

Rešitev.

Ker je $f'(x) = 3x^2 + 6x + \frac{7}{2} > 3(x+1)^2 \geq 0$, je f strogo naraščajoča funkcija.

Če je $r < f(r)$, je (ker je f naraščajoča) $f(r) < f(f(r))$, in če velja $f(f(r)) = r$, dobimo protislovje. Podobno protislovje dobimo, če je $f(r) > r$. Zato so edine rešitve enačbe $f(f(r)) = r$ rešitve $f(r) = r$. Ker je

$$f(r) - r = r^3 - 3r^2 + \frac{5}{2}r - \frac{1}{2} = (r-1) \left(r^2 - 2r + \frac{1}{2} \right),$$

so edine tri rešitve 1 , $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ in $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Z veseljem pričakujemo tekmovanje v letu 2025. Morda pa se v letu 2026 pridruži še kakšna ekipa iz Slovenije.

Gregor Šega

Dvaintrideseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Tudi letos je potekalo mednarodno tekmovanje študentov matematike *International mathematics competition*, na kratko IMC. Dvaintrideseta izvedba tekmovanja je potekala med 28. julijem in 3. avgustom v bolgarskem mestu Blagoevgrad. Tekmovanja se je udeležilo kar 434 tekmovalcev, ki so zastopali 74 ekip. Ekipe običajno sestavljajo člani iste univerze ali predstavniki iste države, najštevilnejšo ekipo, ki jo vodi maskota tekmovanja *Ivan the Confessor*, pa sestoji iz študentk in študentov, ki so na tekmovanje prišli brez svoje ekipe.

Slovenija je na tekmovanje poslala 11 tekmovalcev. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so letos zastopali **Luka Urbanc** iz prvega letnika, **Katarina Grilj**, **Kaja Rajter**, **Matija Skrt** in **Hugo Trebše** iz drugega letnika, **Luka Ponikvar** iz tretjega letnika ter **Jaka Vrhovnik** in **Patrik Žnidaršič** iz prvega letnika druge stopnje. FAMNIT z Univerze na Primorskem pa so zastopali **Jalal Ahmed Chowdhury** in **Eric González Vicent** iz prvega letnika ter **Diar Gashi** iz prvega letnika druge stopnje. Vodja in sovodja ekipe FMF-ja sva bila Beno Učakar in Luka Horjak, vodja ekipe FAMNIT-a pa je bil Slobodan Filipovski.

Tudi letos se lahko pohvalimo z odličnimi rezultati. Luka Urbanc in Luka Ponikvar sta osvojila prvo nagrado, Jaka Vrhovnik in Hugo Trebše drugo, dobitniki tretje nagrade pa so bili Matija Skrt, Patrik Žnidaršič in Katarina Grilj. Diar Gashi in Eric González Vicent sta dobila pohvalo, Kaja Rajter in Jalal Ahmed Chowdhury pa sta prejela potrdilo o odeležbi. Ta izkupiček



Slika 1. Skupinska fotografija ekipe FMF-ja po podelitvi nagrad.

je še toliko bolj impresiven, saj se je večina teh tekmovalcev tekmovanja udeležila prvič. Obe univerzi sta se odlično odrezali tudi na ekipni lestvici, kjer se je ekipa FMF-ja uvrstila na 19. mesto, ekipa FAMNIT-a pa na 66. mesto.



Slika 2. Skupinska fotografija ekipe FAMNIT-a po podelitvi nagrad.

Tekmovanje IMC je priložnost za podjetja, da se predstavijo mladim matematikom in najdejo nadarjen kader. Letos je bilo tako še več sponzorjev kot pretekla leta. Da bi študente privabili k svojim razstavnim prostorom, so ponujali promocijski material, organizirali cono z videoigrami in celo delili brezplačne lego kocke. Kot vsako leto pa je tekmovanje zaznamovalo tudi nekaj organizacijskih težav, kar je skoraj že tradicija pri IMC-ju. To-krat smo bili nekaj dni brez vode, saj so zaradi vzdrževalnih del vodo v

mestu klorirali, en dan pa nas je ujel dež. Slednje morda niti ne zveni tako slabo, če pomislimo na običajne poletne temperature v Bolgariji, je pa malo neugodno, ko začne puščati strop sredi jedilnice.

V nadaljevanju bi vam rad predstavil nekaj nalog, ki so jih študenti reševali na tekmovanju. Izbrane naloge so med lažjimi, tako da bralce vabim, da jih poskusijo rešiti tudi sami. Naloge bom najprej zastavil, nato pa bom predstavil še njihove rešitve.

Naloga 1. Naj bo $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom z realnimi koeficienti in denimo, da je $\text{st}(p) \geq 2$. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ naj bo $l_x \subseteq \mathbb{R}^2$ tangenta na graf polinoma p v točki $(x, p(x))$.

- Dokaži, da če je polinom p lihe stopnje, potem velja $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} l_x = \mathbb{R}^2$.
- Ali obstaja kak polinom p sode stopnje, za katerega bi veljalo $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} l_x = \mathbb{R}^2$?

Naloga 2. Za realno $n \times n$ matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ naj bo A^R matrika, ki jo dobimo, če matriko A zavrtimo za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca. Tako je na primer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dokaži, da če velja $A = A^R$, so lastne vrednosti matrike A bodisi realne bodisi imaginarne.

Naloga 3. Določi vse podmnožice $M \subseteq \mathbb{N}$, za katere velja:

- Če je $x \in M$, potem je $2x \in M$.
- Če sta $x, y \in M$ in je $x + y$ sodo število, potem je $\frac{x+y}{2} \in M$.

Rešitev naloge 1. Tangenta l_x je premica, ki gre skozi točko $(x, p(x))$ in ima smerni koeficient $p'(x)$, torej je podana z enačbo $Y = p'(x)(X - x) + p(x)$. Točka $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ bo ležala na tej premici natanko tedaj, ko bo veljala zveza $b = p'(x)(a - x) + p(x)$. Desna stran te enačbe je polinom v spremenljivki x , ki ga označimo z q_a . Točka (a, b) bo torej ležala na tangenti l_x natanko tedaj, ko bo veljalo $q_a(x) = b$.

Denimo, da je polinom p oblike $p(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$, kjer je $c_n \neq 0$. Potem je polinom q_a oblike $q_a(x) = p(x) - xp'(x) + ap'(x) = c_n(n-1)x^n + \dots$. Ker sta po predpostavkah $c_n \neq 0$ in $n \geq 2$, je vodilni koeficient polinoma q_a neničeln. Sledi, da velja $\text{st}(q_a) = n = \text{st}(p)$ za vsak $a \in \mathbb{R}$.

Za (a) del naloge naj bo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ poljubna točka. Ker je polinom p lihe stopnje, je takšen tudi polinom q_a . Ker pa so polinomi lihe stopnje surjektivni, obstaja $x \in \mathbb{R}$, da velja $q_a(x) = b$, torej točka (a, b) leži na tangenti l_x . Ker je bila točka (a, b) poljubno izbrana, smo s tem pokazali $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} l_x = \mathbb{R}^2$.

Za (b) del naloge fiksirajmo $a = 0$ in denimo, da je polinom p sode stopnje. Potem je sode stopnje tudi polinom q_0 , ker pa polinomi sode stopnje niso nikoli surjektivni, obstaja $b \in \mathbb{R}$, ki ne leži v zalogi vrednosti polinoma q_0 . To pomeni, da točka $(0, b)$ ne leži na nobeni tangenti l_x . Iskani polinom sode stopnje torej ne obstaja. ■

Rešitev naloge 2. Če označimo $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$ in $A^R = [b_{i,j}]_{i,j=1}^n$, opazimo, da velja zveza $b_{i,j} = a_{j,n+1-i}$. Z malo truda vidimo, da lahko operacijo vrtenja matrike izrazimo kot $A^R = JA^T$, kjer je J matrika velikosti $n \times n$, ki ima enice na anti-diagonali in ničle drugod. Če je torej $A = A^R$, velja $A^2 = AA^R = AJA^T$, matrika na desni strani pa je očitno simetrična. Sledi, da je tudi matrika A^2 simetrična in ima zato same realne lastne vrednosti, lastne vrednosti matrike A^2 pa so ravno kvadrati lastnih vrednosti matrike A . Če je torej λ lastna vrednost matrike A , velja $\lambda^2 \in \mathbb{R}$, kar pa ravno pomeni, da je λ bodisi realno bodisi imaginarno število. ■

Rešitev naloge 3. Naj bo $M \subseteq \mathbb{N}$ množica, ki zadošča pogojem naloge. Najprej opazimo, da je zaprta za seštevanje. Če sta namreč $x, y \in M$, sta $2x, 2y \in M$ po lastnosti (a) in $x + y = \frac{2x+2y}{2} \in M$ po lastnosti (b). V posebnem to pomeni, da je množica M zaprta za množenje z naravnimi števili. Množica M gotovo vsebuje tudi kakšno liho število, saj če je $x \in M$ sodo število, je tudi $\frac{x+2x}{2} = \frac{3x}{2} \in M$. Ta postopek lahko ponavljamo, dokler ne dobimo elementa množice M , ki nima dvojice v praštevilskega razcepu.

Naj bo d največji skupni delitelj elementov množice M . Potem velja $M \subseteq d\mathbb{N}$, in ker množica M vsebuje liho število, mora tudi število d biti liho. Bezoutov izrek pove, da obstajajo števila $a_i \in M$ in $\alpha_i \in \mathbb{N}$, tako da velja

$$d = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k - \alpha_{k+1} a_{k+1} - \alpha_{k+2} a_{k+2} - \dots - \alpha_n a_n.$$

Z drugimi besedami, množica M vsebuje dva elementa, ki se razlikujeta za d .

Naj bo sedaj c najmanjši element množice M in $c < a$ takšen, da velja $a, a + d \in M$. Naj bo $x \in M$ največji element, za katerega velja $x < a$. Ker je $M \subseteq d\mathbb{N}$, so x, a in $a + d$ edini elementi množice M na intervalu

$[x, a + d]$. Ker je $x < \frac{x+a}{2} < a$, mora zaradi maksimalnosti x število $x + a$ biti liho. Torej je število $x + a + d$ sodo in velja $\frac{x+a+d}{2} \in M$. Ker pa je $x < \frac{x+a+d}{2} < a + d$, mora veljati $\frac{x+a+d}{2} = a$ oziroma $x = a - d$. Tako smo pokazali:

$$a, a + d \in M \text{ in } c < a \implies a - d \in M.$$

Naj bo sedaj $x \in M$ najmanjši element, da velja $x > a + d$. Tak element gotovo obstaja, saj je $2(a + d) \in M$. Ker je $M \subseteq d\mathbb{N}$, so $a, a + d$ in x edini elementi množice M na intervalu $[a, x]$. Ker je $a + d < \frac{x+a+d}{2} < x$, mora biti zaradi minimalnosti x število $x + a + d$ liho. Število $x + a$ je torej sodo in velja $\frac{x+a}{2} \in M$. Ker pa je $a < \frac{a+x}{2} < x$, mora veljati $\frac{a+x}{2} = a + d$ oziroma $x = a + 2d$. Tako smo pokazali:

$$a, a + d \in M \implies a + 2d \in M.$$

Zgornje nam torej pove, da je množica M oblike $M = \{nd \mid n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$, kjer je $c = dm$. Zlahka se prepričamo, da takšna množica res tudi zadošča pogojem (a) in (b) iz naloge. ■

Samo pisanje nalog na tekmovanju poteka dva dni. Vsak dan imajo tekmovalci časa 5 ur, da rešijo 5 nalog, ki so načeloma urejene po težavnosti. Področja nalog obsegajo analizo, algebro, teorijo števil, diskretno matematiko, zadnja leta pa se pojavljajo tudi naloge iz verjetnosti. Naloge na tekmovanju se točkujejo s celimi števili med 0 in 10. Za občutek si oglejmo, kako je šlo tekmovalcem reševanje zgoraj predstavljenih nalog. Povprečno število doseženih točk za prvo nalogo je bilo 8,21, za drugo nalogo 4,85 in za tretjo nalogo 5,37. Dosežek pri najtežji nalogi na letošnjem tekmovanju pa je bil v povprečju 0,23 točke.

Preostale naloge in več o tekmovanju lahko najdete na spletni strani <https://www.imc-math.org.uk/>. Držim pesti, da bo prihodnje leto tekmovanje tudi tako uspešno, kot je bilo letos!

Beno Učakar

DIAMANTNI SPONZOR DMFA SLOVENIJE



V DRUŽBI DOBRIH LJUDI