

KRATKA ZGODOVINA PERSPEKTIVE IN NJENE POVEZAVE Z GEOMETRIJO

JURIJ KOVIČ¹

¹IMFM, Ljubljana in Univerza na Primorskem, FAMNIT, Koper

Math. Subj. Class. (2010): 01A40, 01A55, 51A05

V članku predstavimo primer obojestransko koristnega medsebojnega vpliva znanosti in umetnosti: kot je klasična Evklidova geometrija pomagala pri razvoju linearne perspektive v slikarstvu renesanse, je linearna perspektiva utrla pot opisni in projektivni geometriji. Perspektivo osvetlimo s teoretičnega, zgodovinskega, aplikativnega, učnega in pedagoškega vidika.

A BRIEF HISTORY OF PERSPECTIVE AND ITS CONNECTIONS WITH GEOMETRY

In this article, we present an example of the mutually beneficial interaction between science and art: just as classical Euclidean geometry helped to develop linear perspective in Renaissance painting, linear perspective paved the way for descriptive and projective geometry. We shed light on the perspective from a theoretical, historical, applied, learning and pedagogical point of view.

Kaj je perspektiva in čemu služi

Perspektiva (v nadaljnjem $\mathcal{P}$) je način grafične reprezentacije objektov, s katerim na sliki (papirju, platnu, zidu, računalniškem zaslonu itd.) pričaramo kar se da prepričljivo “realistično iluzijo” prostorske globine (naslikanega prizora v celoti ali posameznih objektov). Osnovni problem $\mathcal{P}$:

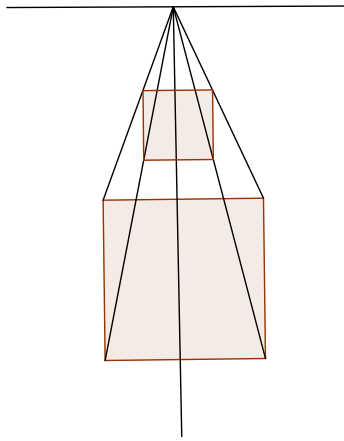
Problem 1. Kako na sliki pričarati videz prostorske globine?

so umetniki različnih dob in kultur reševali na različne načine (na primer s prikazovanjem daljnih objektov kot zakritih z bližnjimi, pa tudi z uporabo toplih in hladnih barv ter različne ostrine upodabljanja bližnjih in oddaljenih predmetov, pa z različnimi projekcijami na ravnino slike, paralelnimi in neparalelnimi itd.) Zato obstaja več vrst $\mathcal{P}$, ne le ena.

V bistvu istemu problemu – ki pa ga razume ožje, zgolj kot geometrijski problem, in ga reformulira kot matematični problem korektne predstavitve 3D-objekta na 2D-ploskvi (s pomočjo tlorisa, narisa in stranskega risa) – se na veliko bolj teoretičen način posveča *tehnično risanje*. Teoretična osnova le-tega je *opisna geometrija*, za očeta katere velja francoski matematik Gaspard Monge (1746–1818); njene tehnike so pomembne tudi v inženirstvu, arhitekturi in oblikovanju.

Linearna perspektiva (v nadaljnjem $\mathcal{LP}$) temelji na dodatni zahtevi: *Upodobljeni predmeti naj bodo prikazani tako, kot jih dejansko vidimo z določene zorne točke* (na primer bolj ko so oddaljeni od opazovalca, manjši se zdijo in bliže skupaj), ne pa naslikani v skladu s tem, kar o njih vemo (na primer, da imajo vsi robovi kocke enako dolžino).

Tako na primer kocke ali kvadra v $\mathcal{LP}$ nikoli ne narišemo z vsemi tremi četvericami vzporednih stranic, ampak kvečjemu z eno ali dvema, vsaj ena četverica vzporednih stranic pa se steka k točki na horizontu – bežišču (Slika 1).



Slika 1. Centralna $\mathcal{P}$. Ena četverica vzporednih robov upodobljenega kvadra na sliki se seka v bežišču, ki leži na horizontu.

Prav po tej večji skladnosti z “optično resnico” (na račun ohranitve pravih razmerij dolžin upodobljenega objekta) se $\mathcal{LP}$ razlikuje od drugih načinov predstavljanja 3D-objektov na ploskvi, na primer *izometrične projekcije*, ki ohranja dolžine (v danem merilu) in vzporednost, in se zato uporablja v tehničnem risanju. Upodabljanje v skladu z načeli $\mathcal{LP}$ je svojevrsten paradoks, saj je po eni strani realistično, objektivno, ker ustreza temu, kar opazovalec dejansko vidi (z določene zorne točke), po drugi strani pa je tudi relativno, subjektivno, ker je odvisno od opazovalca — od kod gleda in v kateri smeri.

Kratka zgodovina $\mathcal{P}$

Preden natančneje pregledamo osnovne pojme in načela $\mathcal{LP}$, ki so jih odkrili v renesansi, si na kratko pogledjmo, kako so osnovni problem $\mathcal{P}$ v zgodovini

umetnosti reševali pred tem. Te rešitve niso bile določene samo z večjo ali manjšo stopnjo tehničnih veščin, dostopnih v določenem času, ampak v veliki meri tudi z načinom razmišljanja in kulturnimi značilnostmi posameznih dob ([3], str. 5). Obširen izčrpen pregled zgodovine $\mathcal{P}$ v povezavi z geometrijo podaja na primer knjiga [2].

Za starogrškega filozofa Platona (428-348 pr. n. št.) tega problema sploh ni bilo. Platon je kot idealist par excellence zavračal slikarstvo kot tako, češ da prikazuje le videz, ne pa resničnost stvari, ki so tako ali tako že same le nepopolni posnetki večnih idej. Slikarstvo naj bi bilo torej, ker ustvarja le posnetke posnetkov, dvojno oddaljeno od resničnosti. Po njegovem bi morali slikarji, če že, prikazovati stvari takšne, kot dejansko *so*, ne pa kot se zdijo oziroma kot so videti. Trud za zvesto reprodukcijo videnega po načelih v renesansi razvite $\mathcal{LP}$ bi bil po njegovem a priori nesmiseln. V starejših dobah in kulturah se, morda prav iz takšnih ali podobnih filozofskih razlogov, niso posebej trudili s problemom upodabljanja prostorske globine na ploskvi. Na starogrških vazah so na primer junake in bogove prikazovali v neposrednejšem likovnem jeziku.

V risbah iz časa 31.000 let pr. n. št., odkritih na stenah jame *Chauvet-Pont-d'Arc*, so našli primere skupin živali (konjev), ki učinkovito zakrivajo druga drugo in tako ustvarjajo občutek globine prizora.

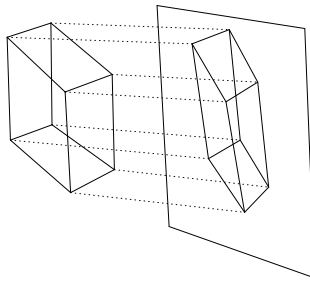
Eden od starejših načinov upodabljanja prostora je bila *vertikalna* $\mathcal{P}$, pri kateri so bili bolj oddaljeni predmeti narisani v višjih vzporednih pasovih, kar je omogočilo, da (vsaj na sliki) bližnji predmeti ne zakrivajo bolj oddaljenih (primer: *Kmet orje polje ob reki*, egipčansko slikarstvo, 13. stoletje pr. n. št.).

V stari japonski umetnosti so pogosto prizori z ljudmi na ulici prostorsko jasno in izrazno učinkovito prikazani kot videni iz zgornje galerije, vzporedne linije prizora pa so na pravokotnih slikah upodobljene z vzporednimi poševnimi črtami.

Kitajski umetniki so od 1. in 2. do 18. stoletja uporabljali podobno *poševno projekcijo*, ki se sicer danes splošno uporablja pri tehničnem risanju. Pri njej se, tako kot pri *ortografski projekciji*, za projiciranje predmeta na ravnino slike uporabljajo vzporedni žarki, ki pa nanjo ne padajo pod pravim kotom, ampak poševno (Slika 2).

Zametke $\mathcal{LP}$ najdemo že pri očetu geometrije, starogrškem matematiku Evklidu iz Aleksandrije (365-275 pr. n. št.), čeprav si z njimi starogrški slikarji niso znali ali niso hoteli pomagati. Evklid je v svoji *Optiki* [6] razvil popolno teorijo o tem, kako vidimo. S konceptom zornega stožca je pojasnil, zakaj imamo omejen zorni kot, zakaj se vzporedne premice v daljavi navidezno sekajo, in zakaj so oddaljeni predmeti videti manjši. Narobe je predpostavil le, da iz opazovalčevega očesa izhajajo nekakšni žarki; danes vemo, da so to v resnici sončni žarki, ki se od predmetov odbijajo v oko.

Evklid je svojo *Optiko* zasnoval podobno kot *Elemente*, na aksiomatski



Slika 2. Poševna perspektiva.

način. Tako je vse izreke v njej dokazal z logičnim sklepanjem iz osnovnih postulatov, v katerih je predpostavil: 1. da se pravokotni žarki, ki izhajajo iz očesa, razhajajo v nedogled; 2. da je telo, ki ga vsebuje niz vidnih žarkov, stožec, katerega vrh je v očesu, osnovna ploskev pa na površini vidnih predmetov; 3. da se vidijo tiste stvari, na katere padajo vidni žarki, in da se ne vidijo tiste stvari, na katere vidni žarki ne padajo; 4. da so stvari, ki jih vidimo pod večjim kotom, videti večje, da so tiste, ki jih vidimo pod manjšim kotom, videti manjše, da so tiste, ki jih vidimo pod enakim kotom, videti enake; 5. da so stvari, ki jih vidijo višji vidni žarki, videti višje, stvari, ki jih vidijo nižji vidni žarki, pa nižje; 6. podobno se stvari, ki jih vidimo z žarki bolj desno, zdijo bolj desne, stvari, ki jih vidimo z žarki bolj levo, pa bolj leve; 7. da so stvari, ki jih vidimo pod več koti, vidne jasneje.

Rimsko slikarstvo, kot neposredni naslednik starogrškega, že kaže številne primere arhitekturnih prostorov, ki so prikazani s pomočjo bežišč in predstavljajo dober, čeprav verjetno teoretično še ne zavestno domišljen, približek $\mathcal{LP}$ perspektive. Vendar načelo, da se vse vzporednice sekajo v isti točki, še ni usvojeno. Včasih vzporednice celo ostajajo vzporednice tudi na sliki. V bizantinskem slikarstvu (iz obdobja po zatonu zahodno-rimskega imperija v vzhodno-rimskem imperiju, ki je trajal do padca Konstantinopla 1453) najdemo na nekaterih ikonah primere nekakšne *obratne perspektive*, pri kateri so bolj oddaljeni predmeti prikazani kot večji, vzporedne črte pa se proti vrhu slike oddaljujejo namesto zblizujejo. V srednjem veku so bili prejšnji dosežki na področju $\mathcal{P}$ pozabljeni: naturalistično predstavljanje resničnosti in iskanje fizične lepote in popolnosti nista bila več zanimiva. Prostor je postal nekaj simboličnega in idealiziranega, naturalistično načelo ene same zorne točke je bilo opuščeno ([3], str. 7).

Za konec srednjeveškega slikarstva in začetek renesančnega slikarstva velja leto rojstva Giotto di Bondone (1266-1337). Načela $\mathcal{LP}$ so formulirali italijanski umetniki in arhitekti, kot na primer Leon Battista Alberti (1404-

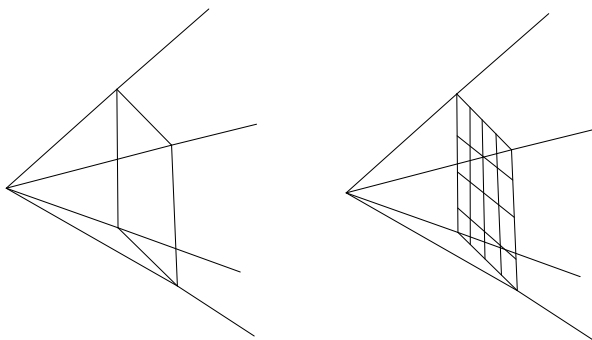
1472), Filippo Brunelleschi (1377-1446), Piero della Francesca (1415-1492), Paolo Uccello (1397-1475), Leonardo da Vinci (1452-1519). V začetku je $\mathcal{LP}$ nastala iz želje, realistično prikazati na primer zunanost in notranost stavb, pa tudi ceste in trge ter s kvadratno mrežo tlakovana tla. Z njo so lahko tudi risali ljudi, drevesa in predmete v pravih velikostnih razmerjih. Do renesanse človeških figur na isti sliki niso prikazovali različno velikih, tudi če so bile bolj oddaljene od opazovalca. V renesansi se začne takšno "skrajševanje". Tako je na primer pri italijanskem slikarju Pietru Peruginu (1450-1523) perspektivni prostor na freski *Izročitev ključev* (1481-82) že usklajen z velikostjo figur. Prve takšne slike so bile narisane v enobežiščni središčni perspektivi, na primer *Sveta trojica* (1425) italijanskega slikarja Masaccia (1401-1428).

Pot do odkritja načel $\mathcal{LP}$, ki so sama po sebi sicer enostavna in se nam danes zdijo nekaj samoumevnega, ni bila ne lahka ne hitra. Duccio di Buoninsegna (1278-1319) je že poskušal realistično prikazati prostor, a je pri tem še delal napake, na primer pri svoji *Zadnji večerji* (1311) se vzporednice še ne sekajo v eni sami točki, miza, ob kateri sedijo apostoli, tudi ni postavljena v pravi $\mathcal{LP}$. Brunelleschi se je na primer že zavedal, da leži točka, na kateri se sekajo vzporednice, na horizontu, in da je poravnana s točko, iz katere gleda opazovalec (Slika 1). Prišel je tudi do pomembnega spoznanja, da $\mathcal{LP}$ predpostavlja, da opazovalec gleda s točno določene točke z enim samim očesom, ki ga ne vrti sem in tja. To je pomenilo upoštevanje dejstva, da človekovo videnje temelji na gledanju z očmi, in pomagalo k poenotenju kompozicije.

Alberti je v delu *De pictura* (1435) pomembno prispeval k teoretičnim osnovam za mehanično korektno reprodukcijo vidnega prizora na sliki. Prepričan je bil, da lahko slika zvesto posnema naravo le, če je prizor ugledan z določenega mesta in če se upoštevajo skrajšave oddaljenih objektov. Njegova ideja zorne piramide je bila neposredna nadgradnja Evklidovih formulacij. Utemeljena je bila na ideji, da se od opazovanega objekta svetlobni žarki stekajo v opazovalčevo oko; če piramido teh žarkov presekamo z navpičnim (na primer steklenim) zaslonom, se na njem pojavi slika, ki jo je treba samo še zvesto prenesti na platno ali papir, in že dobimo natančen duplikat vidnega objekta (Slika 3 levo).

Nemški slikar in grafik Albrecht Dürer (1471-1528) je to idejo nadgradil tako, da je zaslon opremil s kvadratno mrežo in tako dobil risalni okvir, ki močno olajša pravilno umestitev ključnih točk prizora na sliko (Slika 3 desno).

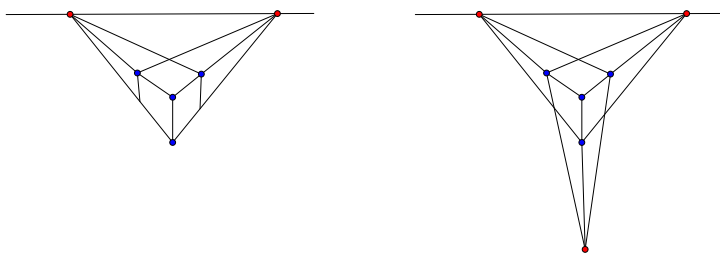
"*Item Perspectiva ist ein lateinisch Wort, bedeutet ein Durchsehung.*" ("Izraz perspektiva je latinska beseda, pomeni gledati skozi.") je zapisal. Nekateri Dürerjevi lesorezi prikazujejo mehanizem, ki so ga uporabljali za risanje prizorov v $\mathcal{P}$. Umetnik gleda skozi luknjico, zato da se njegova zorna točka med risanjem ne spreminja. Obrise modela gleda skozi prozoren nav-



Slika 3. Zorna piramida z vrhom v opazovalčevem očesu in navpičnim zaslonom kot osnovno ploskvijo, ter razdelitev tega zaslona s kvadratno mrežo.

pičen zaslon z narisano kvadratno mrežo. Tako zlahka prenese ustrezno sliko na platno ali papir s podobno mrežo (v poljubno izbranem merilu). V razpravi *Underweyßung der Messung* (1525) je Dürer opisal tudi dvobežiščno perspektivo, ki jo je sicer prvi z diagramom prikazal Jean Pélérin v *De Artificiali perspectiva* (1505), prvi tiskani razpravi o $\mathcal{P}$. Dürer je po svojem potovanju v Italijo močno pripomogel k širjenju risanja v $\mathcal{P}$ v Nemčiji.

Leonardo se je v svojih zapisih o $\mathcal{P}$ naslonil na Albertijevo idejo steklenega zaslona, na katerega površino rišemo objekte, vidne za njim. Isti koncept je tudi v ideji camere obscurae, ki je 1822 kulminirala v izumu fotografije, ko je Francoz Nicéphore Niépce izumil prvo fotografsko tehniko, heliografijo. Prav fotografija je umetnikom (v poznem 19. stoletju) odprla oči tudi za tribežiščno perspektivo (Slika 4 desno).



Slika 4. Kocka v dvobežiščni in tribežiščni $\mathcal{P}$

Sicer pa je Leonardo vztrajal, da mora umetnik zaupati predvsem svojim

lastnim sposobnostim opazovanja, in se ne sme pustiti preveč voditi teorijam. Njegov največji prispevek k $\mathcal{P}$ pa so, poleg samih slik in fresk, kot je na primer *Zadnja večerja*, ter risb poliedrov s praznimi lici in odebeljenimi robovi, ki jih je narisal kot ilustracije za razpravo *De Divina proportione* (1509) italijanskega matematika Luce Pacioli (okoli 1445/47-1517), tudi njegove raziskave o barvah predmetov glede na njihovo razdaljo od opazovalca. Opazil je, da zaradi zraka, ki ni povsem prozoren, oddaljeni predmeti postanejo bolj modri, njihovi obrisi pa postajajo vse bolj zabrisani.

Slikar Rafael Sanzio (1483-1520) je povezal nauke Leonarda ter kiparja in arhitekta Michelangela Buonarottija (1475-1564) in ustvaril umetniška dela z velikim občutkom za kompozicijo in pravilno uporabo perspektive, na primer *Atenska šola* (1509-1511), ter tako proizvedel sintezo, ki najbolje predstavlja visoko renesanso ([3], str. 9).

V naslednjih stoletjih so umetniki $\mathcal{P}$ vse bolj avtomatično uporabljali, šteta je bila za logično obliko predstavitev. Izum fotografije je morda k temu naziranjju še dodatno pripomogel.

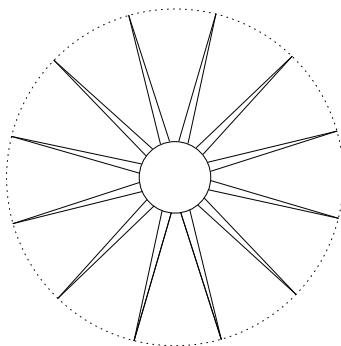
Vendar se je slikarstvo sčasoma izvilo iz tega "matematičnega" načina upodabljanja prostora kot edino pravilnega. Ob koncu 19. stoletja so postimpresionisti začeli z drugačnim upodabljanjem prostora, pod močnim vplivom orientalske umetnosti, ki je takrat vzbudila veliko pozornost v Evropi. Paul Gauguin (1848-1903) je slikal slike, pri katerih je prostor zaradi uporabe barv deloval sploščeno. Vincent Van Gogh (1853-1890) je v svojih kompozicijah izkrivljal prostor. Paul Cézanne (1839-1906) je naravne oblike izražal z osnovnimi geometrijskimi oblikami: kroglo, valjem, stožcem. Vsi ti umetniki so še vedno ohranjali osnovo $\mathcal{P}$, medtem ko jo je umetniška avantgarda v XX. stoletju pogosto opuščala. Danes se v slikarstvu $\mathcal{P}$ uporablja kot ena izmed možnih tehnik, ni pa to več edini pravilni način slikanja.

$\mathcal{LP}$ so nekateri umetniki, na primer M.C. Escher (1898-1972) uporabili tudi za prikaz različnih *optičnih iluzij* oz. nemogočih objektov, kot je na primer stopnišče s kvadratnim tlorisom, po katerem se je mogoče ves čas bodisi vzpenjati bodisi spuščati. Tipičen "nemogoč" objekt je tudi *Penrosov trikotnik*, ki ga je sicer prvi ustvaril švedski umetnik Oscar Reutersvärd 1934, neodvisno od njega pa sta ga odkrila in popularizirala v petdesetih letih psihiater Lionel Penrose in njegov sin matematik in Nobelov nagrajenec Roger Penrose. Vendar je zanimivo, da je na primer možen 3D-trikotnik z ukrivljenimi odebeljenimi robovi, ki je od spredaj videti kot Penrosov trikotnik; odkril ga je Mathieu Hamaekers (prikazan je v knjigi [5], str. 72,93).

Slikarji in teoretiki so v XX. stoletju ([4]) razvili sisteme *krivočrtne* $\mathcal{P}$ s štirimi, petimi in celo šestimi bežišči, ki v določenih primerih upodablja jo videno bolje in natančneje kot $\mathcal{LP}$. Vendar primere krivočrtne $\mathcal{P}$ najdemo že veliko prej, na primer na odsevanih podobah v zrcalu s slavne slike *The Arnolfini Portrait* (1434), ki jo je naslikal nizozemski slikar Jan Van Eyck

(okoli 1390 - okoli 1441).

Omenimo še “otroško perspektivo”. Otrok, ki riše ulico s hišami ob njej, marsikdaj nariše sliko tako, kot jo doživi, in ne tako, kot jo vidi: ulica je ves čas enako široka, hiše pa so nanjo postavljene pravokotno. Tudi ta način risanja ni povsem neuporaben: če na primer pogledamo pariško zvezdo ulic okrog Slavoloka zmage visoko iz ptičje perspektive, bomo videli 12 ulic, katerih robovi se stekajo k različnim točkam na okroglem horizontu oz. robu osnovne ploskve zornega stožca (Slika 5). Vz dolž njih bi res lahko razporedili risbe hiš, katerih navpičnice bi z robovi ulic oklepale prave kote.



Slika 5. Pogled iz ptičje $\mathcal{P}$ na pariško zvezdo okrog Slavoloka zmage: 12 ulic se steka k 12 bežiščem na okroglem horizontu.

Ob vsem tem se lahko spomnimo problema prikaza ukrivljene zemeljske oble z zemljevidom. Znano je, da nobena od številnih možnih projekcij ne ohranja vseh elementov (kotov in dolžin) ter plosčin takih, kot so dejansko. Vsaka ima svoje prednosti in svoje pomanjkljivosti. Enako je z različnimi sistemi $\mathcal{P}$ — nobeden izmed njih ni edino možen oziroma najboljši v vseh pogledih.

Od slikarjev so štafeto nadaljnjega razvijanja teorije $\mathcal{P}$ prevzeli matematiki, ki so razvijali matematično teorijo $\mathcal{P}$ (na primer Guidobaldo, Stevin, Lambert).

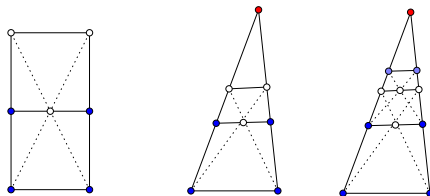
V teoriji $\mathcal{LP}$ so implicitno vsebovani osnovni pojmi in načela opisne in projektivne geometrije (na projektivni ravnini se na primer vzporedne premice iz evklidske ravnine sekajo v tako imenovani točki v neskončnosti, prav tako kot se vzporedne premice v $\mathcal{LP}$ sekajo v bežišču). Vendar se zdi, kot kaže material, zbran v [2], da slikarska teorija $\mathcal{P}$ ni neposredno vplivala na matematični razvoj teh geometrij.

S pomočjo projektivne geometrije in teorije grup je Felix Klein (1849-

1925) v svojem znanem *Erlangenskem programu* (1872) klasificiral večino geometrij, znanih do konca 19. stoletja.

Tipičen izrek, ki sodi v projektivno geometrijo, je na primer znani Pappusov izrek; na projektivni ravnini obstajajo tudi druge konfiguracije točk in premic, ki so danes eno od intenzivno proučevanih področij geometrije (glej na primer [8], [10]).

Projektivna geometrija omogoča elegantne dokaze oz. rešitve nekaterih sicer težje dokazljivih izrekov oz. problemov evklidske geometrije. Tako se na primer lastnost konkurentnosti (tri premice ali daljice se sekajo v isti točki) ohranja pri projektivnih transformacijah; ker le-te omogočajo poljuben trikotnik preslikati na enakostranični trikotnik, so težiščnice v vsakem trikotniku konkurentne, ker velja to za enakostraničen trikotnik. Podobno sklepanje je v osnovi tako imenovanega *trika X* v $\mathcal{LP}$, ki omogoča na primer ob kvadrat, narisani v $\mathcal{LP}$, narisati še enega, in to ponavljati v neskončnost (Slika 6).

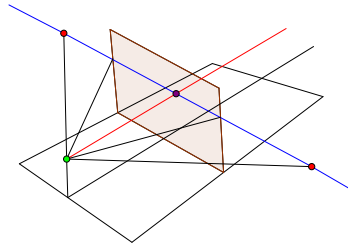


Slika 6. Trikotnik X za dorisovanje kvadratov k prvotnemu kvadratu v pravilni perspektivični skrajšavi.

Osnovni pojmi in načela $\mathcal{LP}$

Osnovni pojmi $\mathcal{LP}$ so: zorna točka, zorni stožec, osnovna ravnina, ravnina slike, osnovna premica, zorna premica, horizont, bežišča, regulacijske črte (Slika 7). Pri nadaljnji razlagi teh pojmov so dodani angleški izrazi in njihove kratice, uveljavljeni v angleški literaturi o $\mathcal{LP}$; v slovenski literaturi nimamo povsem poenotenih standardnih izrazov za te pojme.

Ravnina slike (angl. picture plane, P.P.) je namišljena ravnina, na kateri nastane slika kot navpični prerez zorne piramide. Ustrezno slikarskemu platu ali papirju. *Zorna točka* ali gledišče (angl. viewpoint, V.P.) je točka, s katere opazovalec gleda; $\mathcal{LP}$ predpostavlja, da gleda z enim samim očesom, za razliko od tako imenovane *bicentrične* $\mathcal{P}$, ki je študija projekcije tridimenzionalnega prostora iz para referenčnih točk in ne iz ene same [7]. *Zorni stožec* ali vizualni stožec (angl. cone of vision, C.V.) ustreza vidnemu polju, ki ga zajame opazovalčev pogled. Vrh stožca je v opazovalčevem očesu. Tvo-



Slika 7. Ravnina slike (navpična) je vselej pravokotna na zorno premico, ki poteka od zorne točke do točke v fokusu na ravnini slike. Bežišči sta na črti horizonta.

rijo ga žarki svetlobe, ki potujejo od opazovanega objekta k očesu. *Osnovna ravnina* (angl. ground plane, G.P.) je ravnina, na kateri stoji opazovalec in upodobljeni predmeti. *Osnovna premica* (angl. ground line, G.L.) je presek osnovne ravnine in ravnine slike. *Zorna premica* (angl. central visual ray, C.V.R.) je premica od zorne točke do ravnine slike, pravokotna na ravnino slike. *Horizont* ali črta obzorja (angl. horizon, H.) je namišljena vodoravna črta na višini opazovalčevih oči. *Bežišča* ali očišča (angl. vanishing points, V.P.) so točke na horizontu, v katerih se srečajo vzporedne premice, ki se oddaljujejo od opazovalca. Glede na tip perspektive ločimo enobežiščne, dvobežiščne in tribežiščne (te se uporabljajo bodisi za pogled iz ptičje bodisi iz žabje perspektive). *Regulacijske črte* nam pomagajo pri risanju v $\mathcal{P}$ (na primer stopnic, telegrafskih drog v ravni vrsti itd.).

Čeprav so *osnovna načela* $\mathcal{LP}$, kot so; zmanjšanje, skrajševanje, konvergenca, prekrivanje, barvna in vrednostna perspektiva, perspektiva podrobnosti in vzorcev, učinek ostrenja (angl. diminution, foreshortening, convergence, overlapping, color and value perspective, detail and pattern perspective, focus effect) razmeroma preprosta (glej na primer [1]), je treba za učenje njenih konkretnih tehnik in postopkov (kot so na primer risanje n -kotniških pravilnih prizem, risanje stopnic, senc in zrcalnih odsevov; risanje objekta v $\mathcal{LP}$ v pravih razmerjih na podlagi njegovega tlorisa, narisa in stranskega risa itd.) vložiti kar nekaj truda. To temeljno znanje, potem ko ga z veliko študija, vaje, opazovanja in razmišljanja, dobro osvojimo, nam omogoča, da korektno rešimo praktično vsak problem $\mathcal{LP}$ oz. opisne geometrije. To je dobro storiti tudi v primeru, da se kasneje poslužujemo kakšnega računalniškega ali spletnega orodja za risanje v takšni ali drugačni $\mathcal{P}$ oz. projekciji (linearni, paralelni, vojaški itd.), kot ga uporabljajo na primer arhitekti, inženirji, dizajnerji, pa tudi umetniki.

Učenje $\mathcal{LP}$: kako začeti

$\mathcal{LP}$ danes poleg ilustratorjev, animatorjev in slikarjev (ki jo uporabljajo kot eno od možnih orodij, včasih pa njena načela tudi zavestno kršijo oziroma ignorirajo), s pridom uporabljajo tudi arhitekti, scenografi in oblikovalci notranjih prostorov ter inženirski oblikovalci. Poznavanje njenih načel (teorija) in sposobnost njihove uporabe (praksa) ne škodi tudi matematiku, ki želi na primer učencem z realistično risbo prikazati preprosta geometrijska telesa (na primer kocko v perspektivi), ali jim pokazati, da so tudi osnovne oblike v naravi (cvetovi, plodovi, oblike živali itd.) sestavljene iz osnovnih oblik (krogov, elips, valjev itd.), ki jih z malce poznavanja geometrije in malce poznavanja perspektive zlahka narišemo precej realistično. Pri risanju v $\mathcal{LP}$ (bodisi prostoročnem bodisi z ravnilom ali s kakšnim računalniškim orodjem) moramo pozabiti, kar vemo o objektu, ki ga rišemo, in risati tisto, kar vidimo. Tako se na primer zdi, da se vzporedna robova ravne ceste ali železniškega tira v daljavi srečata v točki, čeprav vemo, da je razdalja med njima ves čas enaka.

Vendar je, ker so $\mathcal{LP}$ razvili umetniki, nima pa vsakdo umetniškega talenta, umestno vprašanje: *Se lahko vsakdo nauči risati (vsaj razmeroma preproste geometrijske objekte, kot so na primer kocke, kvadri, poliedri) po načelih $\mathcal{LP}$?*

Če nimamo posluha, se zelo težko naučimo zapeti pravilne višine tonov. Vseeno pa lahko, če imamo smisel vsaj za ritem in smo se pripravljene naučiti glasbene pisave, z dovolj vaje in truda igramo preproste skladbe na inštrumentih s tipkami, na primer na klavir. Dejansko se lahko osnovnih načel $\mathcal{LP}$, ki je bolj tehnika kot umetnost, teoretično naučimo razmeroma hitro. Še posebej lahko se jih naučimo matematiki (in fiziki), saj je sama teorija izrazito matematična (temelji namreč na optiki oziroma geometriji). Podobno velja tudi za praktično učenje: tudi če nimamo posebnega talenta in risarsko nismo najbolj spretni (na primer ne znamo prostoročno narisati lepe elipse), lahko vseeno rišemo v $\mathcal{LP}$, tako da si pomagamo na primer z GeoGebro. Na ta način se lahko tudi lažje naučimo samih osnov teorije $\mathcal{LP}$.

Najhitreje se naučimo $\mathcal{LP}$, če preštudiramo čim več različnih knjig o tej temi, ki jo osvetljujejo iz različnih vidikov:

1. *praksa, risanje*: Začnemo lahko na primer s preprostim priročnikom za risanje v $\mathcal{P}$ z malo teorije, a veliko praktičnimi vajami, na primer [1]. Obiščemo lahko tečaj risanja.

2. *opazovanje, razmišljanje*: V knjigah o umetnosti ali na spletu poiščemo in pozorno opazujemo čim več klasičnih slik na to temo. Preberemo ustrezne komentarje in razlage teh del. Ogledamo si videe o risanju v $\mathcal{P}$ na spletu.

3. *teorija, znanje*: Potem lahko posežemo po bolj teoretičnih delih o matematičnih osnovah $\mathcal{LP}$ (bodisi zgodovinskih, kot je na primer Evklidova

Optika [6], bodisi iz sodobnosti), o optičnih iluzijah [5], o krivočrti $\mathcal{P}$ [4], itd.

4. *uporaba računalniških orodij*: Na spletu se zlahka dobijo prosto dostopna orodja za risanje v $\mathcal{LP}$. Na voljo pa so tudi plačljive profesionalne verzije, uporabne predvsem za arhitekte, dizajnerje in inženirje, pa tudi za likovne umetnike, risarje stripov in animiranih filmov.

Za popoln uspeh v obvladovanju veščine risanja v $\mathcal{P}$ ni dovolj samo razumeti načela $\mathcal{P}$, treba je tudi veliko, vztrajno in potrpežljivo risati oziroma vaditi, razmišljati, opazovati in se učiti. Le tako ne bomo osvojili le nekaj posebnih tehnik za risanje zgolj določenih vrst objektov (na primer stopnic, vzorcev na preprogi itd.), ampak bomo sposobni rešiti vsak risarski problem, ki se nanaša na perspektivo.

Učenje $\mathcal{P}$ neizogibno poteka v korakih, skozi različne stopnje. Na osnovni ravni zadošča, če spoznamo nekaj osnovnih pojmov in načel iz priročnikov za risanje. V njih dobimo zelo praktična in konkretna navodila za risarske vaje. Sčasoma se začnemo spraševati, kako so sploh odkrili ta pravila, in kako so teoretično utemeljena. Zaznamo namreč določeno nelagodje ob njihovi uporabi. Pojavi se dvom, ali so ta pravila stoprocentno uporabna v vseh primerih.

Nato začnemo študirati zgodovino $\mathcal{P}$. Presenečeni odkrijemo njen simbolični pomen in spoznamo, da pojem prostora ni bil vselej tako "matematičen", kot si ga zamišljamo že nekako od Newtona dalje (homogen, kontinuiran, neskončen); ni bil vselej razumljen kot absolutni prostor, ki obstaja pred vsemi predmeti. V knjigi *Perspektiva kot simbolična oblika* [9], osrednji knjigi 20. stoletja o $\mathcal{P}$, ki je znana tudi zunaj krogov umetnostne zgodovine, član warburške skupine Erwin Panofsky očrtuje obravnavanje $\mathcal{P}$ od klasičnih časov do danes in povezuje uravnavanje prostora z značilnim svetovnim nazorom določenega časa.

Konkretne metode, triki in postopki za risanje v $\mathcal{LP}$

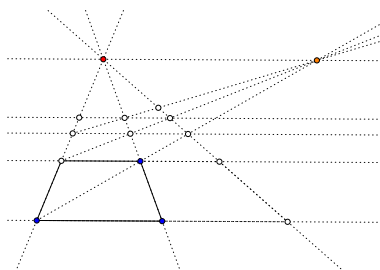
Pri učenju risanja v $\mathcal{LP}$ po navadi začnemo z risanjem kocke ali kvadra ali pravilnih prizem, kar nam potem pride prav pri *metodi škatle* (angl. box method), s katero lahko potem zlahka narišemo predmete drugih, manj pravilnih oblik, umeščenih v te škatle. Podobno uporabni so *osnovni geometrijski objekti*, kot so krogle, valji, stožci in piramide, ki nam pri risanju služijo za razstavitev zapletene oblike na preprostejše.

V $\mathcal{LP}$ se oddaljeni *krogi* spremenijo v vse bolj sploščene elipse, pri čemer pa središče upodobljenega kroga, ki sovпада s presečiščem diagonal krogu očrtanega kvadrata, ne leži na presečišču osi ustrezne elipse, ampak malo dlje, bliže horizontu.

V $\mathcal{LP}$ moramo znati risati tudi *sence ter osenčene strani predmetov*

(angl. shadows and shades), pri čemer sončne žarke obravnavamo kot vzporedne, žarke svetlobe iz svetilk pa kot radialno izvirajoče iz določene točke. Posebna, dokaj zahtevna tema so tudi *zrcaljenja predmetov v vodi in zrcalu* (glej na primer [11]). Poleg splošnih načel je treba za uspešno risanje v $\mathcal{LP}$ osvojiti še nekaj posebnih postopkov, s katerimi narišemo določene zahtevnejše objekte, na primer stopnice, preproge, šahovnice, ograje.

Pri risanju si lahko pomagamo s kvadratnimi koordinatnimi mrežami, ki jih lahko uporabimo na primer za transformacijo zemljevida, izvorno narisane v $\mathcal{LP}$, v prizor, narisane v kakšni drugi $\mathcal{P}$ (paralelni, obratni itd.). Če smo kvadratno koordinatno mrežo narisali na primer z GeoGebro, potem lahko to transformacijo koordinatne mreže in vseh točk in črt vanjo vrisane zemljevida naenkrat izpeljemo že s spremembo prosto gibljivih točk enega samega kvadrata, in že se vsa mreža in slika na njej avtomatično transformira v želeno $\mathcal{P}$ (Slika 8).



Slika 8. Konstrukcija kvadratne mreže iz osnovnega kvadrata.

Koristno je znati tudi narisati daljico (na ravnini tal) v pravilni $\mathcal{P}$, saj lahko potem vsakršno risbo na kvadratni mreži (na primer tlorise stavb nekega naselja) sestavimo iz daljic in narišemo v pravilni $\mathcal{P}$.

Merjenja dolžin navpičnih in vodoravnih črt in pomembnost višine horizonta.

S pomočjo znane višine horizonta (na primer $h = 1,75m$) lahko določimo višino navpičnih in dolžino vodoravnih črt na sliki, narisanih v $\mathcal{LP}$. Tako so na primer vsi ljudje, ki imajo vrh glave v višini horizonta, enako visoki. Drevo, ki ima eno petino debla pod horizontom, štiri petine pa nad njim, ima dolžino $5h$. Če je dolžina vodoravne črte m -kratnik njene razdalje od horizonta, je njena dolžina mh .

Spreminjanje višine horizonta vpliva na razmerja višin. Dve enako veliki osebi, ki stojita druga za drugo, določata dve vzporednici, ki se bosta na sliki sekali v nekem bežišču na horizontu. Vse navpičnice med tema dvema

črtama imajo enako dolžino (podobno kot pri telegrafskih drogovi). Če pa horizont znižamo, se bo druga oseba zdela višja od prve. Izčrpneje to razloži naslednji citat iz knjige ([12]): “V slikarstvu je bil dolgo priljubljen visok horizont, zlasti v 16. stoletju, ko pokrajina še ni bila samostojna slikarjeva tema, ampak le ozadje za upodabljanje cerkvenih praznikov, bitk ali biblijskih prizorov. Visok horizont je slikarju puščal dovolj prostora, da je dal duška svojemu umetniškemu navdihu. Po tem je najbolj znan slikar Pieter Brueghel starejši (okoli 1525-1569). Slikarji so se lahko zadovoljili z nizkim horizontom šele, ko se je spremenil stil risanja pokrajin in so začeli risati na primer tudi oblake. O tem govorijo slike, ki so nastale okrog 1600.”

$\mathcal{LP}$ pomaga predvsem pri risanju objektov z ravnimi vzporednimi črtami, čeprav je tudi risanje zahtevnejših poliedrov po njenih zakonih zapletena naloga – pomislimo samo na polieder iz Dürerjeve grafike *Melanholijs* (1514). Za risanje organskih oblik iz narave (cvetov, dreves, oblakov itd.) pa je še vedno bolj kot teorija in sestavljanje zapletenih oblik iz preprostih geometrijskih oblik (krogle, valja, stožca, lijaka itd.) ključno natančno opazovanje, kot ga je priporočal Leonardo.

$\mathcal{P}$ glede na število bežišč

Kakšno vrsto $\mathcal{P}$ in s koliko bežišči uporabiti za risanje danega objekta? To je odvisno od njegove lege glede na opazovalca ter na ravnino slike in horizont.

Najpreprostejši je primer, ko gleda opazovalec naravnost predse (kot bi gledal skozi režo v steni), in ne vrti svojega pogleda zdaj levo, zdaj desno, zdaj navzgor zdaj navzdol. Temu načinu risanja pravimo centralna $\mathcal{P}$. Primerna je za prikaz zgradbe, ki ima sprednjo stran vzporedno ravnini slike. Podaljšane črte vzporednih premic, ki bežijo od nas, se na sliki sekajo v isti točki. Pravimo jim bežišče (angl. vanishing point). Bežišče pri centralni $\mathcal{P}$ natančno ustreza preseku zorne premice (ki izhaja iz opazovalčevega očesa) in ravnine slike. Bežišče (eno samo) je pri centralni $\mathcal{P}$ nekje na sliki. Po navadi ga ne umestimo povsem v središče slike. S tem dosežemo, da je slika bolj razgibana (sicer je preveč statična). Centralno $\mathcal{P}$ je na primer uporabil Piero della Francesca na sliki *Bičanje Kristusa*, nastali v letih 1455–1460. S centralno $\mathcal{P}$ lahko narišemo le tiste prostore, ki se razprostirajo v smeri pogleda, objekti v prostoru pa so postavljeni tako, da smer pogleda sekajo pod pravim kotom.

Če pa pogledamo na objekt (na primer zgradbo z osnovno obliko kvadra) od strani, dobimo dve skupini vzporednih črt in vsaka se seka v svojem bežišču. To je $\mathcal{P}$ z dvema bežiščema. Lahko jo uporabimo tudi za tlakovanje tal sobe ali trga s kvadrati. Pri vijugasti poti, ki se oddaljuje od nas, imamo lahko celo več bežišč. Vsa bežišča ležijo na isti vodoravni črti, ki ji pravimo horizont. Na obali morja horizont ustreza črti med morjem in nebom. Pri

ravni pokrajini ustreza črti med zemljo in nebom.

Risbe s tremi bežišči dobimo na primer, če rišemo nebotičnik, ki ga gledamo od spodaj (iz žabje perspektive) ali od zgoraj (iz ptičje $\mathcal{P}$). Če bi gledali nebotičnik pred seboj iz sredine nekega drugega nebotičnika, bi nam pogled taval zdaj gor, zdaj dol, zdaj levo, zdaj desno, in bi imeli zato na sliki kar štiri očišča, ustrezajoča temu nebotičniku, katerega navpične robove bi videli kot rahlo ukrivljene oz. kot krožne loke. Ta primer jasno kaže, da ima uporaba $\mathcal{LP}$ svoje meje.

Meje uporabnosti $\mathcal{LP}$

Načela $\mathcal{LP}$ so odkrili umetniki v renesansi, dobi, ki je po zgledu antike poudarjala vrednost človeka in je poleg humanistične izobrazbe enako cenila tudi natančno opazovanje narave. Nastala je iz potrebe rešiti “nemogoč” problem, porojen tako iz same slikarske prakse kot tudi iz duhovnih in filozofskih razmišljanj tistega časa:

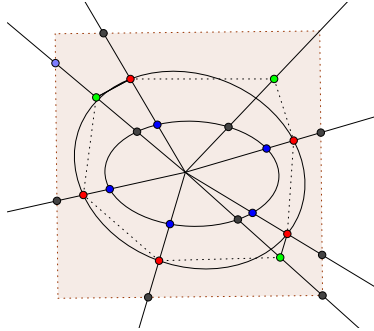
Problem 2. Kako upodobiti izbrani prostor ali objekt, da bo slika natančen odraz tega, kar dejansko vidimo z določene zorne točke?

Takšna “idealno realistična” upodobitev “optične resnice” objekta naj bi zvesto prikazala objekte v prostoru in njihovo medsebojno lego, upoštevala pa naj bi tudi navidezne skrajšave objektov zaradi njihove oddaljenosti od opazovalca. Toda, ali je sploh mogoče na ravni sliki natančno prikazati, kar vidimo z očesom (oziroma z lečo sferične oblike)? Ta problem spominja na podobno “nemogoče” probleme (v matematiki in drugod), pri katerih se moramo zadovoljiti z najboljšimi približki rešitev, ker rešitve v strogem smislu ni. Tako na primer v kartografiji poskušamo z različnimi kartografskimi projekcijami na ravnino, stožec ali valj prikazati razporeditev celin in oceanov po ukrivljeni zemeljski obli. Pri tem prevodu se vedno nekaj izgubi: ali koti, ali dolžine, ali ploščine. Najstarejšo projekcijo zemeljske oble, *gnomonsko projekcijo* iz središča sfere na katerokoli tangentno ravnino, je iznašel Tales v 6. st. pr. n. št. Pri njej so veliki krogelni krogi (na primer skozi pola) prikazani z ravnimi črtami (poltraki, izhajajočimi iz skupne točke).

Podobno, v linearni algebri (z metodo najmanjših kvadratov) iščemo najboljši približek rešitve matrične enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ predločenega sistema linearnih enačb, v katerem je več enačb kot spremenljivk, in zato na splošno nima eksaktne rešitve.

In še en primer “nemogočega” problema, ki pa je vseeno dobil rešitev: Nek arhitekt je dobil nalogo na kvadratnem trgu z elipsastim parkom v sredini projektirati najboljšo možno vmesno sprehajalno pot, katere oblika naj bi predstavljala najboljši možni kompromis med ravno in ukrivljeno obliko obeh mejnih površin; kompromisno rešitev je poiskal kot geometrijsko

mesto razpolovišč daljic, ležečih na radialnih žarkih iz središča kvadrata, z enim krajiščem na elipsi in drugim na kvadratu (Slika 9):



Slika 9. "Elipsasti kvadrat" – najboljša srednja pot med elipso in kvadratom; ni ne elipsa ne lomljenka, ampak je neka analitično težje izrazljiva sklenjena krivulja.

$\mathcal{LP}$ naj bi bila, po definiciji, rešitev Problema 2. Vendar, ali to tudi dejansko je? Matematiki vemo, da je mogoče definirati tudi stvari, ki jih ni, kot na primer okrogel kvadrat, ali pa množico vseh množic. Zato je na mestu vprašanje:

Ali je $\mathcal{LP}$ dejansko natančna reprodukcija tistega, kar vidimo z določene zorne točke? Kaj če je tudi $\mathcal{LP}$ le približek rešitve v bistvu nerešljivega problema? Se da to, kar vidimo, dejansko popolnoma zvesto preslikati na ravnino slike, ali pa se moramo (kot v primeru takšne ali drugačne projekcije globusa na ravno ploskev) zadovoljiti le z določenim približkom rešitve? Ali $\mathcal{LP}$ res omogoča, kar od nje pričakujemo (tj. natančno upodabljanje videnega), ali pa v določenih primerih odpove? Ali so možni kakšni drugačni sistemi upodabljanja 3D-prizorov na 2D-ploskvi, ki še bolje ustrezajo temu, kar dejansko vidimo pred seboj?

Da ta vprašanja niso iz trte izvita, lepo kaže naslednji primer oz. miselni poskus: Ali vzporednice opazovanega prizora v smeri levo-desno res vselej vidimo kot vzporedne črte, kot to predpostavlja teorija $\mathcal{LP}$? Če se na primer postavite naravnost pred visok in zelo dolg blok z ravno streho, ki na levi in desni ubeži vašemu pogledu, ali je obris strehe bolj podoben grafu funkcije $f(x) = |1 - x|$ ali krožnemu loku $g(x) = \frac{1}{10}(1 - x)^2$?

$\mathcal{LP}$ izhaja iz predpostavke, da opazovalec gleda prizor iz ene same zorne točke in z enim samim očesom. To je vsekakor poenostavljen model resničnega gledanja. V resnici je naše videnje in občutek prostorske globine rezultat dveh različnih slik, ki prihajata v dvojno oko in ki ju procesirajo naši možgani oziroma um. Tega ni mogoče reproducirati na nobeni sliki. Videnje ni le mehanični akt zaznavanja, podvržen zgolj zakonom optike in

geometrije, ampak je v njem vselej prisotna tudi intenzivna miselna dejavnost (glej 2. poglavje: *Vision as data-processing*, str. 11-20 v [5]). Videnje je vselej tesno povezano z mišljenjem in interpretacijo vidnega. Dva človeka lahko gledata isto, pa ne vidita istega.

S tem se še nekako lahko sprijaznimo. Naslednje vprašanje, ki ga je treba zastaviti, in so ga številni dejansko tudi zastavili, pa je: *Ali je $\mathcal{LP}$ vsaj geometrijsko oziroma optično povsem korektna?* Spomnimo se, da s pomočjo horizonta in regulacijskih črt lahko natančno določimo dolžine navpičnih (in horizontalnih) črt na sliki, narisanih v $\mathcal{LP}$. Nekateri $\mathcal{LP}$ celo definirajo kot sredstvo za določanje razmerij med velikostmi objektov na različnih položajih v prostoru. Pa je to sredstvo dejansko matematično povsem korektno? Ali z njegovo pomočjo vselej dobimo pravilne rezultate? Ni nobenih sistemskih odstopanj od pravih vrednosti?

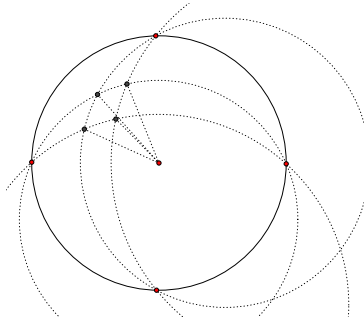
Evklidov osmi izrek iz njegove *Optike* jasno pove, da zaznana velikost predmeta ni povezana z njegovo oddaljenostjo od očesa s preprostim razmerjem. Navidezna razlika v velikosti med dvema enakima objektoma, zaznanimi na različnih razdaljah, ni določena z razmerjem teh razdalj, ampak z razmerjem ustreznih kotov, pod katerima vidimo predmeta. Če renesansa ne bi zamolčala tega Evklidovega spoznanja, bi morala priznati, da je ustvarjanje povsem zveste perspektivne slike nemogoče delo, saj sfere ni mogoče zravnati v ravnino ([9]). Evklidova "perspectiva naturalis" je skušala formulirati zakone naravnega videnja, utemeljene na optiki. Renesana "perspectiva artificialis" postulira načela, kako naj rišemo, da bomo lahko računali razmerja velikosti predmetov (zavedajoč se kvantitativne napake, izvirajoče iz dejstva, da enakim kotom ne ustrezajo enake projekcije ustreznih lokov na ravnino slike).

Ali ravne črte v naravi res vidimo kot povsem ravne? Tudi to ni vselej res. O tem se lahko prepričamo, če razmislimo, kako bi bil videti zelo visok nebotičnik, ki bi ga gledali iz nasprotnega nebotičnika nekje v višini sredine prvega. Nikjer ne bi videli zlomljenih linij. Če bi slikarji hoteli zvesteje risati, kar vidimo, bi torej (vsaj pri risanju zelo razsežnih objektov) morali risati premice kot ukrivljene črte. Paradoks, da so lahko ravne črte videti kot ukrivljene, in da ukrivljene črte lahko vidimo kot ravne, je bil v antiki dobro znan.

V učbenikih $\mathcal{LP}$, katerih avtorji se zavedajo omejitev $\mathcal{LP}$, najdemo opozorila, da naj rišemo le predmete znotraj zornega kota $30 + 30$ stopinj levo in desno od zorne premice, saj so sicer onstran tega zornega kota, če strogo upoštevamo pravila $\mathcal{LP}$, izkrivljanja od dejansko vidnega prevelika. To pravilo si velja zapomniti.

Krivočrtna $\mathcal{P}$

Primer risanja nebotičnika (omenjen na koncu predprejšnjega razdelka) dejansko presega domet $\mathcal{LP}$. Bolje ga naslavlja *krivočrtna* (tudi: *ukriviljena*, *krivuljna*) $\mathcal{P}$ (angl. curvilinear perspective), iznajdena v šestdesetih letih 20. stoletja ([4]), pri kateri se premice prizora ne preslikujejo v premice na sliki, ampak bolj na nekakšno krivočrtno mrežo. Tako imamo na primer pri krivočrtni petbežiščni perspektivi bežišča v središču kroga oz. sfere ter v severnem in južnem polu ter točki na vzhodu in zahodu (Slika 10).



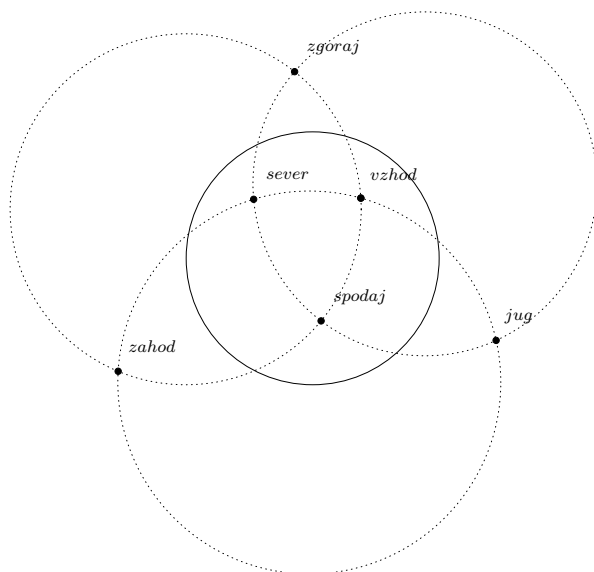
Slika 10. $\mathcal{P}$ s petimi bežišči.

Obstaja tudi krivočrtna perspektiva s 6 bežišči oziroma tremi pari točk, v katerih se stekajo krivulje: zgoraj-spodaj, sever-jug, vzhod-zahod. Navadno so le tri od njih (na primer sever, vzhod in spodaj) znotraj kroga, ki ustreza horizontu oziroma obodu zornega stožca (Slika 11). Uporabimo jo lahko na primer za sliko kocke s tremi četvericami ukrivljenih stranic; vsaka četverica je naslikana s krožnimi loki med pari bežišč sever-jug, vzhod-zahod in zgoraj-spodaj. S tem smo tudi (še enkrat) odgovorili negativno na vprašanje, ali je $\mathcal{LP}$ res sposobna vselej prikazati zvesto sliko videnega; včasih to nalogo bolje opravi krivočrtna $\mathcal{P}$.

Linearna perspektiva in dinamična geometrija

Pri učenju linearne perspektive si lahko pomagamo s sodobnimi računalniškimi orodji dinamične geometrije (na primer GeoGebra, Cinderella itd.), ki so danes že prosto dostopna na spletu. Po drugi strani pa na ta način tem orodjem damo neko konkretno smiselno uporabo. Perspektivo lahko uporabimo kot dovolj privlačno temo, da se bodo učenci in dijaki raje naučili uporabljati ta orodja. Najprej jim povemo tole:

Točke $A, B, C, \dots$ v dinamičnih konstrukcijah so proste, pol-vezane (na neko premico p), kar označimo na primer takole: $A \in p$, ali pa leže v preseku

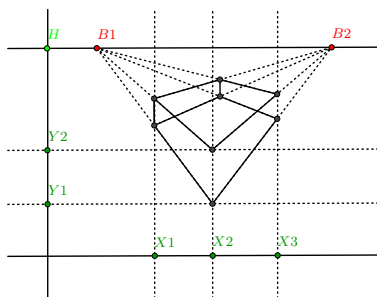


Slika 11. Krivočrtna $\mathcal{P}$ s tremi pari bežišč.

dveh premic p in q , kar označimo na primer takole: $A = p \wedge q$. Premice $p, q, r \dots$ v dinamičnih konstrukcijah so prav tako lahko proste, polvezane (gredo skozi neko točko A , kar zapišemo kot: $A \in p$, ali pa so povsem določene z že konstruiranimi točkami in premicami): če je p določena z dvema točkama A in B , to zapišemo takole: $p = A \vee B$, če je p pravokotnica na premico q in gre skozi točko A , to pišemo kot: $p \perp q, A \in p$; če je p vzporednica k premici q in gre skozi točko A , pišemo: $p \parallel q; A \in p$.

Zdaj jim lahko v razredu damo naloge na primer naslednjega tipa:

Naloga 1. Na navpični osi y pravokotnega koordinatnega sistema izberi delno vezano točko H , skozi jo postavi vzporednico h (horizont) k osi x . Na njej izberi dve delno prosti točki – bežišči B_1 in B_2 . Izberi še tri delno vezane točke X_1, X_2, X_3 na osi x in dve delno vezani točki Y_1, Y_2 na osi y (Slika 12). Zdaj lahko določiš položaje vseh ostalih točk kocke. Opazuj, kako se slika spreminja, če spreminjaš položaj točke H in s tem višino horizonta, ali medsebojno razdaljo bežišč B_1 in B_2 na horizontu, ali položaje zelenih točk na oseh.



Slika 12: Spreminjanje položaja pol-vezanih točk na oseh ali bežišč na horizontu spreminja obliko kocke, ki pa ves čas ostaja narisana v dvobežiščni $\mathcal{P}$.

Bralci bodo po zgornjem zgledu zagotovo zlahka sami razvili še druge primere uporabe dinamične geometrije pri učenju $\mathcal{LP}$, ki se z malo znanja GeoGebre lahko močno približajo prepričljivim in uporabnim dinamičnim perspektivnim prikazom hiš, trgov, ulic, kvadratnih tlakovanj, stopnic ter drugih objektov in prizorov.

LITERATURA

- [1] Joseph D'Amelio: *Perspective Drawing Handbook*, Unabridged Dover republication (2004) of the edition published by Tudor publ. comp., New York, [1964].
- [2] Kirsti Andersen: *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. Springer, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-48946-9>
- [3] Santiago Arcas, José Fernando Arcas, Isabel Gonzáles: *Mastering Perspective for Beginners*, Könemann Verlagsgesellschaft mbH, 2001.
- [4] André Barre and Albert Flocon, *La Perspective curviligne*, Flammarion, Éditeur Paris, 1968.
- [5] Bruno Ernst, *Optical Illusions*, Taschen Verlag GmbH, 1989.
- [6] The Optics of Euclid, translated by Harry Edwin Burton, *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 35, No. 5, May 1945.
- [7] Koenderink, J. J., Fundamentals of Bicentric Perspective, Proceedings of the International Conference on Research in Computer Science and Control, 1992.
- [8] Branko Grünbaum, *Configurations of Points and Lines*, American Mathematical Soc., 2009.
- [9] Erwin Panofsky, *Perspective as Symbolic Form*, Urzone, Inc, 1991(po predavanjih iz let [1924 – 25]).
- [10] Tomaž Pisanski, Brigitte Servatius, *Configurations from a Graphical Viewpoint*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, 2013.
- [11] Uršula Berlot Pompe, *Linearna perspektiva v teoriji in praksi*, ALU UL, Ljubljana 2023. (e-knjiga)
- [12] Henk Rotgans, *Risanje prostora* Ljubljana, Pegaz International, 1993.