



dr. Peter Kočman, mag. inž. teh. var.

peter.kocman@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo,
Jamova cesta 2, 1000 Ljubljana



Znanstveni članek
UDK/UDC: 519.673.539.3

VPLIV ORIENTACIJE ROBNIH POGOJEV NA VELIKOST UKLONSKIH SIL HOMOGENIH ELASTIČNIH STEBROV

INFLUENCE OF THE END-SUPPORTS ORIENTATION ON MAGNITUDE OF THE BUCKLING LOAD OF HOMOGENEOUS ELASTIC COLUMNS

Povzetek

V članku je predstavljen analitični postopek za določitev velikosti uklonskih sil homogenih elastičnih stebrov. Novost predstavljenega postopka je v tem, da omogoča uklonsko analizo tudi za stebre, ki niso podprti v smereh glavnih vztrajnostnih osi prečnega prereza. Simo-Reissnerjev model prostorskega nosilca je uporabljen kot matematični model stebra. Tako je za določitev velikosti uklonskih sil stebrov poleg upogibnih deformacij upoštevan tudi vpliv osnih in strižnih deformacij. Postopek za določitev velikosti uklonskih sil stebrov pa je zasnovan na izsledkih Kellerja. Ta je dognal, da so kritične točke nelinearnega sistema navadnih diferencialnih enačb identične kritičnim točkam pripadajočega lineariziranega sistema diferencialnih enačb. Ker pa predstavljajo kritične točke Simo-Reissnerjevega matematičnega modela stebra uklonske sile stebra, so s predstavljenim analitičnim postopkom velikosti uklonskih sil elastičnih stebrov točno določene. Uporabnost predstavljenega postopka je v članku predstavljena s parametrično študijo vpliva orientacije robnih pogojev na velikosti uklonskih sil elastičnih homogenih stebrov. Ugotovljeno je bilo, da orientacija robnih pogojev bistveno vpliva na velikosti uklonskih sil stebrov. So pa te vedno večje od dobro znanih Eulerjevih uklonskih sil stebrov.

Ključne besede: uklon stebrov, Simo-Reissnerjev model prostorskih nosilcev, elastičnost

Summary

This article presents an analytical procedure for determining the magnitudes of the buckling loads of homogeneous elastic columns. The novelty of the proposed procedure lies in its ability to perform buckling analysis also for columns with supports not aligned with the principal axes of inertia of the cross-section. The Simo-Reissner spatial beam model is used as the mathematical model of the column. In addition to bending deformations, the influence of axial and shear deformations is therefore also taken into account when determining the buckling loads of the columns. The procedure for determining the buckling loads is based on Keller's findings, which state that the critical points of a nonlinear system of ordinary differential equations are identical those of the corresponding linearized system. Since the critical points of the Simo-Reissner mathematical model correspond to the buckling loads of the column, the presented analytical procedure enables the exact determination of the buckling loads of elastic columns. The applicability of the proposed procedure is demonstrated by a parametric study of how the orientation of boundary conditions affects the magnitudes of the buckling loads of homogeneous elastic columns. It was found that the orientation of the boundary conditions significantly affects the magnitudes of the column buckling loads. However, these loads are always greater than the well-known Euler buckling loads of columns.

Key words: buckling, Simo-Reissner beam model, elasticity

1 UVOD

Stebri so eni najpomembnejših konstrukcijskih elementov gradbenih konstrukcij. Pogosto je porušitev gradbene konstrukcije kot celote posledica izčrpane nosilnosti stebrov. Zato je razumljivo veliko zanimanje strokovnjakov in znanstvenikov za pojave, povezane z nosilnostjo stebrov. Steber lahko doseže svojo nosilnost na dva prevladujoča načina. Pri prvem, ki ga opazimo predvsem pri čokatih stebrih, je nosilnost povezana predvsem z njegovimi materialnimi lastnostmi. Nosilnost steber doseže, ko obremenitev stebra preseže trdnost materiala. Pri drugem načinu pa nosilnost stebra določajo predvsem njegove geometrijske lastnosti. Tovrstni nosilnosti stebrov pogosto pravimo uklonska nosilnost, tlačni sili, ki povzroči uklon stebra, pa uklonska sila.

Začetek uklonske analize stebrov povezujemo z Eulerjem. Ta je izpeljal eksplicitne izraze za določitev velikosti uklonskih sil stebrov v odvisnosti od tipa robnih pogojev. Zato danes te uklonske sile stebrov imenujemo Eulerjeve uklonske sile. Vendar kasnejši eksperimenti niso v celoti potrdili pravilnosti izrazov za Eulerjeve uklonske sile stebrov. Neskladje med eksperimentalnimi in teoretičnimi rezultati je bila posledica vpliva geometrijskih in materialnih nepopolnosti stebrov in tudi nepopolne centriranosti zunanje točkovne sile. Kljub zahtevnosti je analiza uklonske nosilnosti stebrov dobro razvita (glej na primer [Wang, 2004] ali [Timoshenko, 1961]). Zato jo večina sodobnih pravilnikov za projektiranje gradbenih konstrukcij priporoča za dokaz uklonske nosilnosti stebrov, glej na primer SIST EN 1992-1-1:2005 [SIST, 2005], FprEN 1992-1-1:2022 [CEN, 2022] ali FprCEN/TR 1993-1-102:2026 [CEN, 2026].

Čeprav se zdi, da je uklon stebrov v celoti raziskan, bomo v tem članku pokazali, da to ni res. Neraziskana je ostala analiza uklonske nosilnosti za prostorske stebre, pri katerih je orientacija robnih pogojev stebrov različna od smeri, ki jih določajo glavne vztrajnostne osi prečnega prereza stebrov. V tem članku bomo prikazali nov analitični postopek za določitev velikosti uklonskih sil tovrstnih homogenih elastičnih stebrov. Poleg tega je novost predstavljenega postopka tudi to, da bomo velikosti uklonskih sil stebrov določili tudi z upoštevanjem strižnih deformacij. Zaradi teh novosti bomo izpeljane uklonske sile stebrov imenovali posplošene Eulerjeve uklonske sile.

Članek ima poleg uvoda še tri poglavja. V drugem poglavju predstavimo osnovne enačbe v materialni obliki Simo-Reissnerjevega modela prostorskega nosilca. Nov analitični postopek za določitev velikosti uklonskih sil homogenih elastičnih stebrov predstavimo v tretjem poglavju. S parametrično študijo v četrtem poglavju predstavimo vpliv orientacije robnih pogojev in strižnih deformacij na uklonsko nosilnost stebrov. V zadnjem poglavju v zgoščeni obliki predstavimo bistvene ugotovitve članka.

2 OSNOVNE ENAČBE

Geometrijske spremembe prostorskih elastičnih stebrov in s tem povezano določanje velikosti Eulerjevih uklonskih sil stebrov merimo v točkovnem evklidskem prostoru. Opazovališče inercialnega oziroma globalnega desnosučnega kartezijevega koordinatnega sistema označimo z 0, pripadajoče koordinatne osi z x_1, x_2, x_3 , enotske in med seboj pravokotne in desno orientirane bazne vektorje pa z $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$.

Trenutna lega stebra je v Simo-Reissnerjevem modelu določena s težiščno osjo in družino ravnih prečnih prereзов, ki so "pripeti" na težiščno os [Simo, 1985]. Težiščna os stebra je prostorska krivulja, ki jo označimo z $\mathbf{r}_T(x)$, družino prečnih prereзов stebra pa opišemo z vektorjem normale $\mathbf{e}_n(x)$. Parameter težiščne osi x identificiramo s koordinatno osjo x lokalnega krivočrtnega koordinatnega sistema x, y, z . S Simo-Reissnerjevim modelom upoštevamo v analizi tudi strižno deformiranje stebrov, zato vektor normale $\mathbf{e}_n(x)$ ni enak tangentnemu vektorju težiščne osi stebra $\mathbf{e}_t(x)$. Ko označimo lego poljubnega delca prečnega prereza glede na težišče prečnega prereza z vektorjem $\boldsymbol{\rho}(x, y, z)$, je trenutna lega poljubnega delca stebra določena s krajevnim vektorjem

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + x_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + x_3(x, y, z)\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}_T(x) + \boldsymbol{\rho}(x, y, z) = \mathbf{r}_T(x) + y\mathbf{e}_y(x) + z\mathbf{e}_z(x). \quad (1)$$

V enačbi (1) vektorja $\mathbf{e}_y$ in $\mathbf{e}_z$ ležita v deformirani ravnini prečnega prereza, sta enotska in med seboj pravokotna. Tako skupaj z vektorjem normale $\mathbf{e}_n(x)$ tvorita med seboj pravokotni in desno orientiran triob v točkovnem evklidskem prostoru, torej $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_y$.

V začetni legi je težiščna os opazovanega stebra premica, prečni prerezi pa so nanjo pravokotni. Vektor normale prečnega prereza tudi sedaj označimo z $\mathbf{E}_n$, sedaj pa je $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_x$, kjer smo z $\mathbf{E}_x$ označili enotski tangentni vektor težiščne osi stebra. Tudi v začetni legi izberemo lokalni koordinatni sistem z x, y, z . Pripadajoče bazne vektorje lokalnega koordinatnega sistema označimo z $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$ in $\mathbf{E}_z = \mathbf{E}_x \times \mathbf{E}_y$. Začetno lego poljubnega delca stebra določa krajevni vektor

$$\mathbf{R}(x, y, z) = x_1^0(x, y, z)\mathbf{e}_1 + x_2^0(x, y, z)\mathbf{e}_2 + x_3^0(x, y, z)\mathbf{e}_3 = \mathbf{R}_T(x) + \boldsymbol{\rho}_0(x, y, z) = \mathbf{R}_T(x) + y\mathbf{E}_y + z\mathbf{E}_z, \quad (2)$$

kjer smo z $\boldsymbol{\rho}_0(x, y, z)$, podobno kot v trenutni legi, označili relativno lego poljubnega delca prečnega prereza glede na težišče prečnega prereza, z $\mathbf{R}_T(x)$ pa težiščno os stebra v začetni legi.

Lokalna koordinatna sistema smo v začetni in trenutni legi stebra izbrali tako, da koordinate x, y, z določajo isti delec v začetni in trenutni legi stebra. Brez izgube na splošnosti pa smo izbrali tudi $\mathbf{E}_x = \mathbf{e}_1, \mathbf{E}_y = \mathbf{e}_2, \mathbf{E}_z = \mathbf{e}_3$.

Deformacijsko preslikavo stebra opišemo z vektorjem pomikov težiščne osi

$$\mathbf{u}_T(x) = \mathbf{r}_T(x) - \mathbf{R}_T(x) = u_1(x)\mathbf{e}_1 + u_2(x)\mathbf{e}_2 + u_3(x)\mathbf{e}_3 \quad (3)$$

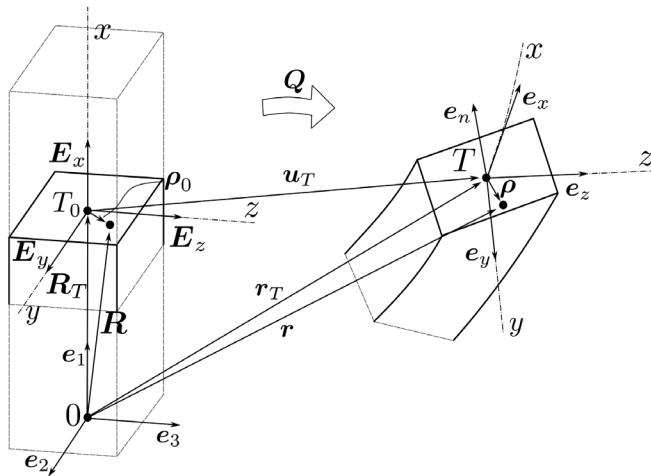
in rotacijskim tenzorjem $\mathbf{Q}(x)$ ($\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\det \mathbf{Q} = 1$). Rotacijski tenzor preslika bazne vektorje $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ s prijemališčem pri $\mathbf{R}_T(x)$ v vektorje $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ s prijemališčem pri $\mathbf{r}_T(x)$, torej $\mathbf{e}_n(x) = \mathbf{Q}(x)\mathbf{E}_n, \mathbf{e}_y(x) = \mathbf{Q}(x)\mathbf{E}_y$ in $\mathbf{e}_z(x) = \mathbf{Q}(x)\mathbf{E}_z$ [Simo, 1985]. S poljem pomikov $\mathbf{u}_T(x)$ in z rotacijskim tenzorjem $\mathbf{Q}(x)$ izrazimo trenutno lego stebra z enačbo (slika 1)

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{R}_T(x) + \mathbf{u}_T(x) + y\mathbf{Q}(x)\mathbf{E}_y + z\mathbf{Q}(x)\mathbf{E}_z. \quad (4)$$

Ravnotežne, kinematične in konstitucijske enačbe s pripadajočimi robnimi pogoji so za Simo-Reissnerjev model nosilca oziroma stebra dobro znane [Simo, 1985]. Predstavimo jih v materialni obliki in so:

$$x \in (0, L) \\ \boldsymbol{\Gamma}(x) = \mathbf{Q}^T(x)\mathbf{r}'_T(x) - \mathbf{E}_x, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{K}}(x) = \mathbf{Q}^T(x)\mathbf{Q}'(x), \quad \hat{\mathbf{K}}(x)\mathbf{K}(x) = \mathbf{0}, \quad (6)$$



Slika 1. Deformacijska preslikava stebra je določena z vektorjem pomikov $\mathbf{u}_T(x)$ in rotacijskim tenzorjem $\mathbf{Q}(x)$

$$\mathbf{N}'_x(x) + \mathbf{K}(x) \times \mathbf{N}_x(x) + \mathbf{P}(x) = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$\mathbf{M}'_x(x) + \mathbf{K}(x) \times \mathbf{M}_x(x) + (\mathbf{Q}^T(x) \mathbf{r}'_T(x)) \times \mathbf{N}_x(x) + \mathbf{M}(x) = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$\mathbf{N}_x(x) = \mathbb{C}_{FF} \mathbf{F}(x), \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_x(x) = \mathbb{C}_{KK} \mathbf{K}(x), \quad (10)$$

kjer sta materialna operatorja prečnega prereza stebra $\mathbb{C}_{FF}$ in $\mathbb{C}_{KK}$ določeni z matrikama

$$\mathbb{C}_{FF} = \begin{bmatrix} EA_x & 0 & 0 \\ 0 & GA_s & 0 \\ 0 & 0 & GA_s \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbb{C}_{KK} = \begin{bmatrix} GI_x & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & EI_{yz} \\ 0 & EI_{yz} & EI_z \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Poudarimo pa, da smo v matriki $\mathbb{C}_{KK}$ upoštevali, da v splošnem lokalni koordinati y in z nista glavni vztrajnostni osi prečnega prereza.

V enačbah (5)–(12) označuje L začetno dolžino stebra, $\mathbf{F}$ in $\hat{\mathbf{K}}$ (k poševno simetričnemu tenzorju $\hat{\mathbf{K}}$ smo dualni vektor označili s $\mathbf{K}$) sta deformacijski meri stebra, $\mathbf{N}_x$ in $\mathbf{M}_x$ sta vektorja notranjih sil in momentov stebra ter $\mathbf{P}$ in $\mathbf{M}$ vektorja zunanje linijske in linijske momentne obtežbe. Skalarne količine v matrikah (11) in (12) predstavljajo dobro poznane materialne in geometrijske karakteristike stebra, in sicer: E in G sta elastični in strižni modul, A_x je ploščina prečnega prereza, A_s je reducirana strižna ploščina prečnega prereza (glej npr. [Timoshenko, 1961] ali [Cowper, 1966]), I_x je polarni vztrajnostni moment, I_{yz} deviacijski vztrajnostni moment, I_y in I_z pa sta vztrajnostna momenta glede na koordinatni osi y in z prečnega prereza stebra.

Sistem posplošenih ravnotežnih enačb stebra, kot enačbe (5)–(12) v nadaljevanju imenujemo, sestavljajo navadne diferencialne in algebrske enačbe. Robne pogoje k diferencialnim enačbam pa sestavljajo tako kinematični kot statični pogoji na robovih stebra. Ti so med seboj vzajemni, torej velja, da tam, kjer so predpisani kinematični robni pogoji, ni statičnih. Robni pogoji stebra v splošni obliki so:

pri $x=0$

$$\mathbf{u}_T(0) = \mathbf{u}_0, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (14)$$

$$\mathbf{N}_x(0) - \mathbf{Q}^T(0) \mathbf{F}_0 = \mathbf{0}, \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_x(0) - \mathbf{Q}^T(0) \mathbf{M}_0 = \mathbf{0} \quad (16)$$

in pri $x=L$

$$\mathbf{u}_T(L) = \mathbf{u}_L, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(L) = \boldsymbol{\varphi}_L, \quad (18)$$

$$\mathbf{N}_x(L) + \mathbf{Q}^T(L) \mathbf{F}_L = \mathbf{0}, \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_x(L) + \mathbf{Q}^T(L) \mathbf{M}_L = \mathbf{0}, \quad (20)$$

kjer smo rotacijski tenzor $\mathbf{Q}$ parametrizirali z rotacijskim vektorjem $\boldsymbol{\varphi}(x) = \varphi_1(x) \mathbf{e}_1 + \varphi_2(x) \mathbf{e}_2 + \varphi_3(x) \mathbf{e}_3$. Kot pa je dobro znano, govorimo o uklonu stebra v primeru, ko je stebel obtežen le s točkovno silo $\mathbf{F}_L = -F \mathbf{e}_1$ pri $x=L$ in če je stebel pri $x=L$ pomiknjen v vzdolžni smeri.

3 POSTOPEK ZA DOLOČITEV VELIKOSTI UKLONSKIH SIL STEBROV

Splošna rešitev posplošenih ravnotežnih enačb (5)–(12) s pripadajočimi robnimi pogoji (13)–(20) ni znana. Zato se zdi, da tudi postopek za določitev točnih vrednosti uklonskih sil stebrov ni mogoč. A kot bomo pokazali v nadaljevanju, je mogoč. Omogočajo nam ga dognanja, ki jih je predstavil Keller [Keller, 1970]. Ta je pokazal, da kritične točke nelinearnega sistema diferencialnih enačb sovpadajo s kritičnimi točkami pripadajočega lineariziranega sistema teh enačb. Kritične točke sistema nelinearnih enačb (5)–(20) pa predstavljajo, kot vemo, v našem primeru uklonske sile elastičnega stebra.

Zaradi večje preglednosti predstavimo postopek reševanja za določitev velikosti uklonskih sil stebrov v dveh sklopih. V prvem sklopu najprej določimo primarno ravnotežno lego stebra in nato osnovni sistem enačb (5)–(20) s pripadajočimi robnimi pogoji okoli te lege lineariziramo. V drugem sklopu prikazane postopka za določitev velikosti Eulerjevih uklonskih sil stebrov najprej linearizirani sistem diferencialnih in algebrskih enačb rešimo v eksplicitni obliki. To je tudi glavna novost prikazanega analitičnega postopka za določitev velikosti uklonskih sil stebrov. Nato z rešitvami predstavimo še zadnji del postopka za določitev velikosti uklonskih sil elastičnih stebrov. Tu se osredotočimo predvsem na orientacijo robnih pogojev stebrov. Zanimajo nas predvsem stebri z robnimi pogoji, ki niso predpisani v smereh glavnih vztrajnostnih osi prečnega prereza stebrov.

3.1 Primarna ravnotežna lega in linearizacija

Primarna ravnotežna lega stebra je določena z ravno težiščno osjo stebra in homogenim napetostnim in deformacijskim stanjem. Ker je v primarni ravnotežni legi težiščna os stebra ravna, je deformacijska preslikava določena z izrazoma

$$\mathbf{u}_T(x) = u_1(x) \mathbf{e}_1, \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}(x) = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Zaradi homogenega deformacijskega stanja stebra je

$$\Gamma(x) = \varepsilon_x(x)E_x \rightarrow \varepsilon_x = \text{konst.} < 0, \quad (23)$$

$$K(x) = 0, \quad (24)$$

ter zaradi homogenega napetostnega stanja tudi

$$N_x(x) = N_x(x)E_x \rightarrow N_x = \text{konst.} < 0, \quad (25)$$

$$M_x(x) = 0, \quad (26)$$

kjer je $N_x = -F$ in posledično $\varepsilon_x = -F/(EA_x)$. Vse druge fizikalne količine, razen u_1 , so v primarni ravnotežni legi stebra enake nič.

Podroben postopek linearizacije enačb (5)–(12) s pripadajočimi robnimi pogoji (13)–(20) so v primarni ravnotežni legi stebra predstavili Kočman in sodelavci [Kočman, 2024]. Zato v članku le povzamemo linearizirani sistem posplošenih ravnotežnih enačb v primarni ravnotežni legi. Ko prirastke fizikalnih količin izrazimo s simbolom $\delta(\bullet)$, so te določene z enačbami:

kinematične enačbe

$$\delta\varepsilon_x(x) - \delta u_1'(x) = 0, \quad (27)$$

$$\delta\gamma_y(x) + (1 - F/E_{A_x})\delta\varphi_3(x) - \delta u_2'(x) = 0, \quad (28)$$

$$\delta\gamma_z(x) - (1 - F/E_{A_x})\delta\varphi_2(x) - \delta u_3'(x) = 0, \quad (29)$$

$$\delta\kappa_x(x) - \delta\varphi_1'(x) = 0, \quad (30)$$

$$\delta\kappa_y(x) - \delta\varphi_2'(x) = 0, \quad (31)$$

$$\delta\kappa_z(x) - \delta\varphi_3'(x) = 0. \quad (32)$$

ravnotežne enačbe

$$\delta N_x'(x) = 0, \quad (33)$$

$$\delta Q_y'(x) - F\delta\kappa_z(x) = 0, \quad (34)$$

$$\delta Q_z'(x) + F\delta\kappa_y(x) = 0, \quad (35)$$

$$\delta M_x'(x) = 0, \quad (36)$$

$$\delta M_y'(x) - F\delta\gamma_z(x) - (1 - F/E_{A_x})\delta Q_z(x) = 0, \quad (37)$$

$$\delta M_z'(x) + F\delta\gamma_y(x) + (1 - F/E_{A_x})\delta Q_y(x) = 0. \quad (38)$$

konstitucijske enačbe

$$\delta N_x(x) = EA_x\delta\varepsilon_x(x), \quad (39)$$

$$\delta Q_y(x) = GA_s\delta\gamma_y(x), \quad (40)$$

$$\delta Q_z(x) = GA_s\delta\gamma_z(x), \quad (41)$$

$$\delta M_x(x) = GI_x\delta\kappa_x(x), \quad (42)$$

$$\delta M_y(x) = EI_y\delta\kappa_y(x) + EI_{yz}\delta\kappa_z(x), \quad (43)$$

$$\delta M_z(x) = EI_{yz}\delta\kappa_y(x) + EI_z\delta\kappa_z(x). \quad (44)$$

Linearizirani sistem posplošenih ravnotežnih enačb stebra (27)–(44) sestavlja sistem 18 diferencialnih in algebrskih enačb za prav toliko neznanih fizikalnih količin. Med njimi je dvanajst navadnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti. Splošna rešitev teh enačb je določena z dvanajstimi konstantami, katere določimo s pomočjo lineariziranih statičnih oziroma kinematičnih robnih pogojev.

3.2 Reševanje linearnega sistema diferencialnih enačb

Reševanje lineariziranih posplošenih ravnotežnih enačb stebra je osrednja novost, ki jo predstavljamo v tem članku. Zato v nadaljevanju to reševanje detajlno predstavimo. Kot rečeno, sestavlja linearizirani posplošeni sistem ravnotežnih enačb dvanajst medsebojno povezanih navadnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti. Metode za reševanje takšnega sistema enačb so v literaturi dobro znane [Kreyszig, 1972]. Kljub temu pa postopek za določitev rešitve v eksplicitni obliki ni samoumeven. S tem namenom sledimo pristopu, pri katerem povezan sistem diferencialnih enačb prvega reda nadomestimo z nepovezanim sistemom diferencialnih enačb višjega reda.

Ob upoštevanju enačb (27) in (39) zapišemo enačbo (33) v naslednji obliki

$$EA_x\delta u_1'' = 0, \quad (45)$$

podobno z upoštevanjem enačb (30) in (42) zapišemo tudi enačbo (36) v obliki

$$GI_x\delta\varphi_1'' = 0. \quad (46)$$

Kot vidimo, sta diferencialni enačbi drugega reda (45) in (46) med seboj neodvisni in tudi neodvisni od preostalih diferencialnih enačb. V nadaljevanju enačbo (37) preoblikujemo z upoštevanjem enačb (35), (41) in (43). Po kratkem računu dobimo

$$\delta\kappa_y'' + U_y\delta\kappa_z'' + F^a/EI_y\delta\kappa_y = 0, \quad (47)$$

kjer smo zaradi večje preglednosti izraza vpeljali naslednji konstanti

$$U_y = \frac{I_{yz}}{I_y} \quad \text{in} \quad a = \frac{F}{GA_s} + (1 - \frac{F}{EA_x}). \quad (48)$$

Podobno preoblikujemo s pomočjo enačb (34), (40) in (44) tudi enačbo (38), dobimo:

$$U_z\delta\kappa_y'' + \delta\kappa_z'' + F^a/EI_z\delta\kappa_z = 0. \quad (49)$$

Z uporabo enačb (28), (32), (34), (40) in (47) dobimo eksplicitne zveze med komponento pomika δu_2 in deformacijo $\delta\kappa_z$ oziroma zasukom $\delta\varphi_3$:

$$a\delta\kappa_z = \delta u_2'', \quad (50)$$

$$a\delta\varphi_3 = \delta u_2'. \quad (51)$$

Podobno dobimo tudi z uporabo enačb (29), (31), (35), (41) in (49), eksplicitne zveze med δu_3 in $\delta\kappa_y$ oziroma $\delta\varphi_2$:

$$a\delta\kappa_y = -\delta u_3'', \quad (52)$$

$$a\delta\varphi_2 = \delta u_3'. \quad (53)$$

Ko vstavimo enačbi (50) in (52) v enačbi (47) in (49), dobimo

$$\delta u_3'''' - U_y\delta u_2'''' + k_y^2\delta u_3'' = 0, \quad (54)$$

$$\delta u_2'''' - U_z\delta u_3'''' + k_z^2\delta u_2'' = 0, \quad (55)$$

kjer smo s k_y in k_z označili standardna uklonska koeficienta. Določena sta z enačbama

$$k_y^2 = F^a/EI_y > 0, \quad (56)$$

$$k_z^2 = F^a/EI_z > 0. \quad (57)$$

Diferencialni enačbi (54) in (55) sta še vedno povezani, nepovezani sta le, če je $I_{yz}=0$. Ker pa je naš cilj tvoriti nepovezan sistem diferencialnih enačb tudi v primeru, ko $I_{yz} \neq 0$, moramo postopek ločevanja enačb nadaljevati. Ko enačbi (54) in (55) še dvakrat odvajamo po x , dobimo

$$\delta u_2^{(6)} + c^2 \delta u_2^{(4)} + b^2 \delta u_2'' = 0, \quad (58)$$

$$\delta u_3^{(6)} + c^2 \delta u_3^{(4)} + b^2 \delta u_3'' = 0, \quad (59)$$

kjer smo vpeljali dve novi konstanti

$$c^2 = \frac{(k_y^2 + k_z^2)}{(1 - U_y U_z)}, \quad (60)$$

$$b^2 = \frac{(k_y^2 k_z^2)}{(1 - U_y U_z)}. \quad (61)$$

Ker velja

$$0 < 1 - U_y U_z = \frac{(I_y I_z - I_{yz}^2)}{I_y I_z} \leq 1, \quad (62)$$

sta tudi c^2 in b^2 pozitivni realni števili, kar smo poudarili z zapisom v obliki kvadrata. Enačbi (58) in (59) pa sta že nepovezani.

Tako smo linearizirani sistem posplošenih ravnotežnih enačb (27)–(44) nadomestili z nepovezanim sistemom diferencialnih enačb višjega reda, z enačbami (45), (46), (58) in (59). Enačba (45) določa komponento pomika v vzdolžni smeri stebra, enačba (46) torzijski zasuk stebra. Le enačbi (58) in (59) določata komponenti pomikov stebra, povezanih z upogibom in s tem tudi z uklonom stebra. Zato se v nadaljevanju posvetimo reševanju teh dveh enačb.

Enačbi (58) in (59) sta po obliki popolnoma enaki in sedaj tudi nepovezani. Zato je tudi postopek reševanja obeh enačb popolnoma enak. Ko rešimo eno izmed njiju, poznamo rešitev druge. Eksponentna funkcija e^{px} je rešitev diferencialne enačbe (58) ali (59), če je p ničla karakterističnega polinoma [Kreyszig, 1972]

$$p^6 + c^2 p^4 + b^2 p^2 = p^2(p^4 + c^2 p^2 + b^2) = 0. \quad (63)$$

Prva ničla polinoma (63) je dvakratna, torej $p_1=0$ in $p_2=0$, pripadajoči partikularni rešitvi pa sta $e^{0x}=1$ in $x e^{0x}=x$. Tako smo določitev ničel karakterističnega polinoma prevedli na določitev ničel polinoma četrte stopnje. Njegove ničle pa določimo tako, da polinom četrte stopnje s substitucijo $r=p^2$ prevedemo na polinom druge stopnje. Določitev ničel polinoma drugega reda pa je zelo preprosta. Rešitvi sta:

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}(-c^2 \pm \sqrt{D}). \quad (64)$$

Ker velja $0 < (k_y^2 + k_z^2)^2 \leq D$, to pomeni, da $c^4 > c^4 - 4b^2 = D$ in $c^2 > \sqrt{D}$. Posledično sta vrednosti ničel r_1 in r_2 vedno negativni realni števili in preostale štiri ničle karakterističnega polinoma (63) predstavljajo konjugirano kompleksna števila:

$$r_{3,4} = \pm \sqrt{|r_1|} i = \pm s_y i, \quad (65)$$

$$r_{5,6} = \pm \sqrt{|r_2|} i = \pm s_z i. \quad (66)$$

Preostale štiri partikularne rešitve diferencialne enačbe (58) ali pa enačbe (59) so $e^{s_y i x}$, $e^{-s_y i x}$, $e^{s_z i x}$, $e^{-s_z i x}$. Splošna rešitev diferencialne enačbe (58) oziroma (59) je sestavljena iz vsote partikular-

nih rešitev in je izražena s kompleksnimi koeficienti. Ker pa so robni pogoji realni, rešitvi (58)–(59) s pomočjo Eulerjeve formule preoblikujemo v obliko z realnimi koeficienti:

$$\delta u_2(x) =$$

$$A_z + B_z x + C_z \sin(s_z x) + D_z \cos(s_z x) + E_z \sin(s_y x) + F_z \cos(s_y x), \quad (67)$$

$$\delta u_3(x) =$$

$$A_y + B_y x + C_y \sin(s_y x) + D_y \cos(s_y x) + E_y \sin(s_z x) + F_y \cos(s_z x), \quad (68)$$

kjer so $A_y, B_y, C_y, D_y, E_y, F_y, A_z, B_z, C_z, D_z, E_z, F_z$ sedaj realne integracijske konstante. Rešitvi (67) in (68) diferencialnih enačb (58) in (59) smo izrazili s štirimi dodatnimi integracijskimi konstantami E_z, F_z, E_y, F_y . Zato za njihovo določitev potrebujemo še štiri dodatne robne pogoje. Te predpišemo na robu stebra pri $x=0$ in so:

$$\delta u_2^{(4)} - U_y \delta u_3^{(4)} + k_z^2 \delta u_2'' = 0, \quad (69)$$

$$\delta u_2^{(5)} - U_z \delta u_3^{(5)} + k_z^2 \delta u_2''' = 0, \quad (70)$$

$$\delta u_3^{(4)} - U_y \delta u_2^{(4)} + k_y^2 \delta u_3'' = 0, \quad (71)$$

$$\delta u_3^{(5)} - U_y \delta u_2^{(5)} + k_y^2 \delta u_3''' = 0. \quad (72)$$

Ko z rešitvama (67) in (68) izrazimo dodatne robne pogoje (69)–(72), dobimo za določitev dodatnih štirih integracijskih konstant sistem štirih algebrskih enačb

$$-U_z s_y^4 D_y - U_z s_z^4 F_y + (s_z^4 - k_z^2 s_z^2) D_z + (s_y^4 - k_z^2 s_y^2) F_z = 0, \quad (73)$$

$$-U_z s_y^4 C_y - U_z s_z^4 E_y + (s_z^5 - k_z^2 s_z^3) C_z + (s_y^5 - k_z^2 s_y^3) E_z = 0, \quad (74)$$

$$-U_y s_y^4 D_z - U_y s_z^4 F_z + (s_z^4 - k_y^2 s_z^2) D_y + (s_y^4 - k_y^2 s_y^2) F_y = 0, \quad (75)$$

$$-U_y s_y^4 C_z - U_y s_z^4 E_z + (s_y^5 - k_y^2 s_y^3) C_y + (s_z^5 - k_y^2 s_z^3) E_y = 0. \quad (76)$$

Te v nadaljevanju izrazimo z osnovnimi integracijskimi konstantami:

$$E_y =$$

$$\frac{C_y s_y^3 (s_y^2 - k_y^2)(s_y^2 - k_z^2) - C_z k_z^2 (s_y^2 - s_z^2) s_z^3 U_y - C_y s_y^7 U_y U_z}{s_z^3 (k_z^2 - s_y^2)(s_z^2 - k_y^2) + s_y^5 s_z^5 U_y U_z}, \quad (77)$$

$$F_y =$$

$$\frac{D_y s_2 y (s_y^2 - k_y^2)(s_y^2 - k_z^2) - D_z k_z^2 (s_y^2 - s_z^2) s_z^2 U_y - D_y s_y^6 U_y U_z}{s_z^2 (k_z^2 - s_y^2)(s_z^2 - k_y^2) + s_y^3 s_z^4 U_y U_z}, \quad (78)$$

$$E_z =$$

$$\frac{C_z s_z^3 (s_z^2 - k_y^2)(s_z^2 - k_z^2) + C_y k_z^2 s_y^3 (s_y^2 - s_z^2) U_z - C_z s_z^7 U_y U_z}{s_y^3 (s_y^2 - k_z^2)(k_y^2 - s_z^2) + s_y^5 s_z^5 U_y U_z}, \quad (79)$$

$$F_z =$$

$$\frac{D_z s_z^2 (s_z^2 - k_y^2)(s_z^2 - k_z^2) + D_y k_z^2 s_y^2 (s_y^2 - s_z^2) U_z - D_z s_z^6 U_y U_z}{s_y^2 (s_y^2 - k_z^2)(k_y^2 - s_z^2) + s_y^4 s_z^2 U_y U_z}. \quad (80)$$

Ko sta lokalni koordinati y in z glavni vztrajnostni osi prečnega prereza stebra, je $s_y = k_y$, $s_z = k_z$ in $U_y = U_z = 0$. Ker je tudi $E_y = F_y = 0$ in $E_z = F_z = 0$, se rešitvi enačb (58) in (59) poenostavita v znano obliko, to sta dobro znani enačbi za določitev velikosti uklonskih sil standardnih Eulerjevih stebrov

$$\delta u_2(x) = A_z + B_z x + C_z \sin(k_z x) + D_z \cos(k_z x), \quad (81)$$

$$\delta u_3(x) = A_y + B_y x + C_y \sin(k_y x) + D_y \cos(k_y x). \quad (82)$$

Enačbi (81) in (82) sta rešitvi enačb (54) in (55), saj sta že ti zaradi $U_y = U_z = 0$ nepovezani. Predstavljata pa znani uklonski enačbi.

Zadnji del predstavljenega postopka za točno določitev velikosti Eulerjevih uklonskih sil posplošenih Eulerjevih stebrov je enak, kot ga poznamo pri standardnem postopku. Kljub temu pa ga kratko predstavimo. Kot dobro vemo, z izrazom uklon stebra povemo, da ima steber pri isti obtežbi več ravnotežnih leg. Ena med njimi je primarna, t. i. lega z ravno težiščno osjo, preostale pa so upognjene. Ker pa so vse ravnotežne lege stebra določene z enačbama (67) in (68) oziroma (81) in (82), to pomeni, da so različne ravnotežne lege določene z različnimi integracijskimi konstantami. Ker pa te določimo s pomočjo robnih pogojev, torej s pomočjo homogenega sistema linearnih enačb, pretvorimo postopek za določitev velikosti uklonskih sil stebrov na določitev netrivialnih rešitev homogenega sistema linearnih enačb.

Ko neznane integracijske konstante združimo v vektor $\mathbf{c}$ in homogen sistem linearnih enačb zapišemo v obliki

$$\mathbf{K}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (83)$$

so netrivialne rešitve in s tem velikosti uklonskih sil prostorskih stebrov s pogojem

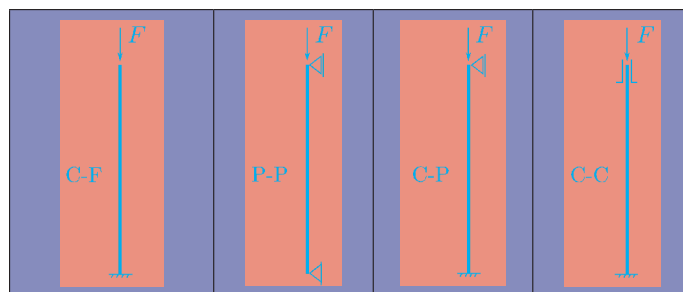
$$\det \mathbf{K} = 0. \quad (84)$$

Ko determinanto izvednotimo, določajo velikosti uklonskih sil prostorskih stebrov rešitev trigonometrične enačbe. Ta ima neskončno rešitev, najmanjšo med njimi pa imenujemo Eulerjeva uklonska sila stebra. Praviloma trigonometrično enačbo (84) rešimo numerično. Bisekcija ali Newton-Raphsonova iteracijska shema sta primerni izbiri.

4 POSPLOŠENE EULERJEVE UKLONKE SILE STEBROV

S predstavljenim analitičnim postopkom analiziramo vpliv robnih pogojev na velikosti uklonskih sil elastičnih homogenih stebrov. Težišče analize so stebri, ki so podprti v smereh, ki niso glavne vztrajnostne osi prečnega prereza. Te stebre v nadaljevanju imenujemo posplošeni Eulerjevi stebri, velikosti uklonskih sil teh stebrov pa posplošene Eulerjeve uklonske sile. Kot izhodišče za predstavitev robnih pogojev obravnavanih stebrov izberemo robne pogoje standardnih Eulerjevih stebrov. Te predstavimo v preglednici 1. Označimo jih s C-F, P-P, C-P in C-C, kjer C pomeni vpeto (ang. clamped), F prosto (ang. free) in P členkasto podporo (ang. pinned). Robni pogoji standardnih Eulerjevih stebrov so lahko predpisani le v glavnih vztrajnostnih oseh prečnih prerezov. V preglednici 1 jih prikazujemo za smeri, ki so določene z ravninama z normalama $\mathbf{e}_2$ in $\mathbf{e}_3$.

Rešitvi diferencialnih enačb (58) in (59) sta enačbi (81) in (82). V teh primerih moramo robne pogoje stebrov izbrati v smereh glavnih vztrajnostnih osi prečnega prereza. Stebri se uklonijo "ravninsko", s tem neodvisno, in v smereh, ki ju določata glavni



Robni pogoji v ravnini z normalo $\mathbf{e}_2$

$\delta u_3(0)=0$	$\delta u_3(0)=0$	$\delta u_3(0)=0$	$\delta u_3(0)=0$
$\delta \varphi_2(0)=0$	$\delta M_y(0)=0$	$\delta \varphi_2(0)=0$	$\delta \varphi_2(0)=0$
$\delta Q_z(L)+F\delta \varphi_2(L)=0$	$\delta u_3(L)=0$	$\delta u_3(L)=0$	$\delta u_3(L)=0$
$\delta M_y(L)=0$	$\delta M_y(L)=0$	$\delta M_y(L)=0$	$\delta \varphi_2(L)=0$

Robni pogoji v ravnini z normalo $\mathbf{e}_3$

$\delta u_2(0)=0$	$\delta u_2(0)=0$	$\delta u_2(0)=0$	$\delta u_2(0)=0$
$\delta \varphi_3(0)=0$	$\delta M_z(0)=0$	$\delta \varphi_3(0)=0$	$\delta \varphi_3(0)=0$
$\delta Q_y(L)-F\delta \varphi_3(L)=0$	$\delta u_2(L)=0$	$\delta u_2(L)=0$	$\delta u_2(L)=0$
$\delta M_z(L)=0$	$\delta M_z(L)=0$	$\delta M_z(L)=0$	$\delta \varphi_3(L)=0$

Preglednica 1. Robni pogoji standardnih Eulerjevih uklonskih stebrov

vztrajnostni osi prečnega prereza. Prvi so točne rešitve za določitev velikosti uklonskih sil elastičnih stebrov z upoštevanjem osnih in strižnih deformacij predstavili Flajs in sodelavci [Flajs, 2003]. Te so:

$$F_{cr,y} + F_{cr,y}^2 \left(\frac{1}{GA_s} - \frac{1}{EA_x} \right) = \frac{\pi^2 EI_y}{L_{u,y}^2}, \quad (85)$$

$$F_{cr,z} + F_{cr,z}^2 \left(\frac{1}{GA_s} - \frac{1}{EA_x} \right) = \frac{\pi^2 EI_z}{L_{u,z}^2}. \quad (86)$$

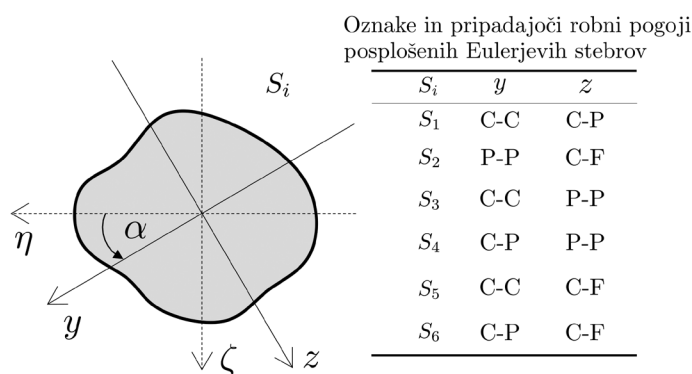
S pomočjo kvadratnih enačb (85) in (86) določimo standardno Eulerjevo uklonsko silo elastičnega homogenega stebra, torej pozitivno in najmanjšo uklonsko silo stebra, z izrazom

$$F_{cr} = \min\{F_{cr,y}, F_{cr,z}\}. \quad (87)$$

V enačbah (85)–(87) smo z L_u označili standardno uklonsko dolžino stebra, razen za steber C-P. Za ta steber moramo L_u določiti posebej. Če zanemarimo strig, je L_u tudi za te stebre enaka splošno znani vrednosti, torej $L_u \approx 0,699L$.

Obravnavajmo sedaj stebre, za katere je rešitev diferencialnih enačb (58) in (59) določena z enačbama (67) in (68). V tem splošnem primeru koordinatni osi y in z nista glavni vztrajnostni osi prečnega prereza, tako tudi robnih pogojev stebrov ne predpisujemo v glavnih smereh. Te stebre označimo s S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), orientacijo pripadajočih robnih pogojev pa prikazujemo na sliki 2.

Na sliki 2 smo z η in ζ označili glavni vztrajnostni osi prečnega prereza stebra, za kot α zavrti koordinatni osi y in z . Kot rečeno, te stebre imenujemo posplošeni Eulerjevi stebri, pripadajočo najmanjšo pozitivno vrednost uklonske sile pa posplo-



Slika 2. Oznake in pripadajoči robni pogoji posplošenih Eulerjevih stebrov S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$)

šena Eulerjeva uklonska sila stebra, označimo jo z F_{cr} .

Na koncu s parametrično študijo prikažemo še kvantitativni vpliv orientacije robnih pogojev na velikosti posplošenih Eulerjevih uklonskih sil elastičnih stebrov. Obravnavamo stebre z začetno dolžino $L=500$ cm in s pravokotnim prečnim prerezom $a/b=15/10$. Vztrajnostne momente prečnega prereza za koordinatni osi y in z izrazimo z glavnimi vztrajnostmi momenti z enačbami (glej na primer [Stanek, 1989])

$$I_y = \frac{(I_\eta + I_z)}{2} + \frac{(I_\eta - I_z)}{2} \cos 2\alpha + I_{\eta z} \sin 2\alpha = \frac{(I_\eta + I_z)}{2} + \frac{(I_\eta - I_z)}{2} \cos 2\alpha, \quad (88)$$

$$I_z = \frac{(I_\eta + I_z)}{2} - \frac{(I_\eta - I_z)}{2} \cos 2\alpha - I_{\eta z} \sin 2\alpha = \frac{(I_\eta + I_z)}{2} - \frac{(I_\eta - I_z)}{2} \cos 2\alpha, \quad (89)$$

$$I_{yz} = -\frac{(I_\eta - I_z)}{2} \sin 2\alpha + I_{\eta z} \cos 2\alpha = -\frac{(I_\eta - I_z)}{2} \sin 2\alpha. \quad (90)$$

Vsi obravnavani stebri so betonski z modulom elastičnosti $E = 3284$ kN/cm², kar skladno s SIST EN 1992-1-1:2005 [SIST, 2005] ustreza betonu trdnostnega razreda C30/37. Dodatno izberemo

Poissonovo število $\nu = 1/5$ ter strižni modul $G = E/(2 - 2\nu)$. V skladu s priporočili Cowperja [Cowper, 1966] pa je strižni koeficient prečnega prereza določen z izrazom $k_s = 10(1 + \nu) / (12 + 11\nu)$, kar ustreza pravokotnemu prečnemu prerezu.

V preglednici 2 najprej predstavimo velikosti uklonskih sil standardnih Eulerjevih stebrov, in sicer za primer, ko vplive osnih in strižnih deformacij zanemarimo ($\varepsilon_x=0$, $\gamma_y=0$, $\gamma_z=0$), in za primer, ko jih upoštevamo ($\varepsilon_x \neq 0$, $\gamma_y \neq 0$, $\gamma_z \neq 0$).

V preglednici 3 prikazujemo vpliv orientacije robnih pogojev na velikosti uklonskih sil posplošenih Eulerjevih stebrov S_i ($i=1, 2, \dots, 6$). Orientacijo robnih pogojev smo glede na smeri glavnih vztrajnostnih osi prečnih prerezov določili s kotom α . Tudi tu prikazujemo uklonske sile za stebre, ko $\varepsilon_x=0$, $\gamma_y=0$, $\gamma_z=0$, in stebre, ko $\varepsilon_x \neq 0$, $\gamma_y \neq 0$, $\gamma_z \neq 0$.

Ko primerjamo velikosti uklonskih sil med standardnimi in posplošenimi Eulerjevimi stebri (primerjava uklonskih sil stebrov v preglednicah 2 in 3), seveda ugotovimo, da so velikosti uklonskih sil za $\alpha=0^\circ$ oziroma za $\alpha=90^\circ$ enake. To smo v preglednici 3 poudarili tako, da smo vrednosti odebelili. S primerjavo tudi ugotovimo, da so velikosti posplošenih Eulerjevih stebrov vedno večje od velikosti standardnih Eulerjevih uklonskih sil. Je pa vpliv robnih pogojev na velikosti uklonskih sil homogenih elastičnih stebrov velik, saj je lahko tudi za dvakrat večji od velikosti uklonskih sil standardnih Eulerjevih stebrov. Glede na povedano lahko povzamemo, da lahko z izbiro robnih pogojev bistveno povečamo uklonsko nosilnost homogenih elastičnih stebrov. Opazimo pa tudi, da je vpliv osnih in strižnih deformacij na velikosti uklonskih sil vseh posplošenih Eulerjevih stebrov zelo majhen in ga za vitke stebre lahko zanemarimo.

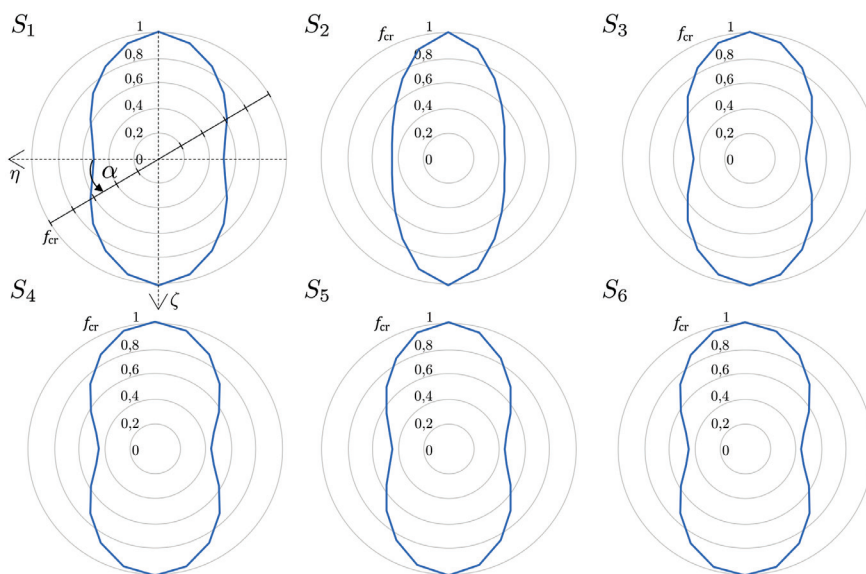
Velikosti uklonskih sil posplošenih Eulerjevih stebrov, ki smo jih predstavili v preglednici 3, prikazujemo še na sliki 3. Tu prikazujemo odvisnost normaliziranih posplošenih Eulerjevih uklonskih sil $f_{cr} = F_{cr} / F_{cr, maks}$, kjer $F_{cr, maks}$ predstavlja največjo vrednost uklonske sile stebra S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$). Takšna grafična predstavitev rezultatov parametrične študije omogoča preglednejši vpogled na vpliv orientacije robnih pogojev na velikost uklonske sile F_{cr} .

F_{cr} (kN)				
Tip podpore:	C-F	P-P	C-P	C-C
L_{-u} :	$2L$	L	$\sim 0,699L^*$	$L/2$
$F_{cr} + F_{cr}^2 \left(\frac{1}{GA_s} - \frac{1}{EA_x} \right) = \frac{\pi^2 E I_{min} (ali I_{maks})}{L_u^2}; (\varepsilon_x \neq 0, \gamma_y \neq 0, \gamma_z \neq 0)$				
I_{min}	40,509	161,961	331,122 (331,269)*	646,674
I_{maks}	91,127	364,137	743,879 (744,209)*	1450,669
$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min} (ali I_{maks})}{L_u^2}; (\varepsilon_x = 0, \gamma_y = 0, \gamma_z = 0)$				
I_{min}	40,515	162,059	331,532	648,236
I_{maks}	91,158	364,633	745,946	1458,530

Preglednica 2. Velikosti uklonskih sil Eulerjevih stebrov. Eulerjeva uklonska sila je manjša od obeh vrednosti, v preglednici odebeljena vrednost

F_{cr} (kN)						
α [°]	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
$\varepsilon_x \neq 0, \gamma_y \neq 0, \gamma_z \neq 0$						
0	331,122	40,509	161,961	161,961	40,509	40,509
15	351,006	41,887	173,877	171,641	43,884	43,871
30	402,912	46,240	206,279	197,053	53,108	53,054
45	471,164	54,170	251,569	231,000	65,723	65,626
60	542,937	66,326	301,283	267,961	78,384	78,289
75	609,281	81,707	344,886	304,924	87,703	87,664
90	646,674	91,127	364,137	331,122	91,127	91,127
$\varepsilon_x = 0, \gamma_y = 0, \gamma_z = 0$						
0	331,532	40,515	162,059	162,059	40,515	40,515
15	351,466	41,894	173,989	171,751	43,892	43,878
30	403,518	46,248	206,438	197,198	53,118	53,065
45	471,994	54,181	251,805	231,199	65,739	65,642
60	544,038	66,342	301,622	268,229	78,407	78,312
75	610,668	81,732	345,330	305,272	87,731	87,693
90	648,236	91,158	364,633	331,532	91,158	91,158

Preglednica 3. Posplošene Eulerjeve uklonske sile F_{cr} stebrov S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) v odvisnosti od kota α (v odvisnosti od orientacije robnih pogojev)



Slika 3. Spreminjanje normiranih velikosti posplošenih uklonskih sil $f_{cr} = F_{cr} / F_{cr, \max}$ stebrov S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) v odvisnosti od kota α (v odvisnosti od orientacije robnih pogojev)

5 SKLEP

V članku smo predstavili analitični postopek za določitev velikosti uklonskih sil homogenih elastičnih stebrov. Novost predstavljenega postopka je v tem, da omogoča določitev velikosti uklonskih sil tudi za stebre, ki niso podprti v glavnih vztrajnostnih oseh prečnih prereзов. Simo-Reissnerjev model prostorskega nosilca je uporabljen kot matematični model stebra. Zato nam predstavljeni postopek omogoča analizo vpliva tako upogibnih kot osnih in strižnih deformacij na velikosti uklonskih sil. Postopek za določitev velikosti uklonskih sil stebrov smo osnovali na dognanjih Kellerja. Ta je pokazal, da so kritične točke nelinearnega sistema navadnih diferencialnih enačb identične kritičnim točkam pripadajočega lineariziranega sistema enačb. Tako s predstavljenim analitičnim postopkom lahko določimo velikosti uklonskih sil homogenih elastičnih stebrov. Uporabnost predstavljenega postopka smo predstavili s parametrično študijo. S študijo smo analizirali vpliv orientacije robnih pogojev in vpliv strižnih deformacij na velikosti uklonskih sil stebrov. Ugotovili smo, da orientacija robnih pogojev bistveno vpliva na velikosti uklonskih sil stebrov. So pa te vrednosti vedno večje od velikosti uklonskih sil standardnih Eulerjevih ravinskih stebrov. To lahko posledično predstavlja možnost za učinkovitejše načrtovanje in optimizacijo stebrov pri prostorskih konstrukcijah, kot so večetažne zgradbe in mostovi. Dodatno pa smo ugotovili, da je vpliv strižnih deformacij na velikosti uklonskih sil zanemarljiv za vitke homogene elastične stebre.

Predstavljeni postopek je primeren predvsem za uklonsko analizo stebrov z masivnimi oziroma polnimi prečnimi prerezi, pri katerih je predpostavka o ravnih prečnih prerezi upravičena. Pri tankostenskih in odprtih prerezi, kot so na primer tankostenski jekleni profili, lahko zaradi vitke izbočitev oziroma distorzije pride do lokalnih deformacij prereza, ki jih Simo-Reissnerjev model ne zajame. V takšnih primerih je zato treba uporabiti naprednejše modele, ki upoštevajo deformacijo oziroma izbočitev prečnega prereza.

6 ZAHVALA

Delo P. Kočmana je financirala Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije (ARIS) v okviru raziskovalnega programa P2-0620. Univerzi v Ljubljani in ARIS se zahvaljujem za podporo. Prav tako se zahvaljujem profesorju Igorju Planincu in profesorju Bojanu Času za koristno diskusijo in priporočila med pripravo članka.

7 LITERATURA

Cowper, G. R., The shear coefficient in Timoshenko beam theory, *Journal of Applied Mechanics*, 33(2), 335–340, 1966.

CEN, FprEN 1992-1-1:2022, Eurocode 2: Design of concrete structures — Part 1-1: General rules and rules for buildings, bridges and civil engineering structures, European Committee for Standardization, Brussels, 2022.

CEN, FprCEN/TR 1993-1-102:2026, Eurocode 3 — Design of steel structures — Part 1-102: Elastic critical buckling of members, European Committee for Standardization, Brussels, 2026.

Flajs, R., Saje, M., Zakrajšek, M., On the existence and uniqueness of the generalized solution of Reissner's elastica, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 8(1), 3–19, 2003.

Keller, H. B., Nonlinear bifurcation, *Journal of Differential Equations*, 7(3), 417–434, 1970.

Kreyszig, E., *Advanced engineering mathematics*, Wiley, 1972.

Kočman, P., Schnabl, S., Planinc, I., On the spatial buckling of elastic columns, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 25(14), 2025.

Simo, J. C., A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49, 55–70, 1985.

SIST, SIST EN 1992-1-1:2005, Evrokod 2. Projektiranje betonskih konstrukcij-Del 1-1, Splošna pravila in pravila za stavbe, Slovenski inštitut za standardizacijo, 2005.

Stanek, M., *Trdnost, Izvlečki iz teorije in rešene naloge*, Ljubljana, 1989.

Timoshenko, S. P., Gere, J. M., *Theory of elastic stability*, 2nd edition., McGraw-Hill, New York, 1961.

Wang, C. M., Wang, C. Y., Reddy, J. N., *Exact solutions for buckling of structural members*, CRC Press, 2004.