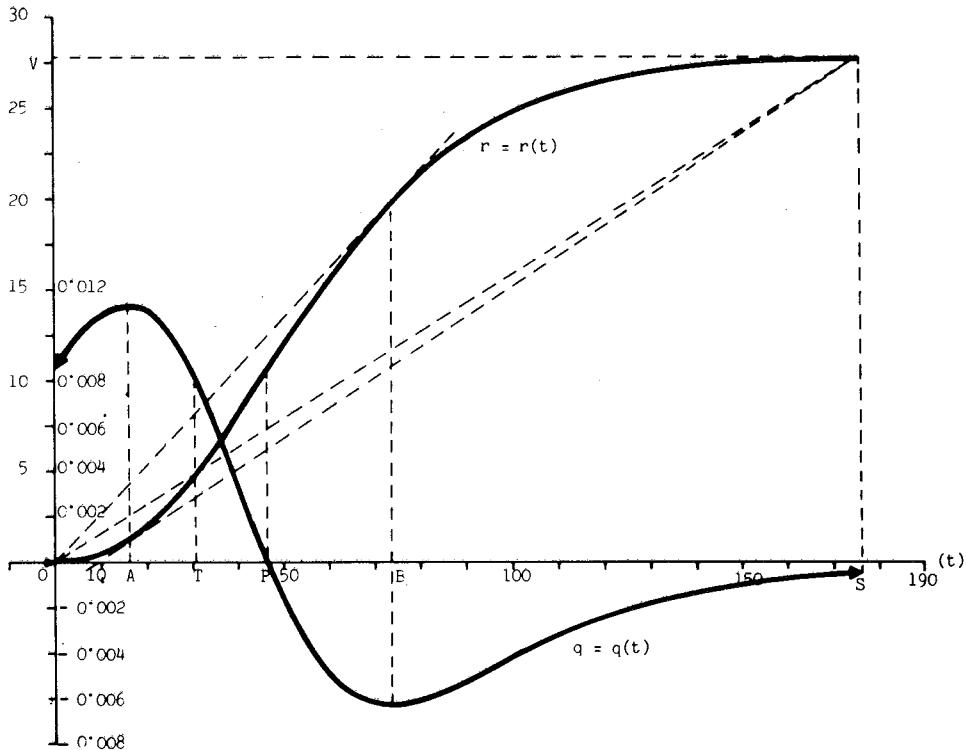


Slika 5

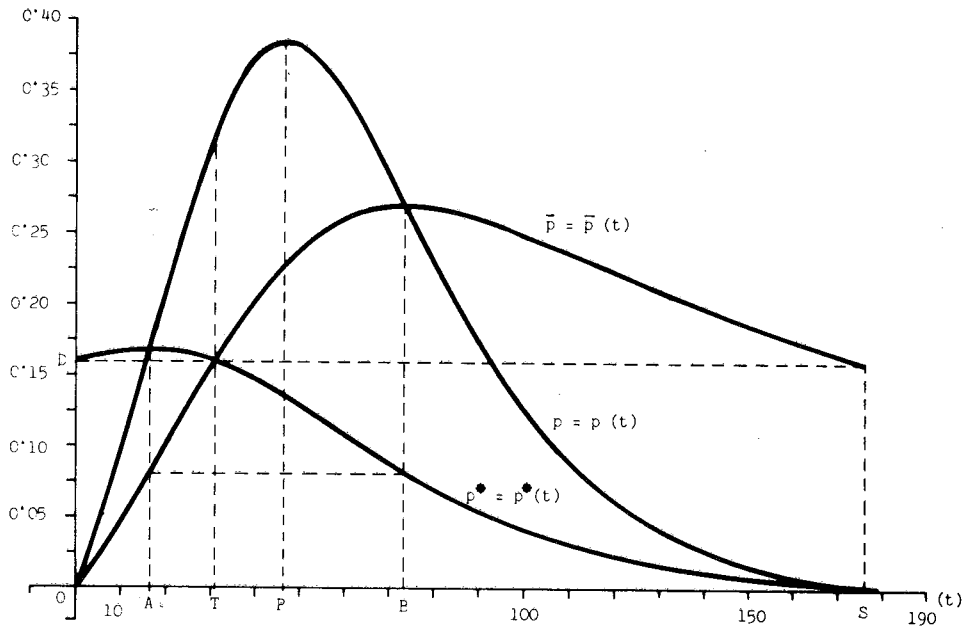


Slika 6

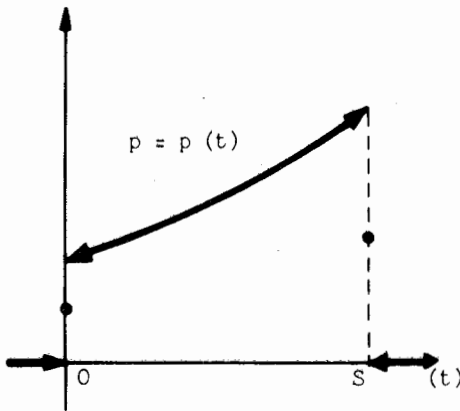
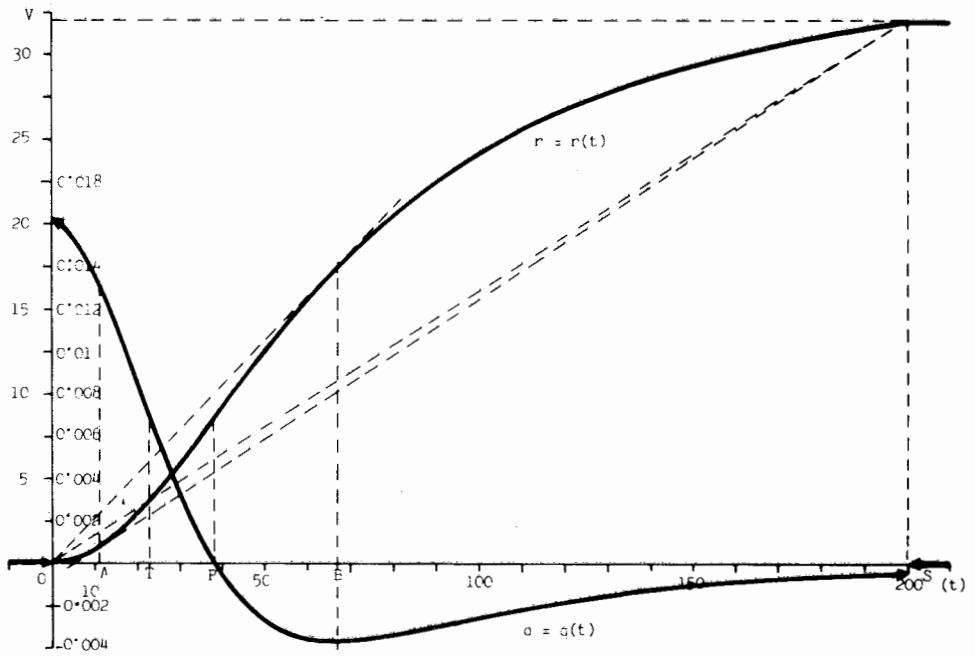
Slika 7



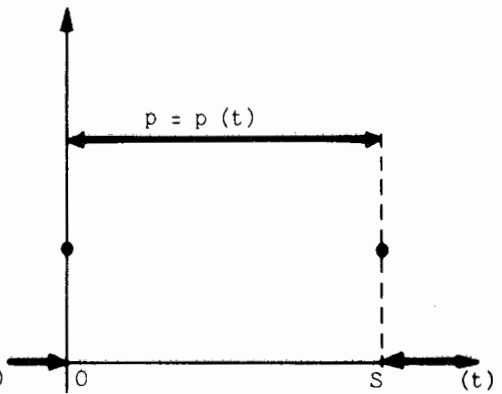
Slika 8



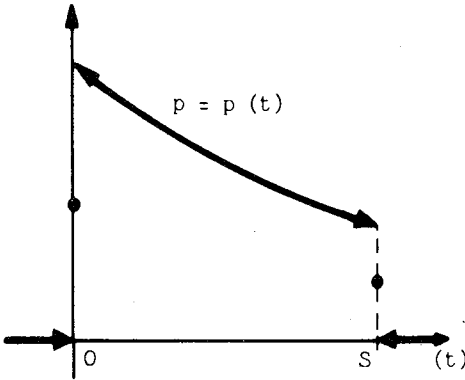
Slika 9



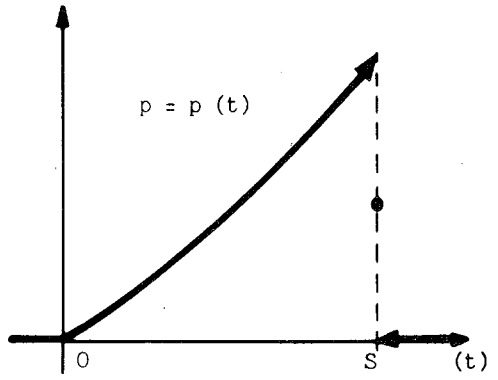
Slika 10



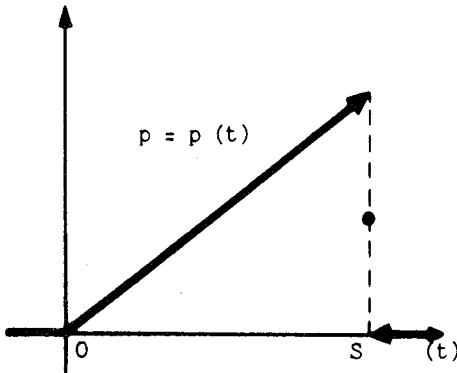
Slika 11



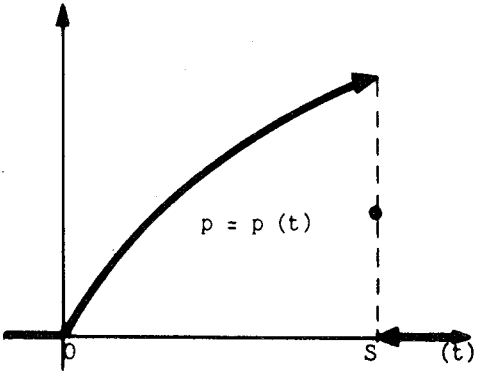
Slika 12



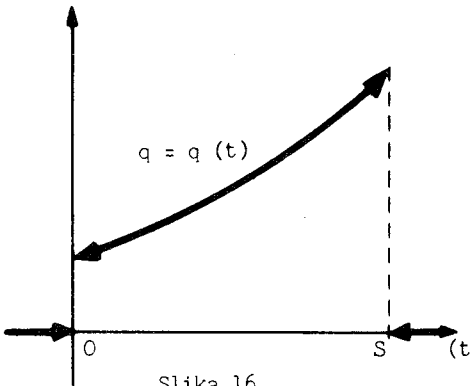
Slika 13



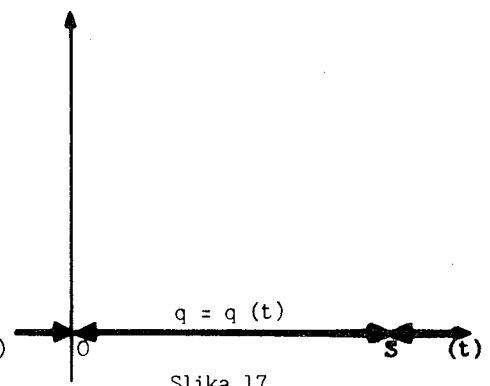
Slika 14



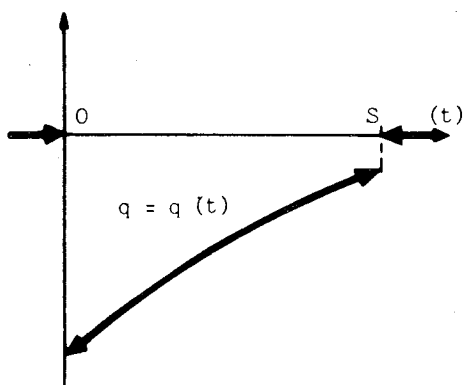
Slika 15



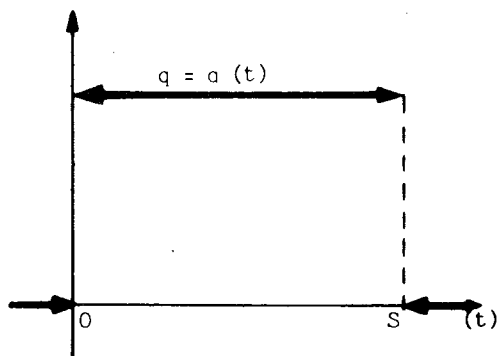
Slika 16



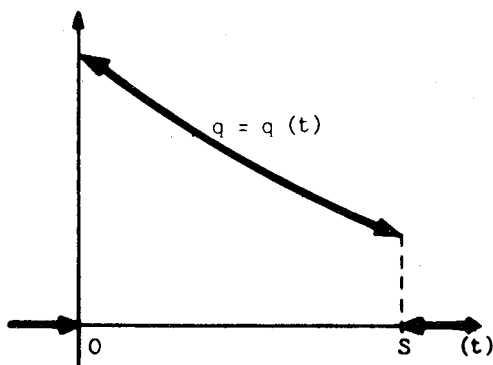
Slika 17



Slika 18



Slika 19



Slika 20

5. APROKSIMACIJA

Imejmo dano tabelarično odvisnost dveh znakov, x in y , kjer je y neka rast:

x	x_1	x_2	...	x_S
y	y_1	y_2	...	y_S

Tabela 1

Za prilagoditev Prodanove funkcije tem podatkom moramo imeti še ali konec rasti S ali pa končno velikost V ; $S > 0$ ali $V > 0$. Najprej tabelo prilagodimo:

- (a) Iz tabele odstranimo točke (x_k, y_k) z $x_k \leq 0$, ker je Prodanova funkcija tam že določena.

(b) Če imamo podan S , potem vse točke (x_k, y_k) z $x_k > S$ zamenjamo s točkami (S, y_k) .

(c) Če imamo podan V , potem vse točke (x_k, y_k) z $y_k > V$ zamenjamo s točkami (x_k, V) .

Če pa o S in V ničesar ne vemo, ju postavimo (enega od njiju) tako velika, da na podatke ne vplivata več.

Zamenjajmo še imeni spremenljivk: $x \rightarrow t$, $y \rightarrow r$, pa imamo novo tabelo:

t	t_1	t_2	\dots	t_n
r	r_1	r_2	\dots	r_n

Tabela 2

Ker ima Prodanova funkcija 3 parametre, morajo biti v Tabeli 2 vsaj trije različni t_k !

Podatkom v Tabeli 2 po izbrani metodi, o kateri bo govor pozneje, prilagodimo funkcijo $r = t^2/(a + bt + ct^2)$. Če ima prilagojena funkcija $a > 0$ ali pa $a = 0$ in $b > 0$, jo sprejmemo, v nasprotnem primeru pa zavrneemo s trditvijo, da podatki ne ustrezajo Prodanovi rasti. Če je torej prilagojena funkcija ustrezna, izračunamo S ali V , katerega pač še nismo imeli. V primeru, ko se S ali V ne pokoravata zahtevam, ki jih imamo pri tipih A, C, D, E, H, I in J , moramo razmisliti, ali je s podanim S oziroma V vse v redu; če je, spet zaključimo, da rast ni Prodanova; v nasprotnem primeru pa S oziroma V popravimo in celotni postopek prilagajanja po potrebi ponovimo.

Nato določimo stopnjo prilagoditve. Naj bo:

$$\eta = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s y_k, \quad \xi = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s r(x_k) \quad (88)$$

Pri tem je treba paziti na dve dejstvi: za $x_k \leq 0$ je $r(x_k) = 0$ in za $x_k \geq S$ je $r(x_k) = V$; x_k in y_k so seveda iz Tabele 1.

Stopnja prilagoditve je tedaj:

$$k = \frac{\sum_{k=1}^s [y_k - \eta] \cdot [r(x_k) - \xi]}{\left(\sum_{k=1}^s [y_k - \eta]^2 \cdot \sum_{k=1}^s [r(x_k) - \xi]^2 \right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{s \sum_{k=1}^s y_k r(x_k) - \sum_{k=1}^s y_k \cdot \sum_{k=1}^s r(x_k)}{\sqrt{\left[s \sum_{k=1}^s y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^s y_k \right)^2 \right] \cdot \left[s \sum_{k=1}^s r(x_k)^2 - \left(\sum_{k=1}^s r(x_k) \right)^2 \right]}} \quad (89)$$

Vedno velja:

$$-1 \leq k \leq 1 \quad (90)$$

Če je $k \leq 0$, spet zavrtnemo prilagojeno funkcijo, za $k > 0$ pa jo smatramo za verjetno in sicer tem bolj, čim bliže 1 je k .

Prilagoditev po metodi najmanjših kvadratov

Imejmo torej Tabelo 2 in ji prilagodimo funkcijo $r = r(t)$ v obliki

$$a + bt + ct^2 = t^2 r^{-1} \quad (91)$$

po metodi najmanjših kvadratov; pri tem naj bo

$$\Delta_k = \frac{t_k^2}{a + bt_k + ct_k^2} - r_k \quad (92)$$

To bomo storili na dva načina.

(A) Pomnožimo (91) z rt^{-m} :

$$art^{-m} + brt^{1-m} + crt^{2-m} = t^2 - m \quad (93)$$

$$\begin{aligned}
 F(a, b, c) &= \sum_{k=1}^n \left[ar_k t_k^{-m} + br_k t_k^{1-m} + cr_k t_k^{2-m} - t_k^{2-m} \right]^2 = \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{t_k^{2-m}}{r(t_k)} \Delta_k \right]^2
 \end{aligned} \tag{94}$$

Od tod sledi normalni sistem:

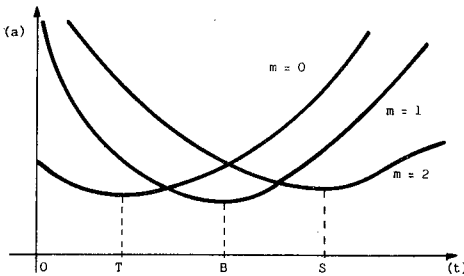
$$\begin{aligned}
 a \sum r_k^2 t_k^{-2m} + b \sum r_k^2 t_k^{1-2m} + c \sum r_k^2 t_k^{2-2m} &= \sum r_k t_k^{2-2m} \\
 a \sum r_k^2 t_k^{1-2m} + b \sum r_k^2 t_k^{2-2m} + c \sum r_k^2 t_k^{3-2m} &= \sum r_k t_k^{3-2m} \\
 a \sum r_k^2 t_k^{2-2m} + b \sum r_k^2 t_k^{3-2m} + c \sum r_k^2 t_k^{4-2m} &= \sum r_k t_k^{4-2m}
 \end{aligned} \tag{95}$$

(Vse sumacije grede od 1 do n)

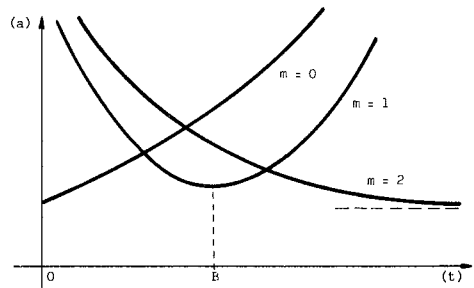
Iz (94) sledi, da meri funkcija

$$a(t) = t^{2-m} / r(t) = t^{-m}(a + bt + ct^2) \tag{96}$$

kakovost prilagoditve: večja ko je njena vrednost na nekem območju, boljša je tam prilagoditev podatkom. Sliki 21 in 22 kažeta obliko funkcije $a(t)$ za tipa I in J in za tri najbolj uporabne m : 0, 1 in 2.



Slika 21 Kakovost prilagoditve za tip I ($S = -2a/b$) po formuli (93)
Quality of approximation for type I ($S = -2a/b$) according to formula (93)



Slika 22 Kakovost prilagoditve za tip J po formuli (93)
Quality of approximation for type J according to formula (93)

Omenimo še, da je pri $m = 2$ funkcija $F(a,b,c)$ iz (94) vsota kvadratov relativnih odklonov.

(B) Privzemimo, da je r_k za vsak $k = 1, 2, \dots, n$ pozitiven in tudi ne preblizu 0. Pomnožimo enačbo (91) s t^m :

$$at^{-m} + bt^{1-m} + ct^{2-m} = t^{2-m}r^{-1} \quad (97)$$

Za to obliko Prodanove funkcije nam metoda najmanjših kvadratov da:

$$\begin{aligned} F(a, b, c) &= \sum_{k=1}^n \left[at_k^{-m} + bt_k^{1-m} + ct_k^{2-m} - t_k^{2-m}/r_k \right]^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{t_k^{2-m}}{r_k \cdot r(t_k)} \Delta_k \right]^2 \end{aligned} \quad (98)$$

Normalni sistem:

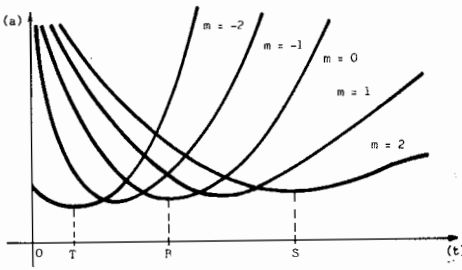
$$\begin{aligned} a \sum t_k^{-2m} + b \sum t_k^{1-2m} + c \sum t_k^{2-2m} &= \sum t_k^{2-2m}/r_k \\ a \sum t_k^{1-2m} + b \sum t_k^{2-2m} + c \sum t_k^{3-2m} &= \sum t_k^{3-2m}/r_k \quad (99) \\ a \sum t_k^{2-2m} + b \sum t_k^{3-2m} + c \sum t_k^{4-2m} &= \sum t_k^{4-2m}/r_k \end{aligned}$$

(Vse sumacije gredo od 1 do n)

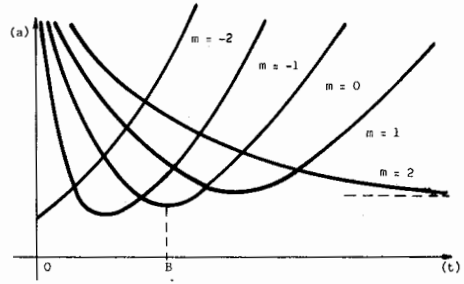
Kakovost prilagoditve meri funkcija

$$a(t) = t^{2-m}/r(t)^2 = t^{-m-2}(a + bt + ct^2)^2 \quad (100)$$

Sliki 23 in 24 kažeta obliko funkcije $a(t)$ za tipa I in J in za $m = -2, -1, 0, 1$ in 2.



Slika 23 Kakovost prilagoditve za tip I ($S = -2a/b$) po formuli (97)
Quality of approximation for type I ($S = -2a/b$) according to formula (97)



Slika 24 Kakovost prilagoditve za tip J po formuli (97)
Quality of approximation for type J according to formula (97)

6. TAYLORJEVA VRSTA

Taylorjeva vrsta Prodanove funkcije:

(A) $a = 0$

$$r(t) = \frac{t}{b} \left[1 - ct/b + (ct/b)^2 - (ct/b)^3 + (ct/b)^4 - \dots \right] \quad (101)$$

(B) $a \neq 0$

$$r(t) = \frac{t^2}{a} \left[1 - \frac{b}{a}t + \frac{b^2 - ac}{a^2}t^2 - \frac{b^3 - 2abc}{a^3}t^3 + \frac{b^4 - 3ab^2c + a^2c^2}{a^4}t^4 - \dots \right] \quad (102)$$

Konvergenca vrste (101):

$$c = 0 \Rightarrow t \text{ je poljubno}$$

$$c \neq 0 \Rightarrow |t| < b/|c|$$

Konvergenca vrste (102):

$$b = c = 0 \Rightarrow t \text{ je poljubno}$$

$$b \neq c = 0 \Rightarrow |t| < a/|b|$$

$$c \neq 0 \Rightarrow |t| < \frac{1}{2} \min \left| \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{c} \right|$$

Konvergenca vrst (101 in (102) posebej na intervalu $[0, S]$:

Tip C : $t < b/c$

Tip D (v primeru $b > 0$) : $t < \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$

Tip G : $t < a/b$

Tip I : $t < \sqrt{a/c}$ (= B)

Tip J (v primeru $b \leq 2\sqrt{ac}$) : $t < \sqrt{a/c}$ (= B)

Tip J (v primeru $b \geq 2\sqrt{ac}$) : $t < \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$

V ostalih primerih je ustrezna vrsta konvergentna.

Recimo, da aproksimiramo (po katerikoli metodi) dano rast za relativno majhne t s polinomom, ki izhaja iz točke $(0,0)$:

$$r(t) \approx At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + \dots \quad (103)$$

Potem si lahko mislimo, da je ta polinom začetek Taylorjeve vrste za Prodanovo funkcijo, katere koeficiente izračunamo po naslednjih formulah:

za $A \neq 0$ je

$$a = 0, b = 1/A, c = -B/A^2 \quad (104)$$

za $A = 0, B \neq 0$ je

$$a = 1/B, b = -C/B^2, c = (C^2 - BD)/B^3 \quad (105)$$

7. PRIMER

Tipa I in J daleč največkrat nastopata v praksi, zato si ju oglejmo na primeru. Pri vsakem izračunu bomo dodali na skrajni desni številko formule, ki je bila uporabljena. Števila na koncu računanja po presoji zaokrožimo, pri rasti dreves običajno takole: čase t na 1 decimalko, vrednosti $r(t)$ na 2 decimalki, vrednosti $\rho(t)$, $\bar{p}(t)$ in $p^*(t)$ na 3 decimalke ter vrednosti $q(t)$ na 4 decimalke.

Imejmo podano tabelo meritev neke rasti:

x	8	18	28	42	52	64	84	97	107
y	0.3	1.3	5.3	9.3	13.3	17.3	21.3	23.3	25.3

x	117	130
y	26.6	27.8

Tabela 3

Opomba. To je tabela višinske rasti smreke (*Picea excelsa*). x je starost v letih in y višina v metrih. Tabela je dobljena z interpolacijo in ekstrapolacijo letnic na nekaj presekih debla (V. Puhek).

Tabele ni treba spreminjati v smislu točk (a) — (c) na strani 23, ker domnevamo iz tabele, da rast še ni zaključena (oziroma $S > 130$ in $V > 27.8$). Zato: $s = n = 11$. Vseeno pa bomo pri aproksimaciji uporabljali t_k za x_k in r_k za y_k .

(A) Denimo, da meritve v začetku rasti niso natančne in da želimo čim natančnejšo aproksimacijo ob koncu rasti. Zaradi prve predpostavke bomo uporabili normalni sistem (95), glede na drugo predpostavko pa bomo vzeli $m = 0$

$$\sum_k r_k^2 = 3.70961 \cdot 10^3$$

$$\sum_k r_k^2 t_k^4 = 5.14473 \cdot 10^{11}$$

$$\sum_k r_k^2 t_k = 3.75317 \cdot 10^5$$

$$\sum_k r_k t_k^2 = 1.62095 \cdot 10^6$$

$$\sum_k r_k^2 t_k^2 = 4.02638 \cdot 10^7$$

$$\sum_k r_k t_k^3 = 1.75781 \cdot 10^8$$

$$\sum_k r_k^2 t_k^3 = 4.49005 \cdot 10^9$$

$$\sum_k r_k t_k^4 = 1.97838 \cdot 10^{10}$$

V normalnem sistemu delimo prvo enačbo z 10^3 , drugo z 10^5 in tretjo z 10^7 .

$$3.70961 a + 375.317 b + 40263.8 c = 1620.95$$

$$3.75317 a + 402.638 b + 44900.5 c = 1757.81$$

$$4.02638 a + 449.005 b + 51447.3 c = 1978.38$$

Iz sistema dobimo: $a = 123.009$

$$b = 0.16432$$

$$c = 0.0273934$$

in od tod teoretične $y_k(\text{teor.}) = r(x_k)$:

x_k	$r(x_k)$	$r(x_k) - y_k$
8	0·51	0·2
18	2·40	1·1
28	5·26	-0·0
42	9·90	0·6
52	13·15	-0·2
64	16·67	-0·6
84	21·38	0·1
97	23·72	0·4
107	25·21	-0·1
117	26·47	-0·1
130	27·83	0·0

Tabela 4

Izračunajmo stopnjo prilagoditve.

$$\sum y_k = 171 \cdot 100$$

$$\sum r(x_k) = 172 \cdot 480$$

$$\sum y_k^2 = 3709 \cdot 61$$

$$\sum r(x_k)^2 = 3712 \cdot 11$$

$$\sum y_k r(x_k) = 3709 \cdot 74$$

Po formuli (89) je stopnja prilagoditve $k = 0 \cdot 9992$. k je zelo blizu 1, kar pomeni, da je prilagoditev zelo dobra.

Sedaj, ko je aproksimacija za nami, analizirajmo rast. Očitno gre za tip J . Manjka nam še en podatek, konec rasti S ali končna velikost V , pri čemer moramo upoštevati, da je zgornja meja za V :

$$V < 1/c = 36 \cdot 51$$

Recimo, da smo iz nekih razlogov postavili: $S = 200$. Potem sledijo naslednji rezultati:

$$V = 31 \cdot 96$$

(formula 16)

$$A = 10 \cdot 9$$

(f. 41)

$$T = 22 \cdot 5$$

(f. 45)

$$\rho = -0 \cdot 99599$$

(f. 81)

$P = 38.4$	(f. 83)
$B = 67.0$	(f. 38)
$D = \bar{p}(T) = p^*(T) = \bar{p}(S) = p^*(0) = 0.160$	(f. 32, 50)
$r(A) = 0.92$	(f. 17)
$r(T) = 3.59$	(f. 49)
$r(P) = 8.68$	(f. 17)
$\rho(B) = \bar{\rho}(B) = 0.261$	(f. 54)
$r(B) = 17.47$	(f. 53)
$\bar{\rho}(A) = 0.085$	(f. 7)
$p^*(B) = 0.109$	(f. 8)
$p(A) = p^*(A) = 0.164$	(f. 8)
$p(T) = 0.284$	(f. 51)
$p(P) = 0.336$	(f. 20)
$2 p(S) = \lim_{t \nearrow S} p(t) = \lim_{t \nearrow S} p^*(t) = 0.036$	(f. 22)
$\lim_{t \searrow 0} q(t) = 0.0163$	(f. 27)
$\lim_{t \nearrow S} q(t) = -0.0004$	(f. 28)
$q(A) = 0.0133$	(f. 24)
$q(T) = 0.0072$	(f. 52)
$q(B) = 0.0037$	(f. 55)

Faze: $[0, A)$ inicialna faza (dolžina faze 10.9)

$[A, B]$ optimalna faza (dolžina 56.2)

$(B, S]$ terminalna faza (dolžina 133.0)

Slika 9 ustreza temu primeru.

(B) y_k oziroma r_k so pozitivni, vzemimo še, da so vsi dovolj daleč od 0; potem lahko uporabimo normalni sistem (99). Tudi tokrat se bomo odločili za $m = 0$ in sicer zato, ker tedaj lahko uporabimo računalniški programski paket SPSS. Natančnost prilagoditve bo po Slikah 23 in 24 najboljša v začetku in na koncu rasti, najslabša pa okoli točke zrelosti B.

$$\sum t_k = 7.47000.10^2$$

$$\sum t_k^2 / r_k = 3.55039.10^3$$

$$\sum t_k^2 = 6.82390.10^4$$

$$\sum t_k^3 / r_k = 2.98683.10^5$$

$$\sum t_k^3 = 7.03417.10^6$$

$$\sum t_k^4 / r_k = 3.07009.10^7$$

$$\sum t_k^4 = 7.70319.10^8$$

V normalnem sistemu delimo drugo enačbo z 10^2 in tretjo z 10^4 .

$$\begin{aligned} 11 \quad a + 747.000 b + 68239.0 c &= 3550.39 \\ 7.47000 a + 682.390 b + 70341.7 c &= 2986.86 \\ 6.82390 a + 703.417 b + 77031.9 c &= 3070.09 \end{aligned}$$

Iz sistema dobimo: $a = 234.454$
 $b = -2.67192$
 $c = 0.0434842$

x_k	$r(x_k)$	$r(x_k) - y_k$
8	0.30	-0.0
18	1.62	0.3
28	4.05	-1.3
42	8.87	-0.4
52	12.69	-0.6
64	16.96	-0.3
84	22.27	1.0
97	24.48	1.1
107	25.65	0.3
117	26.47	-0.1
130	27.17	-0.6

Tabela 5

Izračunajmo stopnjo prilagoditve!

$$\sum y_k = 171.100 \quad \sum r(x_k) = 170.509$$

$$\sum y_k^2 = 3709.61 \quad \sum r(x_k)^2 = 3738.09$$

$$\sum y_k r(x_k) = 3721.25$$

Po formuli (89) je: $k = 0.9978$

Analizirajmo rast! Tokrat se je izkazalo, da gre za rast tipa I. Manjkajoči podatek S oziroma V bomo pa nadoknadili kar z največjim možnim S:

$S = 175.5$	(formula 57)
$V = 27.88$	(f. 58)
$\varphi = 0.64987$	(f. 62)
$A = C = 16.1$	(f. 64)
$T = 30.7$	(f. 67)
$P = 46.7$	(f. 61)
$B = 73.4$	(f. 38)
$r(A) = 1.28$	(f. 68)
$r(T) = 4.88$	(f. 70)
$r(P) = 10.68$	(f. 17)
$r(B) = 19.77$	(f. 69)
$D = \bar{p}(T) = p^*(T) = \bar{p}(S) = p^*(O) = 0.159$	(f. 32)
$\bar{p}(A) = p^*(B) = 0.079$	(f. 74)
$\rho(A) = p^*(A) = 0.167$	(f. 71)
$\rho(T) = 0.318$	(f. 73)
$\rho(P) = 0.384$	(f. 59)
$\rho(B) = \bar{p}(B) = 0.269$	(f. 72)
$Q = 0.00313$	(f. 75)
$\lim_{t \searrow 0} q(t) = 0.0085$	(f. 76)
$t \searrow 0$	
$\lim_{t \nearrow S} q(t) = 0.0004$	(f. 77)
$t \nearrow S$	
$q(A) = 0.0114$	(f. 78)
$q(T) = 0.0081$	(f. 80)
$q(B) = 0.0063$	(f. 79)

Faze: $[0, A]$ inicialna faza (dolžina faze 16.1)
 $[A, B]$ optimalna faza (dolžina 57.3)
 $(B, S]$ terminalna faza (dolžina 102.1)

Sliki 7 in 8 ustrezata temu primeru.

V obeh primerih so primerljivi le podatki, ki so neodvisni od izbire točke S . To so: $P, B, r(P), r(B), \rho(P), \rho(B), q(B)$ in $\lim_{t \searrow 0} q(t)$.

Samo dejstvo, da smo dobili na dva načina z istimi podatki tako različne rezultate, kaže, kako pomembna je odločitev glede načina aproksimacije in izbire vrednosti S ter V . Proti nevarnosti subjektivnega odločanja pa se lahko borimo na znan način: z mnogimi in natančnimi meritvami.

DODATEK

Realne rešitve enačbe

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

$$x \neq 0$$

Če je:

$$z = -\beta / (3\alpha)$$

$$P = \gamma / (3\alpha) - z^2$$

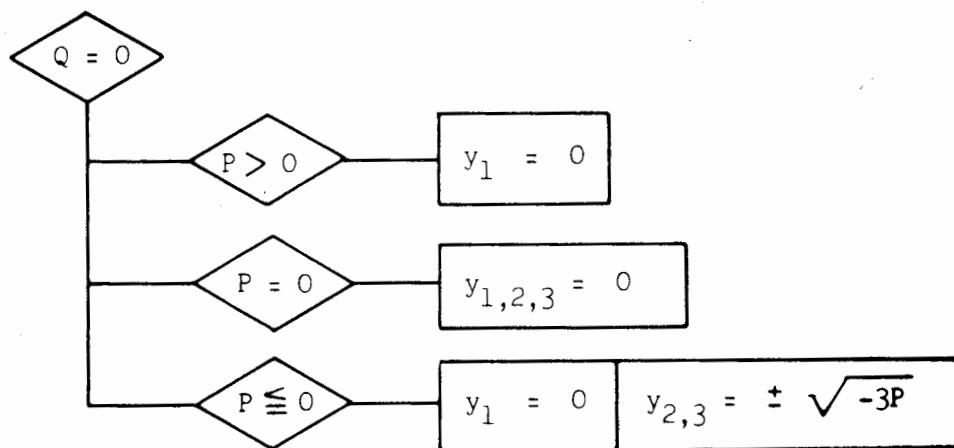
$$Q = z^3 - (\gamma z + \delta) / (2\alpha)$$

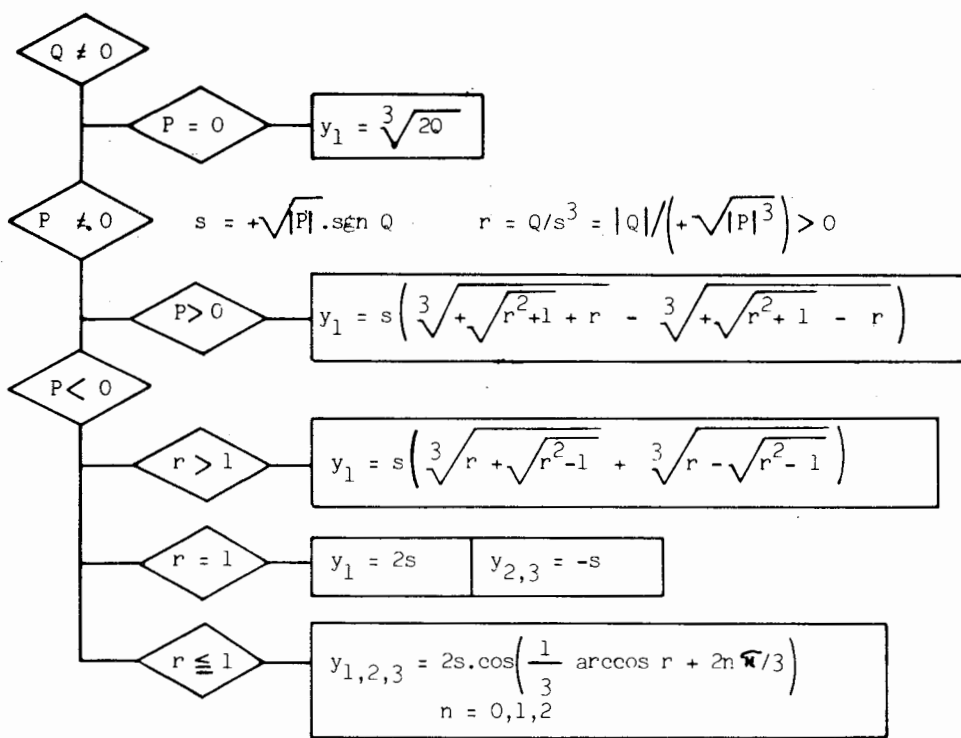
potem:

$$x = y + z$$

kjer je y rešitev enačbe $y^3 + 3Py - 2Q = 0$.

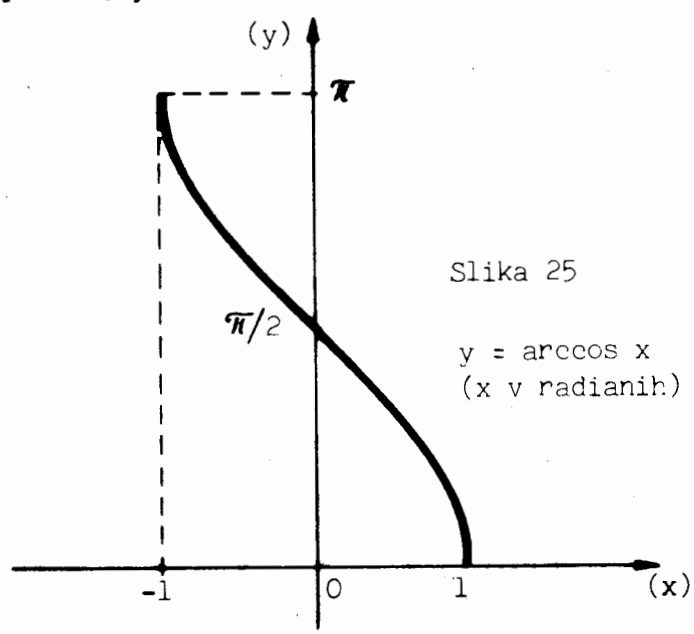
Za $Q^2 + P^3 > 0$ je samo ena rešitev realna, za $Q^2 + P^3 \leq 0$ pa so vse rešitve realne.





$$\text{sgn } u = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases}$$

$$u = |u| \cdot \text{sgn } u$$



SUMMARY

We define the growth function as a function increasing from 0 to some positive V, between two points, the beginning and the end of certain growth. Besides we demand that this function is an integral of a so called current increment function.

In the article we analyse the growth function which is defined by Prodan function $r = t^2/(a + bt + ct^2)$ and which is very frequently used for approximation of tree growth.

In paragraph 1 and 2 we define the main objekts of such growth. In paragraph 3 there is a list of different types of Prodan growth, considering the values of coefficients a, b, c. These types, the growth function together with its first and second derivative, are graphically shown in paragraph 4. In the 5th and 7th paragraph some different ways of approximation of Prodan function to numerical data, by the least squares method, are given.

This article is intended to be a collection of formulas, so we omitted calculations and proofs.

LITERATURA

1. **Cedilnik A.:** O rastnih funkcijah, Zb. gozdarstva in lesarstva, 17 (1979), no. 2, 351-392.
2. **Prodan M.:** Forstliche Biometrie, München, BLV Verlagsgesellschaft 1961.
3. **Stamenković V.:** Prirast i proizvodnost stabala i šumskih sastojina, Univerzitet u Beogradu 1974