

FOKUSIRAN GAUSSOV SNOP

ANDREJ PETELIN¹

¹Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

Ključne besede: Fourierova optika, preslikave snopov svetlobe, skalarni snopi svetlobe, vektorski snopi svetlobe

V tem prispevku izpeljemo vektorsko metodo za izračun elektromagnetnega polja v okolici gorišča mikroskopskega objektiva z veliko numerično aperturo (NA), ki ga uporabimo za fokusiranje Gaussovega snopa. Pokažemo, da se polarizacijske lastnosti svetlobe v gorišču močno razlikujejo od snopa, ki ga fokusiramo z lečo pri majhnih NA, pri čemer uporabimo skalarno teorijo uklona na leči ali paraksialno aproksimacijo za izračun polja.

FOCUSED GAUSSIAN BEAM

In this paper, we derive a vector method for calculating the electromagnetic field around the focal point of a large numerical aperture (NA) microscope objective used to focus a Gaussian beam. We show that the polarization properties of light at the focal point are significantly different from light focused by a small NA lens, where we use the scalar diffraction theory or the paraxial approximation to compute the field.

1. Uvod

Močno fokusirani vektorski snopi svetlobe imajo zanimive in uporabne lastnosti. Za razliko od skalarnih snopov svetlobe, kjer je polarizacija svetlobe konstantna in kaže smer vektorja polarizacije (oziroma smer električnega polja) ortogonalno na smer širjenja snopa (z), je v močno fokusiranih vektorskih snopih prisotna tudi z -komponenta polja. Ta pojav omogoča uporabo snopov v superresolucijskih tehnikah, s katerimi pretentamo uklonsko limito in izboljšamo ločljivost, ali v optičnih pincetah za manipuliranje majhnih delcev v fiziki mehke snovi.

V tem prispevku se omejimo na fizikalni opis vektorskih snopov svetlobe, predvsem z vidika formiranja snopov z uporabo leč, ki delujejo pri velikih numeričnih aperturah (NA). V nadaljevanju opišemo, kako preslikave snopov svetlobe razumemo v okviru Fourierove optike, nato izpeljemo diskretni skalarni opis preslikav snopov svetlobe, na koncu pa model dopolnimo in izpeljemo diskretni vektorski opis transformacije snopov svetlobe. Model nato uporabimo za izračun elektromagnetnega polja v gorišču leče pri preslikavi Gaussovega snopa.

2. Fourierova optika

Pri širjenju svetlobe v homogenem mediju gre za sklopljeno nihanje električnega in magnetnega polja, ki ju v izotropnem mediju opisuje valovna enačba:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

pri čemer je $\mathbf{E}$ električno polje, $\mathbf{B}$ je magnetno polje, $c = c_0/n$ je svetlobna hitrost v danem mediju z lomnim količnikom n in c_0 je svetlobna hitrost v vakuumu. Rešitve valovne enačbe so ravni valovi, ki jih opišemo z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$ in jih zapišemo kot $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$ in $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$, pri čemer je ω krožna frekvenca valovanja. V optiki se velikokrat zadovoljimo s skalarno aproksimacijo in namesto z vektorskimi količinami $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ valovanje opišemo s skalarnim poljem $u(\mathbf{r}, t)$, ki je rešitev skalarne valovne enačbe:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Na prvi pogled se zdi tak pristop identičen vektorskemu opisu polja, saj je valovna enačba, razpisana po komponentah, set skalarnih valovnih enačb. Vektorsko rešitev dobimo z množenjem skalarne polja z ustreznim vektorjem polarizacije, na primer $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{n}} \mathbf{E}_0 u(\mathbf{r}, t)$, kjer je faktor $\sqrt{\frac{2}{n}}$ posledica normalizacije brezdimenzijskega skalarne polja $u(\mathbf{r}, t)$, kot bomo videli nekoliko kasneje. V učbenikih po navadi tak pristop argumentirajo z besedami: "Če nas polarizacija svetlobe ne zanima, uporabimo skalarno aproksimacijo valovne enačbe, ki da zadovoljive rezultate." Zavedati se namreč moramo, da za polje $u(\mathbf{r}, t)$, ki reši skalarno valovno enačbo (3), vektorsko polje $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{n}} \mathbf{E}_0 u(\mathbf{r}, t)$ sicer reši valovno enačbo (1), vendar v tem primeru ni nujno, da tako polje zadošča vsem Maxwellovim enačbam, na primer, da mora biti divergenca polja enaka nič $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. V primeru ravnega vala iz $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ sledi, da mora biti električno polje pravokotno na valovni vektor ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$). Za širjenje v smeri z ima vektor električnega polja $\mathbf{E}_0$ zgolj x in y komponenti. Za omejen snop svetlobe, ki se širi v smeri z , pa na splošno to ni res, zato ne moremo množiti skalarne polja s konstantnim vektorjem $\mathbf{E}_0$ in pričakovati, da pravilno opisujemo vektorsko polje svetlobe. Kasneje pokažemo, da je za vektorsko obravnavo vseeno

uporaben opis s skalarnim poljem, zato si najprej oglejmo, kako preslikave snopov svetlobe opišemo s skalarno teorijo.

V okviru skalarne aproksimacije se je razvila kompletna veja optike imenovana Fourierova optika s številnimi uporabnimi rezultati, od principa superpozicije, Fresnelovega uklonskega integrala do preslikav z lečami. Širjenje prostorsko omejenih svetlobnih snopov lahko opišemo s principom superpozicije, ki pravi, da snop svetlobe, ki se širi v smeri osi z , lahko zapišemo kot seštevek ravnih valov [2]:

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(k_x, k_y) e^{ik_x x + ik_y y} e^{iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y, \quad (4)$$

pri čemer smo upoštevali, da polje zapišemo kot $u(\mathbf{r}, t) = \Re u(x, y, z) e^{-i\omega t}$, kjer je $u(x, y, z)$ krajevni del polja $u(\mathbf{r}, t)$ in je $k = \omega/c$ valovno število. Vidimo, da je polje v izhodišču $u(x, y, 0)$ inverzna Fourierova transformacija funkcije $u(k_x, k_y)$:

$$u(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(k_x, k_y) e^{ik_x x + ik_y y} dk_x dk_y = \mathcal{F}^{-1} \{u(k_x, k_y)\}, \quad (5)$$

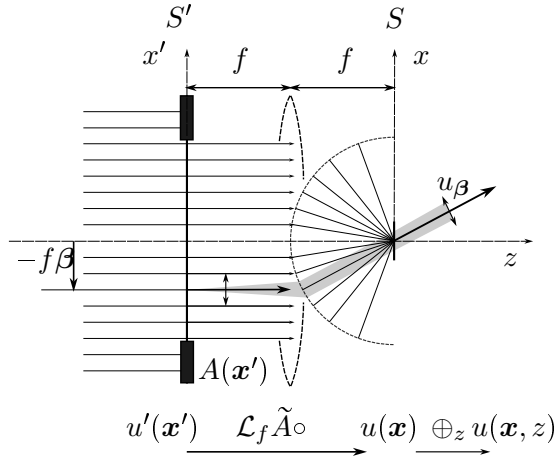
iz česar sledi $u(k_x, k_y) = \mathcal{F} \{u(x, y, 0)\}$, kjer je $\mathcal{F}$ Fourierova transformacija. S principom superpozicije lahko torej izračunamo polje pri poljubni oddaljenosti z od izhodišča, če poznamo polje v izhodišču $u(x, y, 0)$:

$$u(x, y, z) = \oplus_z \{u(x, y, 0)\} = \mathcal{F}^{-1} \{\Phi_z(k_x, k_y) \mathcal{F} \{u(x, y, 0)\}\}, \quad (6)$$

pri čemer smo vpeljali operator širjenja svetlobe $\oplus_z$. Z dvodimenzionalno Fourierovo transformacijo $\mathcal{F}$ polja v izhodišču koordinatnega sistema $u(x, y, 0)$ dobimo amplitude $u(k_x, k_y)$ ravnih valov, iz katerih je sestavljeno polje, nato za izračun polja pri izbrani koordinati z najprej posamezni ravni valovi pridobijo ustrezen fazni premik $\Phi_z(k_x, k_y) = e^{iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}$, z inverzno Fourierovo transformacijo $\mathcal{F}^{-1}$ pa rekonstruiramo polje po principu superpozicije.

Potrebujemo še operator preslikave leče, ki ga izpeljemo z uporabo Fresnelovega uklonskega integrala. Za idealno (tanko) lečo goriščne razdalje f , ki jo postavimo na razdalji f od svetlobnega polja, ki ga opiše funkcija $u'(x', y')$, dobimo v gorišču leče Fourierovo transformacijo polja u' [2]:

$$u(x, y) = \mathcal{L}_f \{u'(x', y')\} = \frac{1}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u'(x', y') e^{-ik_0 x x' / f - ik_0 y y' / f} dx' dy'. \quad (7)$$



Slika 1. Shema preslikave ravnega vala z idealno lečo. Zaslonka A v ravnini S' določa numerično aperturo (NA) leče. Paralelni žarki se zberejo v gorišču leče v ravnini S . Pri majhnih vrednosti NA lahko preslikavo polja $u'(\mathbf{x}')$ izračunamo z operatorjem $\mathcal{L}_f$, za izračun polja v okolici gorišča $u(\mathbf{x}, z)$ pa uporabimo operator širjenja $\oplus_z$. Princip preslikave preko Fourierove transformacije je možno uporabiti tudi pri velikih vrednosti NA, kjer dopolnimo preslikavo $\mathcal{L}_f$ tako, da upoštevamo vektorsko naravo svetlobe. Pri vektorski obravnavi posameznim komponentam skalarne polja u_β pripišemo ustrezen vektor polarizacije, kot je to razloženo v poglavju 4.

V okviru skalarne teorije lahko torej z uporabo enačbe za preslikavo leče (7) v kombinaciji z enačbo 6 izračunamo poljubne transformacije z lečami in širjenja polja v praznem prostoru. V našem primeru nas zanima oblika polja v okolici gorišča mikroskopskega objektiva (leče) v ravnini S pri preslikavah polja na vstopni strani objektiva v ravnini S' (slika 1). V ravnini S' se nahaja zaslonka z amplitudno prepustnostjo $A(x', y')$. Polje v gorišču leče je tako

$$u(x, y, z) = \oplus_z \{ \mathcal{L}_f \{ \tilde{A} \circ u'(x', y') \} \}, \quad (8)$$

pri čemer operator $\tilde{A} \circ$ predstavlja prehod preko zaslonke. V prvem približku to operacijo izvedemo preprosto z množenjem polja $u'(x, y)$ s funkcijo prepustnosti odprtine $A(x, y)$. V nadaljevanju si bomo ogledali, kako izračun (enačba 8) opravimo z uporabo diskretne Fourierove transformacije, nato pa bomo tehniko razširili še na vektorska polja in izračunali električne in magnetne komponente polja v okolici gorišča leče.

3. Skalarni opis

V nadaljevanju za poenostavitev zapisa vpeljimo krajevni vektor $\mathbf{x} = (x, y)$, prečni vektor širjenja

$$\boldsymbol{\beta} = (k_x/k_0, k_y/k_0) = n_i(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi) \quad (9)$$

in konstanto širjenja $\alpha = k_z/k_0 = \sqrt{n_i^2 - \beta^2} = n_i \cos \theta$, kjer θ kot med smerjo valovnega vektorja in osjo z , ϕ je kot med smerjo projekcije valovnega vektorja na ravnino xy in smerjo osi x , $k_0 = \omega/c_0$, n_i pa je lomni količnik. Skalarnemu polju $u(\mathbf{x})$ pripišemo matriko $\tilde{u}(\mathbf{x})$ velikosti $N \times N$, kjer je $\mathbf{x} = p(n, m)$, p je velikost slikovne točke, m in n pa sta ustrezna indeksa v matriki, $u_{m,n}$ pa je element te matrike. Tu smo upoštevali obrnjenost koordinatnega sistema v matrikah, saj $u_{0,n} = u(x, y = 0)$ predstavlja elemente prve (zgornje) vrstice (os x), $u_{m,0} = u(x = 0, y)$ pa prvi (levi) stolpec matrike (os y). Upošteevamo tudi, da elementi matrike $u_{N-m, N-n} = u_{-m, -n}$ predstavljajo polje pri koordinati $-\mathbf{x} = -p(n, m)$.

Izbrali smo si računsko območje enakomernih dimenzij v smeri x in y . To seveda ni potrebno, vendar močno poenostavi implementacijo in interpretacijo rezultatov. V primeru kvadratne slikovne točke je torej slika tudi kvadratne oblike $L \times L$, pri čemer je $L = Np$. Obenem je v recipročnem prostoru slikovna točka tudi kvadratne oblike, kar poenostavi vizualizacijo polja. V recipročnem prostoru ravne valove karakteriziramo z vektorjem $\boldsymbol{\beta} = \frac{2\pi}{Lk_0}(l, k)$, pri čemer sta k in l indeksa komponent diskretne Fourierove transformacije. Fourierova transformiranka polja je matrika $\hat{u}(\boldsymbol{\beta})$, elemente matrike pa označimo z $u_{k,l}$. V nadaljevanju z $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ in c označimo matriko, vektor in skalar, v tem vrstnem redu. $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{a}}$ in $\tilde{c}$ so $N \times N$ matrike matrik, vektorjev in skalarjev za množenje v realnem prostoru, medtem ko so $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{a}}$ in $\hat{c}$ $N \times N$ matrike matrik, vektorjev in skalarjev za množenje v recipročnem prostoru, v tem vrstnem redu.

Pri prehodu na diskreten opis namesto integrala pridemo vsoto, zato je polje sestavljeno iz končnega števila ravnih valov. Princip superpozicije (enačba 4) se v tem primeru glasi:

$$u(\mathbf{x}, z) = \sum_{\boldsymbol{\beta}} a_{\boldsymbol{\beta}} e^{ik_0 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} + ik_0 \alpha z} \quad (10)$$

pri čemer vsota teče po vseh ravnih valovih z amplitudo $a_{\boldsymbol{\beta}}$. Če v enačbo 10 vstavimo $z = 0$, dobimo dvodimenzionalno diskretno Fourierovo trans-

formacijo. Komponente matrike $\tilde{u}(\mathbf{x})$ dobimo z inverzno Fourierovo transformacijo polja v recipročnem prostoru $\hat{u}(\boldsymbol{\beta})$:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi}{N}mk} e^{\frac{i2\pi}{N}nl} \hat{u}(\boldsymbol{\beta}), \quad (11)$$

medtem ko komponente polja v recipročnem prostoru $\hat{u}(\boldsymbol{\beta})$ definiramo kot Fourierovo transformacijo polja $\tilde{u}(\mathbf{x})$:

$$\hat{u}(\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{F}\tilde{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi}{N}mk} e^{-\frac{i2\pi}{N}nl} \tilde{u}(\mathbf{x}), \quad (12)$$

pri čemer sta $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}^{-1}$ diskretna Fourierova transformacija in njen inverz. V tipičnih numeričnih implementacijah (recimo v programskem jeziku python) sta to funkciji `fft2` in `ifft2`. Izbira normalizacije Fourierove transformacije je sicer poljubna, vendar je prikladno izbrati simetrično normalizacijo. Amplitude $a_{\boldsymbol{\beta}}$ v enačbi 10 so pri tej normalizaciji $a_{\boldsymbol{\beta}} = u_{k,l}/N$. Operator širjenja svetlobe $\oplus_z$ je:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, z) = \oplus_z \tilde{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathcal{F}^{-1} \hat{\Phi}_z \circ \mathcal{F} \tilde{u}(\mathbf{x}, 0), \quad (13)$$

pri čemer je $\hat{\Phi}_z = e^{izk_0\hat{\alpha}}$ fazna matrika velikosti $N \times N$, ki jo dobimo iz matrike $\hat{\alpha} = \sqrt{n_i^2 - \beta^2}$, z o pa označimo Hadamardov produkt, ki ga dobimo tako, da zmnožimo istoležne elemente matrik $\hat{\Phi}_z$ in $\hat{u}(\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{F}\tilde{u}(\mathbf{x}, 0)$. Na podoben način lahko prevedemo uklonski integral (enačba 7) za preslikavo leče in dobimo:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_f \tilde{u}'(\mathbf{x}') = \frac{p'}{ip} \mathcal{F} \tilde{u}'(\mathbf{x}'), \quad (14)$$

pri čemer smo vpeljali velikost slikovne točke na vstopni strani leče kot $p' = \frac{f2\pi}{Lk_0}$. Krajevni vektor $\mathbf{x}'$ namreč lahko povežemo z vektorjem $\boldsymbol{\beta}$, velja namreč $\mathbf{x}' = -f\boldsymbol{\beta}$. Izvor svetlobe, ki ga postavimo v $\mathbf{x}' = -f\boldsymbol{\beta}$ v gorišču leče na vstopni strani leče v koordinatnem sistemu S' ustvari ravni val z vektorjem $\boldsymbol{\beta}$ v gorišču na izstopni strani leče v koordinatnem sistemu S .

Pri numeričnih računskih metodah navadno zapišemo enačbe z brezdimenzijskimi količinami. Skalarni numerični model, ki smo ga izpeljali, zapišimo v kontekstu kasnejšega vektorskega modela, kjer vpeljemo kompleksno električno polje kot $\mathbf{E} = E_0 \boldsymbol{\mathcal{E}}$, pri čemer je E_0 poljubni faktor skaliranja, recimo $E_0 = 1 \text{ V/m}$, za pretvorbo med brezdimenzijskim električnim poljem $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ in pravim poljem $\mathbf{E}$. Intenziteto svetlobe (gostoto svetlobnega toka) za

ravni val zapišemo kot $I = \frac{1}{2Z_i}|\mathbf{E}|^2$, pri čemer je $Z_i = Z_0/n_i$ impedanca medija, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377 \, \Omega$ pa je impedanca praznega prostora. V numeričnem modelu, ki ga bomo izpeljali, lahko torej intenziteto svetlobe vpeljemo kot $I = I_0\mathcal{I}$, pri čemer je $\mathcal{I} = \frac{n_i}{2}|\mathcal{E}|^2$ brezdimenzijska intenziteta in $I_0 = \frac{|E_0|^2}{Z_0}$ ustrezen normalizacijski faktor. V skalarini aproksimaciji lahko torej vpeljemo intenziteto kot $\mathcal{I} = |u|^2$, s čimer tudi privzamemo zvezo med amplitudo skalarne polja in amplitudo električnega polja $u = \sqrt{\frac{n_i}{2}}|\mathcal{E}|$. Intenziteto skalarne polja zato definiramo kot

$$\tilde{\mathcal{I}}(\mathbf{x}) = |\tilde{u}(\mathbf{x})|^2 = \tilde{u}(\mathbf{x})^* \circ \tilde{u}(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Če želimo polju u in intenziteti $\mathcal{I}$ pripisati enote, pa množimo polje z E_0 , intenziteto pa z I_0 .

Preslikajmo sedaj kolimiran Gaussov snop svetlobe, katerega grlo postavimo v gorišče leče. Da bo primer bolj zanimiv, privzemimo, da za preslikavo uporabimo imerzijski objektiv, ki preslika svetlobo iz zraka v snov z lomnim količnikom $n_i = 1, 5$. Imerzijski objektivni so primerni za preslikave pri velikih numeričnih aperturah. Z njimi lahko stisnemo snop svetlobe do najmanjše možne velikosti, ki je omejena z uklonsko limito. Goriščna razdalja objektiva naj bo $f = 4 \, \text{mm}$ in $\text{NA} = 1,4$, kar ustreza mikroskopski povečavi $M = f_t/f = 50$, če tak objektiv uporabimo v mikroskopu, prilagojenem na neskončnost. Mikroskop namreč sestoji iz objektiva in leče z goriščno razdaljo $f_t = 200 \, \text{mm}$, ki skupaj tvorita optični sistem.

Najprej si moramo izbrati želeno velikost slikovne točke p v ravnini S in velikost matrike $N \times N$. Ker želimo izračunati polje stisnjenih snopov, moramo za velikost slikovne točke izbrati vrednosti, ki so manjše od valovne dolžine svetlobe. Izberimo $\lambda = 500 \, \text{nm}$, $p = 40 \, \text{nm}$ in $N = 200$. Pri tej izbiri je slika velikosti $L = 8 \, \mu\text{m}$. Ta izbira velikosti slike v kombinaciji z lečo definira velikost slike v recipročnem prostoru $L' = p'N = 50 \, \text{mm}$ in premer odprtine na vstopni strani objektiva $d = 2f\text{NA} = 11 \, \text{mm}$.

Najprej ustvarimo polje na vstopni strani. Da bo primer bolj zanimiv, zapišimo Gaussov snop, ki osvetljuje lečo zunaj osi preslikave:

$$u'(\mathbf{x}') = e^{-(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0)^2/w_0'^2}, \quad (16)$$

pri čemer izberemo $\mathbf{x}'_0 = (-4, 0) \, \text{mm}$ in $w_0' = 1 \, \text{mm}$. Gre torej za preslikavo, pri kateri, glede na geometrijsko interpretacijo preslikave, dobimo polje, ki se v ravnini S širi pod kotom $\theta = \arcsin \frac{x_0}{nf} \approx 42^\circ$. V numerični implementaciji zapišemo matriko $u'_{m,n}$, pri čemer moramo upoštevati, da

podatke v matrikah zapišemo po kvadrantih. To je posledica uporabe diskretnih Fourierove transformacije, kjer so v recipročnem prostoru zastopane tako pozitivne kot tudi negativne frekvence. Zato je v prvem kvadrantu polje u' pri koordinatah $x' \geq 0$ in $y' \geq 0$, v drugem kvadrantu je polje u' pri koordinatah $x' < 0$ in $y' \geq 0$, v tretjem kvadrantu imamo $x' \geq 0$ in $y' < 0$ in v četrtem kvadrantu $x' < 0$ in $y' < 0$. Za vizualizacijo matrike je primerno predstaviti koordinatno izhodišče matrike $u'_{0,0}$ v center slike, kar v programskem okolju python naredimo s funkcijo 'fftshift'. Na sliki 2a so prikazani polje in oblika zaslonke pred lečo v matričnem zapisu (m, n) in ustrezna vizualizacija v koordinatnem sistemu S' s koordinatami $\mathbf{x}' = (x, y)$.

Polje najprej transformiramo s preslikavo leče in upoštevamo obliko zaslonke pred lečo. Na sliki 2b je prikazan realni del polja $i\tilde{u}(\mathbf{x})$ in intenziteta svetlobe v gorišču leče, ki ju izračunamo s preslikavo

$$i\tilde{u}(\mathbf{x}) = i\mathcal{L}_f \tilde{A} \circ \tilde{u}'(\mathbf{x}') = \frac{p'}{p} \mathcal{F} \tilde{A} \circ \tilde{u}'(\mathbf{x}'), \quad (17)$$

pri čemer množenje z i uporabimo zaradi lažje primerjave relativnih faz med poljema na obeh straneh preslikave. Polje $i\tilde{u}(\mathbf{x})$ je zopet Gaussova funkcija, kar je lastnost Fourierove transformacije na Gaussovi funkciji. Primerjamo lahko tudi velikost grla in amplitudo polja z rezultatom, ki ga dobimo z uporabo znanih enačb za preslikave Gaussovih snopov (v okviru paraksialne aproksimacije). Pozicija grla z_2 je podana z enačbo

$$z_2 = \frac{z_1 f^2}{z_1^2 + z_0^2} \quad (18)$$

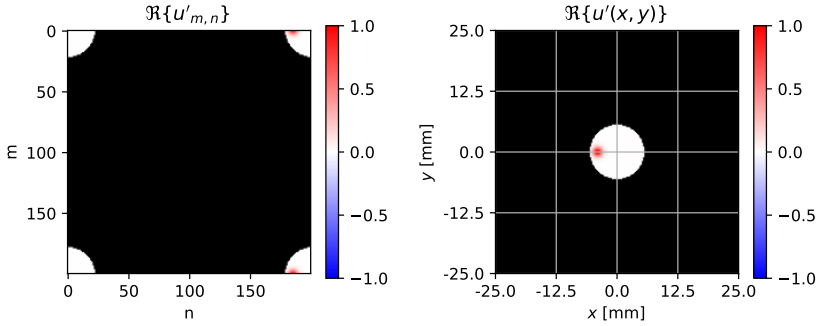
pri čemer je $z_0 = kw_0'^2/2$ dolžina grla na vstopni strani in z_1 pozicija grla na vstopni strani. Širina grla na izstopni strani leče je podana z

$$w_0 = w_0' \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \quad (19)$$

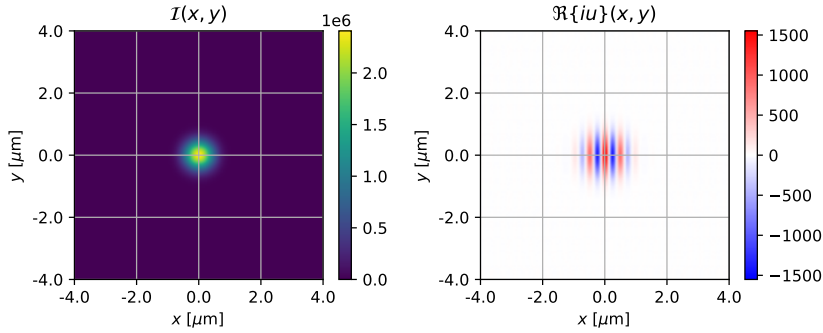
V našem primeru je grlo postavljeno v gorišče leče na vstopni strani, zato je $z_1 = 0$ in dobimo $w_0 = w_0' \frac{f}{z_0} = \frac{f\lambda}{\pi w_0'} = \frac{2}{\pi} \mu\text{m}$. Amplituda polja v grlu je tako za faktor $w_0'/w_0 = \frac{\pi}{2} 10^3$ večja kot v izhodišču, kjer smo izbrali polje z intenziteto $\mathcal{I} = 1$ v centru grla, in je v skladu z izračunanim poljem prikazano na sliki 2. Za izračun polja zunaj goriščne ravnine uporabimo operator širjenja polja. Najprej izračunamo matriko $\hat{\alpha}$, katere elementi so

$$\alpha_{k,l} = \sqrt{n_i^2 - \frac{\lambda^2}{L^2}(k^2 + l^2)} \quad (20)$$

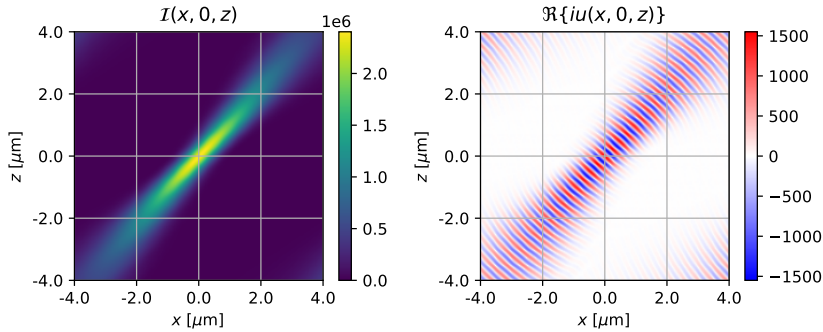
Fokusiran Gaussov snop



(a) Levo: prikaz vrednosti elementov matrike $\tilde{u}_{m,n}$. Desno: prikaz polja v sistemu (x', y') . S črno je označeno območje zaslonke objektiva ($\beta > \text{NA}$).



(b) Levo: intenziteta svetlobe v gorišču leče. Desno: Realni del amplitude polja v gorišču.



(c) Levo: prečni profil intenzitete. Desno: prečni profil realnega dela amplitude polja pri $y = 0$.

Slika 2. Preslikava Gaussovega snopa ($w'_0 = 1$ mm) z lečo ($f = 4$ mm). Center snopa je postavljen 4 mm iz osi leče. V gorišču se snop širi pod kotom 42° v mediju z lomnim količnikom $n_i = 1, 5$.

kjer indeksa matrike k in l tečeta od $-N/2$ do $N/2 - 1$, če je N sodo število. Nato izračunamo fazno matriko $\hat{\Phi}_z$, katere elementi so:

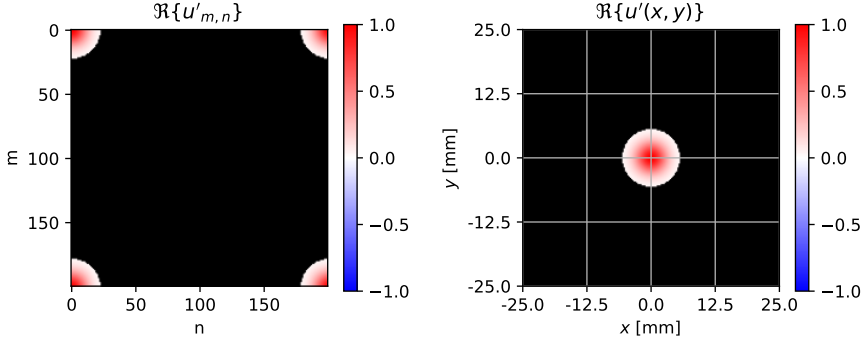
$$\Phi_{k,l} = e^{ik_0 z \alpha_{k,l}}. \quad (21)$$

Pri izračunu matrike je pomembno, da upoštevamo dejstvo, da niso vse komponente polja v recipročnem prostoru propagirajoči ravni valovi. Matrika $\hat{\alpha}$ je namreč realna samo za ravne valove, pri katerih velja $\beta < n_i$. V nasprotnem primeru je konstanta širjenja α kompleksna, s tem pa namesto ravnih valov dobimo eksponentno pojemajoča evanescenčna polja. Čeprav smo ustrezno filtriranje že opravili z zaslonko pred lečo, ki jo opiše matrika $\tilde{A}$, je treba za izboljšanje numerične stabilnosti tako filtriranje opraviti tudi v recipročnem prostoru komponent Fourierjeve transformiranke $\hat{u}$. To najlažje opravimo s tem, da postavimo komponente fazne matrike $\Phi_{k,l} = 0$ povsod, kjer je $\alpha_{k,l}$ kompleksen. Prečni profil polja prikazuje slika 2c, kjer vidimo pričakovano širjenje Gaussovega snopa.

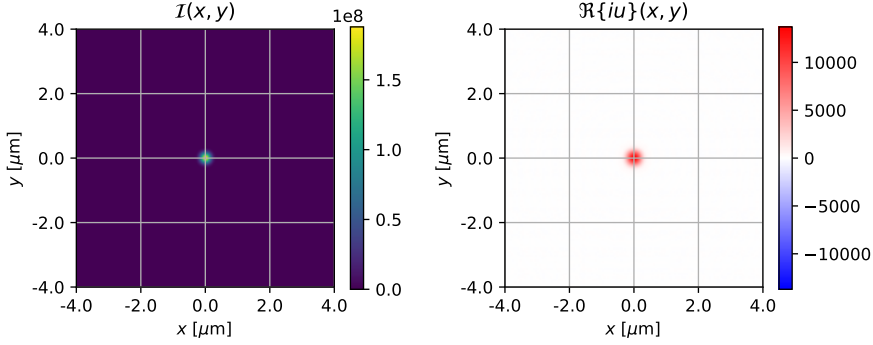
Numerični model, ki smo ga uporabili, ima v primerjavi z analitičnim modelom določene pomanjkljivosti. Zavedati se moramo, da lahko z numeričnim pristopom širjenje svetlobe opisujemo zgolj v okolici gorišč, torej v bližnjem polju. S tem, ko smo prešli na diskreten opis, smo namreč ustvarili periodične robne pogoje. Pri velikih oddaljenostih od grla lahko pride do interference s poljem iz sosednjih celic, ki so med seboj zamaknjene ravno za $L = 8 \mu\text{m}$. To je vidno v vogalih slike 2c, kjer zaradi periodičnih robnih pogojev pri koordinati $(x, z) = (-4, 4) \mu\text{m}$ vidimo prispevek polja, ki se nahaja na desnem robu pri $(x, z) = (4, 4) \mu\text{m}$.

Primer fokusiranja svetlobe, ki smo si ga izbrali na sliki 2, je še zmeraj znotraj omejitev skalarne aproksimacije. Poskusimo sedaj polje zbrati v še manjše območje. To dosežemo tako, da osvetlimo celotno odprtino leče s svetlobo. Gaussov snop na vstopni strani postavimo v izhodišče in ga razširimo na velikost $w'_0 = 3 \text{ mm}$. Pri teh pogojih majhen delež svetlobe že osvetljuje robove zaslonke, zato tukaj v rezultatih že pričakujemo vpliv uklona na odprtini. Poleg tega v tem primeru tudi vstopamo v režim, kjer postane uporaba skalarne teorije vprašljiva. Rezultati preslikave so prikazani na sliki 3. Komentiramo jih nekoliko kasneje, v kontekstu vektorske obravnave polja. V naslednjem poglavju si zato pogledamo, kako rezultate skalarne teorije "popravimo", da dobimo vektorski opis.

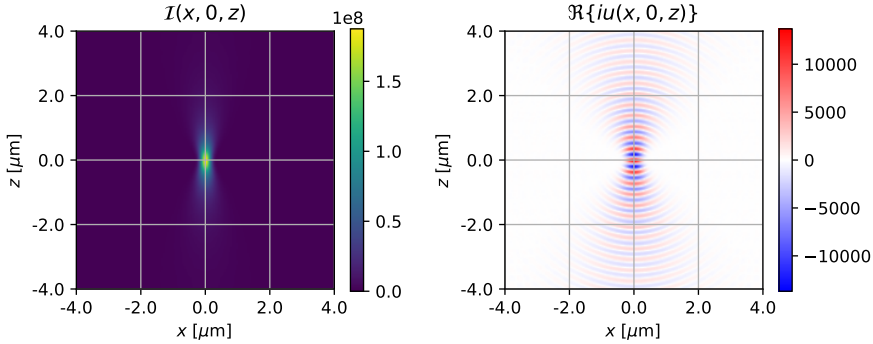
Fokusiran Gaussov snop



(a) Levo: prikaz vrednosti elementov matrike $\tilde{u}_{m,n}$. Desno: prikaz polja v sistemu (x', y') . S črno je označeno območje zaslonke objektiva ($\beta > \text{NA}$).



(b) Levo: intenziteta svetlobe v gorišču leče. Desno: Realni del amplitude polja v gorišču.



(c) Levo: prečni profil intenzitete. Desno: prečni profil realnega dela amplitude polja pri $y = 0$.

Slika 3. Preslikava Gaussovega snopa ($w'_0 = 3 \text{ mm}$) z lečo ($f = 4 \text{ mm}$). Center snopa je postavljen v osi leče, kar ustvari močno fokusiran snop svetlobe v gorišču leče.

4. Vektorski opis

Pri prehodu iz skalarne opisa na vektorski opis najprej definirajmo vektor polja, ki opiše tako električne kot magnetne komponente polja. Na prvi pogled se zdi, da mora biti vektor oblike $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)^T$, vendar niso vse komponente tega vektorja med seboj neodvisne. Iz $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ in $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ sledi, da ima ravni val dve možni lastni polarizaciji, obenem pa ima pri danem vektorju širjenja β valovni vektor dve možni projekciji na os z , torej polje, ki se širi v smeri osi z , in polje, ki se širi v nasprotni smeri. Možna so torej štiri lastna stanja širjenja, kar pa mora opisati vektor s štirimi komponentami. Širjenje svetlobe v poljubnem homogenem mediju lahko opišemo z Berremanovim matričnim formalizmom [1], kjer za vektorsko obravnavo širjenja svetlobe izberemo x in y komponenti električnega in magnetnega polja in vpeljemo t. i. Berremanov vektor $\psi = (E_x, H_y, E_y, -H_x)^T$. V tem delu bomo zaradi enostavnejše numerične implementacije vpeljali naslednji vektor $\mathbf{m} = (\mathcal{E}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{E}_y, \mathcal{H}_x)^T$, kjer smo vpeljali brezdimenzijske komponente $\mathcal{E}_x = E_x/E_0$, $\mathcal{E}_y = E_y/E_0$, $\mathcal{H}_x = Z_0 H_x/E_0$, $\mathcal{H}_y = Z_0 H_y/E_0$.

Najprej definirajmo intenziteto svetlobe, ki je povezana s Poyntingovim vektorjem $\mathbf{S}$. V naši brezdimenzijski notaciji vpeljimo torej Poyntingov vektor kot $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$, pri čemer velja $\mathbf{S} = I_0 \mathbf{S}$. Poyntingov vektor definira smer in jakost energijskega toka. Intenziteto svetlobe sedaj definirajmo v kontekstu meritve, kjer z ustrezno kamero izmerimo intenziteto v izbrani ravnini. Ker je normala ravnine v smeri osi z , je izmerjena intenziteta torej kar z -komponenta Poyntingovega vektorja:

$$\mathcal{I}(x) = \Re \mathcal{S}_z(x) = \frac{1}{2} |\Re (\mathcal{E}_x(x) \circ \mathcal{H}_y^*(x) - \mathcal{E}_y(x) \circ \mathcal{H}_x^*(x))|, \quad (22)$$

pri čemer vzamemo absolutno vrednost, saj lahko tok teče tudi v nasprotno smer. Vidimo, da za izračun intenzitete ne potrebujemo z -komponent električnega in magnetnega polja, s čimer upravičimo izbiro komponent vektorja $\mathbf{m}$. Princip superpozicije pri prehodu na vektorski opis ohrani, zato lahko zapišemo

$$\widetilde{\mathbf{m}}(x, z) = \sum_{\beta, \nu} a_{\beta, \nu}^{\pm} \mathbf{m}_{\beta, \nu}^{\pm} e^{ik_0 \beta \cdot x - ik_0 \alpha_{\beta, \nu}^{\pm} z}, \quad (23)$$

pri čemer z $\nu = 1, 2$ označimo obe lastni polarizaciji, $+$, $-$ pa označujeta dve možni smeri širjenja. Tako kot pri obravnavi skalarne polja, v primeru $z = 0$ dobimo inverzno Fourierovo transformacijo vektorskega polja

$$\widetilde{\mathbf{m}}(x, z) = \sum_{\beta, \nu} a_{\beta, \nu}^{\pm} \mathbf{m}_{\beta, \nu}^{\pm} e^{ik_0 \beta \cdot x} = \sum_{\beta} \mathbf{m}_{\beta} e^{ik_0 \beta \cdot x}, \quad (24)$$

pri čemer vsoto po lastnih stanjih lahko zapišemo s 4×4 matričnim formalizmom. Vektor $\mathbf{m}_\beta$ dobimo z množenjem amplitudnega vektorja $\mathbf{a}_\beta$ z ustrezno 4×4 matriko polja:

$$\mathbf{m}_\beta = \mathbf{F}_\beta \mathbf{a}_\beta, \quad (25)$$

pri čemer smo vpeljali matriko $\mathbf{F}_\beta = [\mathbf{m}_{\beta,1}^+, \mathbf{m}_{\beta,1}^-, \mathbf{m}_{\beta,2}^+, \mathbf{m}_{\beta,2}^-]$, ki ima v stolpcih zapisane komponente lastnih vektorjev polja $\mathbf{m}_{\beta,\nu}^\pm = (\mathcal{E}_{x,\nu}^\pm, \mathcal{H}_{y,\nu}^\pm, \mathcal{E}_{y,\nu}^\pm, \mathcal{H}_{x,\nu}^\pm)^T$. Amplitudni vektor $\mathbf{a}_\beta$, katerega kvadrat predstavlja intenzitete lastnih stanj, vpeljemo kot $\mathbf{a}_\beta = (a_{\beta,1}^+, a_{\beta,1}^-, a_{\beta,2}^+, a_{\beta,2}^-)^T$. Pri izpeljavi matrike $\mathbf{F}$ vzemimo najprej primer ravnega vala, ki se širi v ravnini xz . Za pomoč nam je lahko slika 1, kjer je s sivo barvo označen ravni val v območju gorišča leče. Temu valu lahko pripišemo bodisi polarizacijo p (označeno na sliki 1) ali pa polarizacijo s . V območju odprtine pred lečo sta to ravno polarizaciji x in y . Tema dvema polarizacijama pripišimo vektor $\mathbf{m}_{\beta,p}^+$ in $\mathbf{m}_{\beta,s}^+$, ki ju zapišemo v prvi in tretji stolpec matrike $\mathbf{F}$. Vektorja $\mathbf{m}_{\beta,p}^-$ in $\mathbf{m}_{\beta,s}^-$ določimo na podoben način in ju zapišemo v drugi in četrti stolpec ter dobimo

$$\mathbf{F}'_\beta = \mathbf{F}'_{k,l} = \sqrt{\frac{2}{\alpha_{k,l}}} \begin{bmatrix} \alpha_{k,l}/n & \alpha_{k,l}/n & 0 & 0 \\ n & -n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha_{k,l} & \alpha_{k,l} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

pri čemer so $\alpha_{k,l}$ podani v enačbi 20. Vektorje $\mathbf{m}_\beta$ smo normirali tako, da je $\mathcal{S}_z = 1$, na ta način zagotovimo ohranitev intenzitete pri prehodu iz amplitudnega vektorja $\mathbf{a}_\beta$ v elektromagnetni vektor $\mathbf{m}_\beta$. Splošno rešitev, za širjenje v poljubni smeri, dobimo iz matrike $\mathbf{F}'$ tako, da zavrtimo vektorje za ustrezen kot ϕ . Torej je matrika $\mathbf{F}_\beta = \mathbf{R}'_\beta \mathbf{F}'_\beta$ in je

$$\mathbf{R}'_\beta = \mathbf{R}'_{k,l} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{k,l} & 0 & -\sin \phi_{k,l} & 0 \\ 0 & \cos \phi_{k,l} & 0 & \sin \phi_{k,l} \\ \sin \phi_{k,l} & 0 & \cos \phi_{k,l} & 0 \\ 0 & -\sin \phi_{k,l} & 0 & \cos \phi_{k,l} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

pri čemer kot zasuka dobimo iz zveze $\phi_{k,l} = \arctg(k/l)$. Matrični formalizem nam omogoča, da zapišemo operator širjenja vektorskega polja kot:

$$\widetilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, z) = \mathcal{M}_z \widetilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, 0) = \mathcal{F}^{-1} \widehat{\mathbf{M}}_z \circ \mathcal{F} \widetilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, 0), \quad (28)$$

pri čemer vpeljemo prenosno matriko

$$\widehat{\mathbf{M}}_z = \widehat{\mathbf{F}} \circ \widehat{\Phi}_z \circ \widehat{\mathbf{F}}^{-1}, \quad (29)$$

kjer $N \times N$ matrika $\hat{\mathbf{F}}$ sestoji iz 4×4 matrik $\mathbf{F}_\beta$ in je $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ $N \times N$ matrika diagonalnih matrik $\boldsymbol{\alpha}_\beta = \text{diag}(+\alpha, -\alpha, +\alpha, -\alpha)$ in je $\alpha = \sqrt{n_i^2 - \beta^2}$ konstanta širjenja svetlobe. Vidimo, da je oblika operatorja $\mathcal{M}_z$ za translacijo vektorskega polja $\mathbf{m}$ enaka obliki operatorja $\oplus_z$ za translacijo skalarnega polja. S Fourierovo transformacijo dobimo amplitude ravnih valov $\mathbf{m}_\beta$, ki pa jih moramo, za razliko od skalarnega polja, najprej razstaviti po lastnih stanjih $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{F}_\beta^{-1} \mathbf{m}_\beta$, nato pa amplitudni vektor $\mathbf{a}_\beta$ množiti z ustrezno fazno matriko in rekonstruirati celotno polje z $\mathbf{m}_\beta = \mathbf{F}_\beta \mathbf{a}_\beta$. Za razliko od skalarne opisa, kjer vsakemu ravnemu valu β pripišemo skalarno amplitudo a_β , moramo pri vektorski obravnavi zapisati amplitudne vektorje $\mathbf{a}_\beta = (a_{\beta,1}^+, a_{\beta,1}^-, a_{\beta,2}^+, a_{\beta,2}^-)^T$, ki nosijo informacijo o amplitudi, polarizaciji in smeri širjenja posameznih ravnih valov.

Potrebujemo še operator za preslikavo polja z lečo. Problem preslikave leče pri velikih numeričnih aperturah reši t. i. Deby-Wolfov integral [6]. Namesto numerične implementacije Deby-Wolfovega integrala, za katerim stoji fizikalni opis leče, lahko uporabimo nekoliko drugačen pristop, ki temelji na matematičnem opisu idealne leče. Pristop je razložen v [5], tukaj povzemimo ključne korake. Najprej ugotovimo, da skalarno polje $\tilde{u}$ in vektorsko polje $\tilde{\mathbf{m}}$ lahko povežemo, če vpeljemo generalizirani Jonesov vektor:

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = (\tilde{u}_x^+(\mathbf{x}), \tilde{u}_x^-(\mathbf{x}), \tilde{u}_y^+(\mathbf{x}), \tilde{u}_y^-(\mathbf{x}))^T, \quad (30)$$

pri čemer so $u_{x,y}^\pm$ neodvisna skalarne polja. S Fourierovo transformacijo $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ dobimo amplitudne vektorje ravnih valov $\mathbf{j}_\beta$ zapisane v laboratorijskem koordinatnem sistemu $S(x, y)$. Amplitudni vektor $\mathbf{a}_\beta$ smo zapisali v lastnem sistemu polarizacij $S(p, s)$, ki je glede na laboratorijski sistem zavrt za kot ϕ . Prehod iz enega koordinatnega sistema v drugega tako dobimo z rotacijo koordinatnega sistema, zato velja $\mathbf{j}_\beta = \mathbf{R}_\beta \mathbf{a}_\beta$. Jonesov vektor $\mathbf{j}$ lahko zato povežemo z vektorjem $\mathbf{m}$:

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_m \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_m \circ \mathcal{F} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \quad (31)$$

pri čemer je

$$\hat{\mathbf{B}}_m = \hat{\mathbf{F}} \circ \hat{\mathbf{R}}^T = \hat{\mathbf{R}}' \circ \hat{\mathbf{F}}' \circ \hat{\mathbf{R}}^T, \quad (32)$$

pri čemer je $\hat{\mathbf{R}}$ rotacijska matrika, ki poskrbi za ustrezno vrtenje komponent Jonesovega vektorja iz laboratorijskega koordinatnega sistema v lastni sistem. Podobno, kot smo vpeljali $\mathbf{R}'_\beta$ za rotacijo vektorja $\mathbf{m}$ v enačbi 27,

komponente matrike $\hat{\mathbf{R}}$ za rotacijo vektorja $\mathbf{j}$ zapišemo kot:

$$\mathbf{R}_\beta = \mathbf{R}_{k,l} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{k,l} & 0 & -\sin \phi_{k,l} & 0 \\ 0 & \cos \phi_{k,l} & 0 & -\sin \phi_{k,l} \\ \sin \phi_{k,l} & 0 & \cos \phi_{k,l} & 0 \\ 0 & \sin \phi_{k,l} & 0 & \cos \phi_{k,l} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Polje $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_m^{-1} \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ je torej reprezentacija pravega vektorskega polja $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$. V Jonesovem matričnem formalizmu [3] vektor $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$ predstavlja polarizacijo in amplitudo električnega polja ravnega vala, ki se širi v smeri osi z . S tem ko skalnemu polju $\tilde{u}$ pripišemo Jonesov vektor, v resnici privzamemo, da je obravnavano polje dobro kolimirani snop svetlobe, pri čemer vse komponente ravnih valov dobro opiše en sam valovni vektor, ki definira smer širjenja. $\tilde{\mathbf{j}}$ je torej paraksialno polje, ki se širi v referenčnem koordinatnem sistemu, pri katerem so vsi valovni vektorji $\mathbf{k}_\beta$ usmerjeni v smeri osi z . Na splošno torej vektor $\tilde{\mathbf{j}}$ ne vsebuje komponent pravega električnega polja. Komponente električnih in magnetnih polj dobimo iz $\tilde{\mathbf{j}}$ preko enačbe 31. Zapis z Jonesovim vektorjem pride do izraza, ko opazujemo svetlobo z mikroskopom oziroma, ko imamo opraviti s paraksialnimi snopi svetlobe. Če poljuben vektorski snop svetlobe opazujemo z mikroskopom, v ravnini slike dobimo vektorsko polje $\tilde{\mathbf{m}}$, ki je sestavljeno iz skoraj paralelnih ravnih valov. V tem primeru vektor $\tilde{\mathbf{j}}$ pravilno opiše električne komponente elektromagnetnega polja. Vektor $\tilde{\mathbf{j}}$ poljubnega fokusiranega snopa svetlobe torej lahko razumemo kot električno polje snopa, ki ga otipamo z mikroskopom pri velikih povečavah. Opis z vektorjem $\tilde{\mathbf{j}}$ je uporaben tudi pri preslikavah. Snop svetlobe v ravnini S' na sliki 1 pred lečo je dobro kolimiran, zato je $\tilde{\mathbf{j}}$ primeren za opis električnega polja svetlobe v ravnini S' pred lečo.

Oglejmo si nekaj lastnosti Jonesove reprezentacije vektorskega polja. V tem delu nas zanima zgolj širjenje svetlobe v smeri naprej, zato vpeljemo vektorsko polje $\tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}) = (\tilde{j}_x^+(\mathbf{x}), 0, \tilde{j}_y^+(\mathbf{x}), 0)^T$. Delujmo z operatorjem $\mathcal{B}_m^{-1}$ na enačbo 28 in upoštevajmo enačbo 31, dobimo:

$$\tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}, z) = \mathcal{B}_m^{-1} \mathcal{M}_z \mathcal{B}_m \tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}, 0) = \mathcal{F}^{-1} \hat{\Phi}_z \mathcal{F} \tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}, 0) = \oplus_z \tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}, 0). \quad (34)$$

Jonesova reprezentacija vektorskega polja se torej pri širjenju obnaša kot skalarno polje. Izkaže se [5], da iz zahteve po idealni transformaciji leče, kot je prikazano na sliki 1, sledi, da je Jonesova reprezentacija vektorskega polja v gorišču leče ravno Fourierova transformacija Jonesove reprezentacije polja na vstopni zaslonki pred lečo, torej je:

$$\tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_f \tilde{\mathbf{j}}'^+(\mathbf{x}'). \quad (35)$$

Vidimo, da lahko pri vektorski obravnavi transformacije snopov z lečami uporabimo rezultate skalarne teorije, če pred preslikavo in po njej opravimo ustrezno preslikavo iz vektorskega na skalarno polje in obratno. Postopek za izračun vektorskega polja v gorišču leče je identičen preslikavi s skalarnim poljem, samo da skalarnemu polju pripišemo Jonesov vektor. Ko izračunamo končno Jonesovo vektorsko polje v gorišču leče, uporabimo enačbo 31 za izračun komponent električnega in magnetnega polja. Vektorsko polje v okolici gorišča leče je:

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_m \oplus_z \mathcal{L}_f \hat{A} \circ \tilde{\mathbf{j}}'^+(\mathbf{x}'). \quad (36)$$

Izračunajmo sedaj električno polje v gorišču leče iz primera, ki ga prikazuje slika 3a, kjer smo najprej izračunali skalarno polje $\tilde{u}(\mathbf{x})$ prikazano na sliki 3b, kot razloženo v prejšnjem poglavju. Sedaj vstopnemu in izstopnemu skalarnemu polju pripišemo ustrezen Jonesov vektor. Vzemimo, da pred lečo skalarno polje opisuje svetlobo, ki se širi v smeri osi z in je polarizirano v smeri x . Za takšna polja se je uveljavil termin *skalarni snop svetlobe*, saj je polarizacija polja konstantna in se ne spreminja z oddaljenostjo od centra snopa $\mathbf{x}$, za razliko od *vektorskih snopov svetlobe*, kjer je polarizacija polja funkcija oddaljenosti od centra snopa. Vpeljemo torej $\tilde{\mathbf{j}}'(\mathbf{x}') = (\tilde{u}'(\mathbf{x}'), 0, 0, 0)^T$, ki opisuje skalarni snop svetlobe polariziran v smeri x . V skladu s principom transformacije Jonesove reprezentacije polja (enačba 35) dobimo v ravnini slike $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, z) = (\tilde{u}(\mathbf{x}, z), 0, 0, 0)^T$. Izračun elektromagnetnega polja $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, z) = \mathcal{B}_m \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, z)$ dobimo z uporabo transformacije $\mathcal{B}_m$, iz česar dobimo električni komponenti polja $\mathcal{E}_x$ in $\mathcal{E}_y$, in magnetni komponenti polja $\mathcal{H}_x$ in $\mathcal{H}_y$ (slika 4). Potrebujemo še z -komponente polj $\mathcal{E}$ in $\mathcal{H}$. Manjkajoči komponenti polj zapišimo v vektor $\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = (\tilde{\mathcal{H}}_z(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_z(\mathbf{x}))^T$, ki ga lahko izračunamo iz vektorja $\tilde{\mathbf{m}}$, kot je to razloženo v [5], lahko pa ga dobimo neposredno iz Jonesove reprezentacije:

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_z \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_z \circ \mathcal{F} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \quad (37)$$

pri čemer je

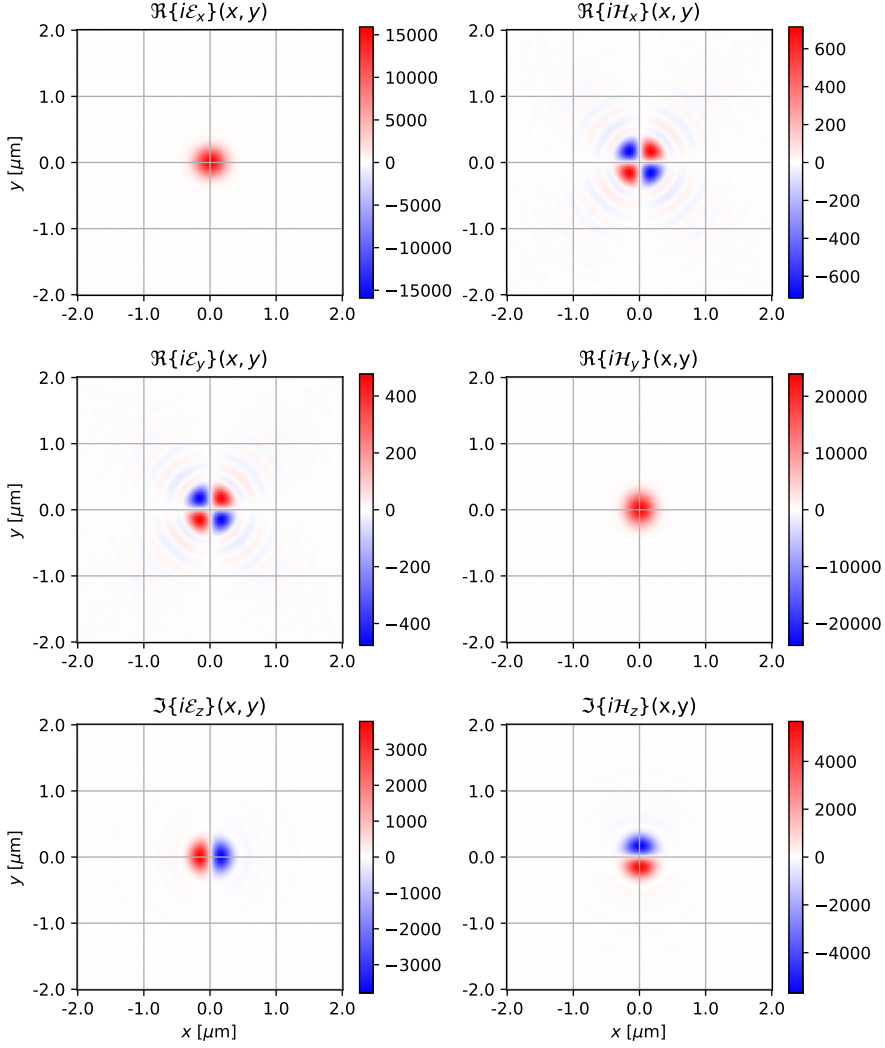
$$\hat{\mathbf{B}}_z = \hat{\mathbf{F}}'' \circ \hat{\mathbf{R}}^T. \quad (38)$$

Elementi matrike $\hat{\mathbf{F}}''$ so matrike velikosti 2×4

$$\mathbf{F}_{k,l}'' = \sqrt{\frac{2}{\alpha_{k,l}}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{k,l} & \beta_{k,l} \\ -\beta_{k,l}/n & \beta_{k,l}/n & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

pri čemer je $\beta_{k,l} = \frac{\lambda}{L} \sqrt{k^2 + l^2}$. Princip preslikave iz Jonesove reprezentacije na vektorsko polje lahko tudi posplošimo, če vpeljemo celotni vektor elektromagnetnega polja kot $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = (\tilde{\mathcal{H}}_z(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_x(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{H}}_y(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_y(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{H}}_x(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_z(\mathbf{x}))^T$,

Fokusiran Gaussov snop



Slika 4. Električne in magnetne komponente polja fokusiranega Gaussovega snopa izračunane iz skalarne polja s slike 3, ki mu pripišemo polarizacijo x in generalizirani Jonesov vektor $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = (\tilde{u}(\mathbf{x}), 0, 0, 0)^T$. Ključna razlika med skalarno in vektorsko rešitvijo je v komponenti z , ki ima v primerjavi s komponento x fazo $e^{\pm i\pi}$. Posledično, snop v fokusu ni linearno polariziran, ampak eliptično.

ki mu pripišemo ustrezno transformacijo:

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_f \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_f \circ \mathcal{F} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \quad (40)$$

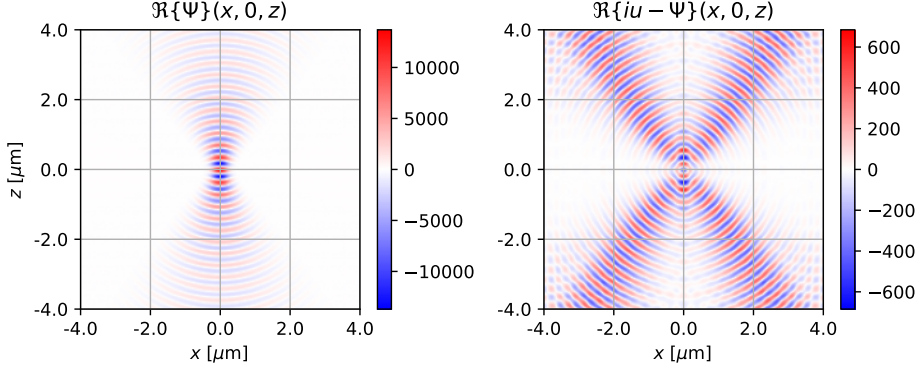
pri čemer prepuščamo bralcu, da izpelje matriko $\hat{\mathbf{B}}_f$ iz matrik $\hat{\mathbf{B}}_m$ in $\hat{\mathbf{B}}_z$.

S slike 4 je razvidno, da v primeru močnega fokusiranja svetlobe v gorišču leče pridelamo znatno vrednost komponente z električnega in magnetnega polja. Poleg tega opazimo, da je relativno glede na komponento x polja, komponenta z fazno premaknjena za $e^{\pm i\pi}$, odvisno od koordinate $\mathbf{x}$. To pomeni, da v gorišču leče namesto skalarne snopa, ki je polariziran v smeri x , dobimo vektorski snop svetlobe z eliptično polarizacijo, kjer se sučnost polarizacije zamenja pri prehodu iz $-\mathbf{x}$ v $\mathbf{x}$. Takšnega polja ne moremo dobiti v okviru skalarne teorije, ali s širjenjem Gaussovega snopa v okviru paraksialne aproksimacije. Za konec si oglejmo še prečni profil vektorskega polja $\tilde{\mathbf{f}}$ in ga primerjajmo s skalarним poljem $\tilde{u}$ in z Gaussovim snopom, ki ga v okviru paraksialne aproksimacije opisuje funkcija

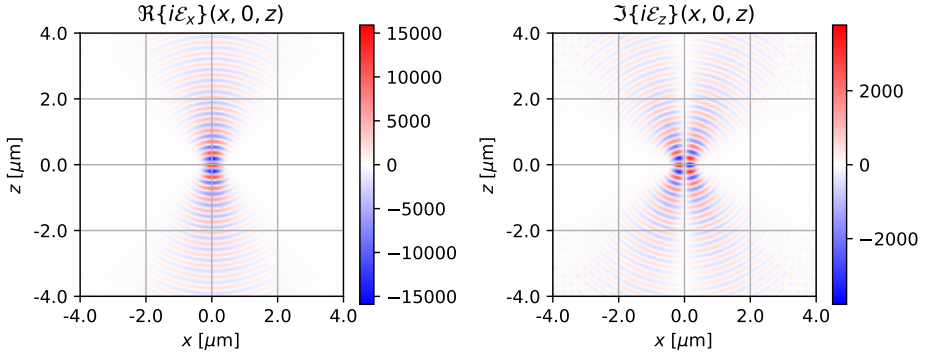
$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{w_0}{w} e^{-r^2/w^2} e^{ikz + ikr^2/2R - i\eta}, \quad (41)$$

pri čemer so $w = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}$, $R = z(1 + z_0^2/z^2)$, $\eta = \arctg(z/z_0)$, $z_0 = kw_0^2/2$, $k = nk_0$, $r^2 = x^2 + y^2$ in določimo w_0 iz širine snopa v ravnini zaslonke w'_0 . V skladu z lastnostmi transformacije Gaussovih snopov z lečo dobimo $w_0 = \frac{f\lambda}{\pi w'_0} = \frac{2}{3\pi} \mu\text{m}$. Na sliki 5a skoraj ni opaziti razlik med Ψ in skalarним poljem $\tilde{u}$ s slike 3c, kar kaže na to, da je v tem primeru opis s paraksialnim poljem Ψ približno enako natančen kot opis s skalarним poljem $\tilde{u}$. Odprtina zaslonke je glede na parametre vstopnega Gaussovega snopa še vedno dovolj široka, da občutnega uklona svetlobe zaradi končne razsežnosti leče ni opaziti. Pri natančni primerjavi sicer opazimo določena odstopanja med izračunanim poljem $\tilde{u}$ in Ψ (slika 5a desno). Poleg prispevka zaradi uklona na odprtini leče, je izračun širjenja svetlobe z operatorjem $\oplus_z$ natančnejši. Pri izpeljavi polja Ψ namreč rešujemo paraksialno valovno enačbo, ki je zgolj približek prave valovne enačbe. S tega vidika je torej izračun polja v okolici gorišča leče preko formalizma, predstavljenega v prejšnjem poglavju, bolj natančen od rešitve, ki jo podaja enačba 41.

V primerjavi s pravo, vektorsko rešitvijo, ki je prikazana na sliki 5b, zopet na prvi pogled ni opaziti velikih odstopanj med $\tilde{u}$ in $\tilde{\mathcal{E}}_x$ (razen faktorja normalizacije $\sqrt{2/n_i}$), opazimo pa pomemben prispevek komponente $\tilde{\mathcal{E}}_z$, ki ga tako paraksialna aproksimacija Ψ kot tudi skalarна aproksimacija $\tilde{u}$ ne moreta reproducirati.



(a) Levo: realni del polja $\Psi(x, 0, z)$ preslikanega Gaussovega snopa v okviru paraksialne aproksimacije v okolici gorišča leče pri $y = 0$. Desno: primerjava s skalarnim poljem $iu(x, 0, z) - \Psi(x, 0, z)$.



(b) Levo: realni del polja $i\mathcal{E}_x(x, 0, z)$. Desno: imaginarni del polja $i\mathcal{E}_z(x, 0, z)$ v okolici gorišča leče pri $y = 0$.

Slika 5. Primerjava skalarnega polja $u(x, 0, z)$, Gaussovega snopa $\Psi(x, 0, z)$ in x in z komponent električnega polja $\mathcal{E}(x, 0, z)$ pri preslikavi Gaussovega snopa s slike 3a.

5. Zaključek

V tem prispevku smo izpeljali numerično metodo na podlagi diskretne Fourierove transformacije za izračun elektromagnetnega polja v okolici gorišča leče. Pokazali smo, da lahko za izračun vektorskega polja uporabimo skalarno teorijo in vpeljali Jonesovo (paraksialno) reprezentacijo pravega vektorskega polja. Pri transformacijah vektorskih polj lahko vektorskim stanjem pripišemo ustrezen Jonesov vektor in izračunamo širjenje in transformacije polja z uporabo principov Fourierove optike, ki bazira na skalarni aproksimaciji. Na koncu za izračun pravega vektorskega polja opravimo ustrezno vektorsko transformacijo skalarne polja z operatorjem $\mathcal{B}$. Tak računski pristop poenostavi postopek kreiranja vstopnih polj in tudi celotno preslikavo, saj komponente vektorja $\tilde{\mathbf{m}}$ oziroma $\tilde{\mathbf{f}}$ izračunamo šele na koncu z uporabo operatorja $\mathcal{B}$.

V prispevku smo si ogledali preslikavo osnovnega Gaussovega snopa in pokazali, da ima polje v gorišču leče zanimive polarizacijske lastnosti. Čeprav je na vstopni strani Gaussov snop linearno polariziran, dobimo v gorišču leče hitro spreminjajočo se polarizacijo, ki prehaja iz levosučne eliptične polarizacije v desnосуčno eliptično polarizacijo. Še bolj zanimiva polja v gorišču lahko dobimo z uporabo Gaussovih snopov višjih redov ali s preslikavami vektorskih snopov svetlobe, pri čemer je polarizacija svetlobe v ravnini pred lečo funkcija prečnega krajevnega vektorja $\mathbf{x}$. Z uporabo matričnega formalizma, ki smo ga izpeljali, lahko bralec samostojno raziskuje, kako oblika polja na vstopni strani, v kombinaciji z lastnostmi leče, vplivajo na obliko polja v gorišču leče. V pomoč je lahko implementacija metode, napisana v programskem jeziku *python*, ki je javno dostopna na spletnih straneh GitHub [4] in vabi bralca, da preizkusi delovanje metode in da raziše vektorske lastnosti svetlobe v gorišču leče pri preslikavah z veliko numerično aperturo.

LITERATURA

- [1] Dwight W. Berreman. Optics in stratified and anisotropic media: 4×4 -matrix formulation. *Journal of the Optical Society of America*, 62(4):502, April 1972.
- [2] J.W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill physical and quantum electronics series. W. H. Freeman, 2005.
- [3] R. Clark Jones. A new calculus for the treatment of optical systems: description and discussion of the calculus. *Journal of the Optical Society of America*, 31(7):488, July 1941.
- [4] Andrej Petelin. Focused beam, 2025. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17292340>.
- [5] Andrej Petelin and Igor Muševič. Focused beam propagation in cholesteric liquid crystals. *Opt. Express*, 33(16):32955–32975, Aug 2025.
- [6] B. Richards and E. Wolf. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. structure of the image field in an aplanatic system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274):358–379, dec 1959.