

Tekmovanje študentov v matematiki

Od leta 2017 poteka tekmovanje Simona Maraisa v znanju matematike. Tekmovanje organizira fundacija s sedežem v Avstraliji, tekmovanje pa je namenjeno vsem študentom, ki jim je všeč matematika in reševanje matematičnih problemov. Prvotno je bilo namenjeno študentom azijsko-pacifiške regije. Leta 2021 so poskusno uvedli tekmovanje v Zahodni diviziji (določeno s časovnimi pasovi, pokriva Evropo in Afriko). Leta 2022 je predsednica Avstralskega matematičnega društva pisala takratni predsednici DMFA, prof. dr. Neži Mramor Kosta, s prošnjo, da bi se tekmovanju priključile tudi slovenske univerze. Po temeljitnem razmisleku smo se na FMF odločili za udeležbo.

V zadnjih letih je število raznih tekmovanj za študente precej narastlo. Tekmovanja organizirajo nekatere fakultete, nacionalna društva, mednarodne organizacije in tudi komercialni ponudniki. Zelo različni so pogoji: kdaj tekmovanje poteka, kje, na kakšen način, različne so višine prijavnine, kdo se ga lahko udeleži in podobno. Večina tekmovanj je za nas neprimernih. Nekatera potekajo sredi študijskega leta, ko študenti (in spremljevalci) težje manjkajo dalj časa. Nekatera so logistično bolj zahtevna, druga imajo neprimerno konkurenco, spet tretja pokrivajo specifična področja matematike. Zato je bila dolga leta politika Oddelka za matematiko na FMF, da se udeležimo enega tekmovanja na leto, in to je bilo vedno tekmovanje IMC (ki zadnja leta poteka v Bolgariji).

Tako smo bili pričakovano skeptični do še enega tekmovanja, na katerega nas vabijo. A izkazalo se je, da pravzaprav ni ovir za udeležbo, so pa precejšnje prednosti. Namreč, tekmovanje poteka na daljavo, tako ni treba potovati v Avstralijo. Tekmovanje je vedno na soboto, torej ne ovira študijskega procesa. Poteka v oktobru, ko se študijsko leto ravno dobro začne in so izpiti še daleč. Prijavnina je zastoj, edini strošek je kosilo za tekmovalce, saj je tekmovanje celodnevno. Najbolj uspešni tekmovalci dobijo nagrade, v najbolj osnovni obliki (denar). Tekmovalci lahko sodelujejo posamezno ali pa v dvojicah. Predvsem ta zadnja (delno tudi predzadnja) informacija je dokončno prevesila tehtnico k sodelovanju.

Ekipa FMF je na tekmovanju sodelovala prvič leta 2022, potem pa tudi leta 2023 in 2024. Tudi v letu 2025 načrtujemo udeležbo, kar nekaj razlogov za to bo naštetih v naslednjih odstavkih.

Leta 2022 so tekmovali trije pari in šest posameznikov. Med posamezniki je bil Luka Horjak prvi. Med pari sta Jaka Vrhovnik in Lovro Drofenik dosegla prvo mesto, Beno Učakar in Matevž Miščič pa peto. Ekipno smo se uvrstili na drugo mesto.

Leta 2023 je tekmovalo sedem parov in osem posameznikov. Spet je bil Luka Horjak prvi med posamezniki, Jan Pantner pa deseti. Jaka Vrhovnik in Lovro Drofenik sta bila med pari prva, Beno Učakar in Jon Mikoš osma

Mednarodno tekmovanje

in Maša Žaucer in Matevž Mišičič deveta. Ekipno smo zmagali. Posledično je celotna ekipa prejela posebno nagrado Univerze v Ljubljani za posebne dosežke študentov.

Leta 2024 je tekmovalo že osem parov in devet posameznikov. Tokrat je bil Luka Horjak prvi, Luka Urbanc pa drugi (osvojila sta 46 in 44 točk). Za zgornjo četrtino je bilo dovolj zbrati 18 točk. Med pari sta bila Jaka Vrhovnik in Lovro Drogenik prva, Job Petrovčič in Luka Ponikvar četrta, Anže Križnar in Jakob Šega pa šesta. Spet je bila naša ekipa prva.

Poudariti je sicer treba, da tekmovanje poteka v dveh divizijah, vrstni red je določen za vsako izmed njiju. Delno je to tudi zaradi tega, ker v Vzhodni diviziji rešujejo najprej sklop nalog A, po odmoru rešujejo sklop nalog B hkrati z Zahodno divizijo, nato pa še Zahodna divizija rešuje sklop nalog C. Organizatorji ne objavijo posebej rezultatov sklopa B, kjer bi bila možna neposredna primerjava med vsemi sodelujočimi.

Še eno posebnost ima tekmovanje: en del ene naloge nima znane rešitve. Tako se tekmovalci lahko preizkusijo v čisto pravem raziskovalnem delu, res pa je, da so časovno zelo omejeni: za vsak sklop štirih nalog imajo tri ure časa. Tako je skupno možno število točk enako 56, z dodatnimi 7 točkami za nerešen problem.

Kako je videti nerešena naloga, si bomo ogledali na primeru naloge iz leta 2022. Nato sledita še dve nalogi iz let 2023 in 2024. Druge naloge ter celotne rezultate si lahko ogledate na strani tekmovanja, www.simonmarais.org.

Naloga 1 (2022) Naj bosta $a_0, a_1, a_2, \dots$ in $b_0, b_1, b_2, \dots$ dve zaporedji celih števil, za kateri velja $a_0 \cdot b_0 \geq 600$ in

$$a_{n+1} = a_n + 2\lfloor b_n/20 \rfloor,$$

$$b_{n+1} = b_n + 3\lfloor a_n/30 \rfloor,$$

za vse $n \geq 0$.

(a) Dokazite, da obstaja celo število N , da je za vsak $n \geq N$

$$-13 \leq a_n - b_n \leq 23.$$

(b) Ali vedno obstaja celo število n , za katerega velja $a_n = b_n$?

Ideja rešitve. Če je a_n deljivo s 30 in b_n deljivo z 20, je $a_{n+1} = a_n + b_n/10$ in $b_{n+1} = b_n + a_n/10$, od koder je $a_{n+1} - b_{n+1} = 9/10(a_n - b_n)$, kar pomeni, da se razlika manjša. Zaradi zaokroževanja je lahko razlika tudi malo večja (ali manjša), kar natančno lahko omejimo v (a) točki naloge. Drugi del, za katerega se zdi, da bi lahko držal, ostaja v obliki hipoteze tudi po tekmovanju.

Naloga 2 (2023) Na teniškem turnirju sodeluje 256 igralcev, ki so rangirani s števkami od 1 do 256, pri čemer 1 ustreza najvišji uvrstitvi, 256 pa najnižji uvrstitvi. Ko dva igralca igrata tekmo na turnirju, igralec z višjo uvrstitvijo zmagaja z verjetnostjo $3/5$.

V vsakem krogu turnirja igra igralec z najvišjo uvrstitvijo proti igralcu z drugo najvišjo uvrstitvijo, igralec s tretjo najvišjo uvrstitvijo igra proti igralcu s četrto najvišjo uvrstitvijo in tako naprej. Na koncu kroga igralci, ki zmagajo, napredujejo v naslednji krog, igralci, ki izgubijo, pa izpadejo iz turnirja. Po osmih krogih v turnirju ostane en igralec, ki je razglašen za zmagovalca.

Določite pričakovano vrednost ranga zmagovalca.

Rešitev.

Bolj splošno, predpostavimo, da je 2^n igralcev, tako da turnir traja n krogov. Nadalje predpostavimo, da oseba z višjim rangom zmagaja v tekmi z verjetnostjo p . Naj bo W slučajna spremenljivka, ki ustreza rangu zmagovalca. Lahko bi poiskali porazdelitev W in izračunali njeno pričakovano vrednost. Morda lažji način je, da z indukcijo dokažemo, da je pričakovana vrednost za vsako naravno število n enaka

$$E(W) = 2^n(1 - p) + p.$$

V primeru $n = 1$ je na turnirju le ena tekma in velja $E(W) = 1 \cdot p + 2 \cdot (1 - p) = 2 - p = 2(1 - p) + p$, kar dokazuje, da izraz velja za $n = 1$.

Sedaj predpostavimo, da je trditev pravilna za neko pozitivno celo število n in si oglejmo turnir z 2^{n+1} igralci. Opazimo, da zgornjo polovico turnirja (igralce z rangom od 1 do 2^n) lahko obravnavamo kot turnir z 2^n igralci, ki da finalista z višjo uvrstitvijo, spodnjo polovico turnirja pa kot turnir z 2^n igralci, ki da finalista z nižjo uvrstitvijo. Po indukcijski predpostavki je povprečen rang finalista iz zgornje polovice enak $2^n(1 - p) + p$ (in v finalu zmagaja z verjetnostjo p), v spodnji polovici pa je natanko za 2^n večji (in zmagaja z verjetnostjo $1 - p$). Tako je

$$E(W) = (2^n(1 - p) + p)p + (2^n + 2^n(1 - p) + p)(1 - p) = 2^{n+1}(1 - p) + p$$

in trditev je dokazana.

Za rešitev konkretne naloge vstavimo $n = 8$ in $p = \frac{3}{5}$ za rezultat $E(W) = 103$.

Naloga 3 (2024) Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Določite vsa realna števila r , za katera velja $f(f(r)) = r$.

Rešitev.

Ker je $f'(x) = 3x^2 + 6x + \frac{7}{2} > 3(x+1)^2 \geq 0$, je f strogo naraščajoča funkcija.

Če je $r < f(r)$, je (ker je f naraščajoča) $f(r) < f(f(r))$, in če velja $f(f(r)) = r$, dobimo protislovje. Podobno protislovje dobimo, če je $f(r) > r$. Zato so edine rešitve enačbe $f(f(r)) = r$ rešitve $f(r) = r$. Ker je

$$f(r) - r = r^3 - 3r^2 + \frac{5}{2}r - \frac{1}{2} = (r-1) \left(r^2 - 2r + \frac{1}{2} \right),$$

so edine tri rešitve 1 , $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ in $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Z veseljem pričakujemo tekmovanje v letu 2025. Morda pa se v letu 2026 pridruži še kakšna ekipa iz Slovenije.

Gregor Šega

Dvaintrideseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Tudi letos je potekalo mednarodno tekmovanje študentov matematike *International mathematics competition*, na kratko IMC. Dvaintrideseta izvedba tekmovanja je potekala med 28. julijem in 3. avgustom v bolgarskem mestu Blagoevgrad. Tekmovanja se je udeležilo kar 434 tekmovalcev, ki so zastopali 74 ekip. Ekipe običajno sestavljajo člani iste univerze ali predstavniki iste države, najštevilnejšo ekipo, ki jo vodi maskota tekmovanja *Ivan the Confessor*, pa sestoji iz študentk in študentov, ki so na tekmovanje prišli brez svoje ekipe.

Slovenija je na tekmovanje poslala 11 tekmovalcev. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so letos zastopali **Luka Urbanc** iz prvega letnika, **Katarina Grilj**, **Kaja Rajter**, **Matija Skrt** in **Hugo Trebše** iz drugega letnika, **Luka Ponikvar** iz tretjega letnika ter **Jaka Vrhovnik** in **Patrik Žnidaršič** iz prvega letnika druge stopnje. FAMNIT z Univerze na Primorskem pa so zastopali **Jalal Ahmed Chowdhury** in **Eric González Vicent** iz prvega letnika ter **Diar Gashi** iz prvega letnika druge stopnje. Vodja in sovodja ekipe FMF-ja sva bila Beno Učakar in Luka Horjak, vodja ekipe FAMNIT-a pa je bil Slobodan Filipovski.

Tudi letos se lahko pohvalimo z odličnimi rezultati. Luka Urbanc in Luka Ponikvar sta osvojila prvo nagrado, Jaka Vrhovnik in Hugo Trebše drugo, dobitniki tretje nagrade pa so bili Matija Skrt, Patrik Žnidaršič in Katarina Grilj. Diar Gashi in Eric González Vicent sta dobila pohvalo, Kaja Rajter in Jalal Ahmed Chowdhury pa sta prejela potrdilo o odeležbi. Ta izkupiček