

SVET BREZ TRIKOTNIKOV

ALEKSANDAR JURIŠIĆ¹

¹Fakulteta za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 51E12, 51E14, 05A20, 05B25, 05C35, 05C50, 05E30

Podamo kratek uvod v posplošene četverokotnike (nekaj enostavnih lastnosti in konstrukcij). Poenostavljeno gre za končne geometrije brez trikotnikov (v nasprotju s projektivnimi ravninami). So tudi poseben primer delnih geometrij, pa tudi posplošenih n -kotnikov. Grafi kolinearnosti delnih geometrij so krepko regularni, kar vodi do lastnosti lastnih vrednosti grafov, pa tudi Moorovih grafov (tj. grafov, pri katerih velja, da je ožina enaka dvakratniku premera, povečanega za 1, npr. petkotnik ter Petersenov graf). Na koncu so izpostavljeni nekateri odprti problemi in naloge, ki vodijo bralca od osnov do sodobnih vprašanj na presečišču končnih geometrij in grafov.

A UNIVERSE WITHOUT TRIANGLES

A brief introduction to generalized quadrilaterals is presented (some simple properties and constructions). In simple terms these are finite geometries with no triangles (in contrast to projective planes). They are also a special case of partial geometries, and of generalized n -gons. The collinearity graphs of partial geometries are strongly regular, which leads to properties of graph eigenvalues and also to Moore graphs (i.e., graphs in which the girth equals twice the diameter plus one, such as the pentagon and the Petersen graph). Finally, some open problems and exercises are presented guiding the reader from the basics to modern questions at the intersection of finite geometries and graphs.

Uvod

Opazujmo premice v ravnini. Dve premici se tu bodisi sekata ali pa sta vzporedni. Hitro se prepričamo tudi, da je število presečišč treh premic lahko le 0, 1, 2 ali 3. Na splošno množica n -tih premic določa največ $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ presečišč, lahko pa tudi nobenega. Spodnjo mejo dosežemo, če so premice vzporedne. *Kaj pa zgornjo?*

Ste že kdaj poskusili najti v ravnini tak par množic $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 9 točk in 10 premic, da vsebuje vsaka premica $\ell \in \mathcal{L}$ natanko tri točke iz $\mathcal{P}$?

Vsekakor gre za zanimivo nalogo. Rešitev je na sliki 19, na koncu 9. razdelka.

Tudi v tem sestavku nas bo zanimal par končnih množic točk in premic $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, ki bo imel podobne, a morda še bolj zanimive lastnosti. Največja razlika bo, da sploh ne bomo delali v ravnini, temveč samo v končni množici točk, ki niso nujno v nekem prostoru, pač pa kar v naših mislih. *Premice*

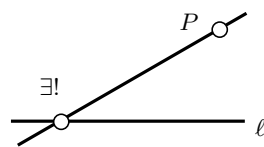
ne bodo nujno ravne (saj veste, v sanjah je marsikaj mogoče), pač pa bo šlo samo za *podmnožice točk*. Kljub neotipljivim mislim in sanjam pa nas bodo izbrane lastnosti gnale do čudovitih objektov, kot sta poleg Petersenovega grafa (10 vozlišč) še npr. Hoffman-Singletonov graf (50) ali Higman-Simsov graf (če se ustavimo pri velikosti 100).

V 1. razdelku predstavimo aksiome geometrije, ki jo imenujejo *posplošeni četverokotniki*, ter preštejemo njene točke. V 2. razdelku vpeljemo dualnost in začnemo proučevati osnovne lastnosti te geometrije, v naslednjem pa spoznamo nekaj lažjih konstrukcij. Prvi resnejši primer obdelamo v 4. razdelku. V 5. razdelku definicijo posplošimo na *delne geometrije* ter na pomoč pripeljemo grafe in v 6. razdelku še nekaj malega linearne algebre (oz. teorije asociativnih shem). V 7. razdelku predstavimo Moorove grafe, v naslednjem pa še dvodelne ekstremne grafe, ki jih je Tits poimenoval posplošeni večkotniki. Brez dokaza omenimo sloviti rezultat Feita in Higmana, iz katerega je razvidno, da so posplošeni četverokotniki z začetka presenetljivo povezani tudi z bolj poznanimi projektivnimi ravninami. V zaključku pogledamo na prehojeno pot in nazadnje zastavimo še nekaj nalog.

1. Posplošeni četverokotniki

Spomnimo se, da za točki, ki ležita na skupni premici, rečemo, da sta *kolinearni*. Vpeljimo geometrijo $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, kjer je $\mathcal{P}$ množica točk (angl. points) in $\mathcal{L}$ množica premic (angl. lines), s parametroma $s, t \in \mathbb{N}$, za katero veljajo naslednji aksiomi:

- (A0) Skozi poljubni različni točki iz $\mathcal{P}$ obstaja največ ena premica iz $\mathcal{L}$.
- (A1) Vsaka točka $P \in \mathcal{P}$ leži na $t + 1$ premicah iz $\mathcal{L}$.
- (A2) Vsaka premica $\ell \in \mathcal{L}$ vsebuje $s + 1$ točk iz $\mathcal{P}$.
- (A3) Za vsako premico $\ell \in \mathcal{L}$ in točko $P \in \mathcal{P}$, ki ne leži na tej premici, obstaja *natanko določena* premica iz $\mathcal{L}$ skozi točko P , ki seka premico ℓ (glej sliko 1).

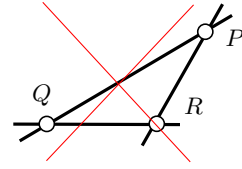


Slika 1: Aksiom (A3)

Geometrije s temi aksiomi imenujemo *posplošeni četverokotniki* (angl. generalized quadrangles) in označimo z $\text{GQ}(s, t)$. Aksiom (A0) nam zagotavlja, da se poljubni premici iz $\mathcal{L}$ sekata v največ eni točki. Prepričaj se, da lahko zaradi aksioma (A0) aksiom (A3) zamenjamo z izjavo: *na premici ℓ obstaja natanko določena točka, ki je kolinearna s točko P* .

Lema 1. V $\text{GQ}(s, t)$ ni trikotnikov, tj. treh paroma kolinearnih točk.

Dokaz. Če bi na primer obstajal trikotnik PQR (glej sliko 2), bi namreč za točko P in premico QR imeli dve premici (PQ in PR) skozi točko P , ki sekata premico QR . To pa bi bilo v nasprotju z aksiomom (A3). $\square$

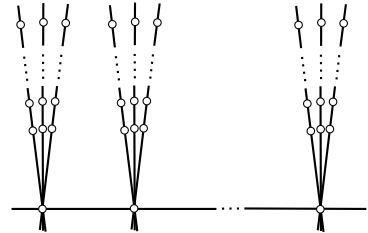


Slika 2: Trikotniki niso možni

V $GQ(s, t)$ lahko velikost množice $\mathcal{P}$ izrazimo s parametroma s in t .

Trditev 2. Število vseh točk v posplošenem četverokotniku $GQ(s, t)$ je natanko $(s + 1)(ts + 1)$.

Dokaz. Izberimo neko premico $\ell \in \mathcal{L}$. Na njej leži $s + 1$ točk. Za vsako drugo točko iz $\mathcal{P}$ velja po (A3), da leži na natanko določeni premici, ki seka premico ℓ . Skozi vsako izmed točk na ℓ gre poleg ℓ še t drugih premic. Na vsaki izmed teh t premic leži poleg točke na ℓ še s drugih točk (glej sliko 3). Po (A0) in lemi 1 med temi točkami ni prekrivanja in je vseh točk v $\mathcal{P}$ natanko $(s + 1) + (s + 1)ts = (s + 1)(ts + 1)$. $\square$



Slika 3: Štetje točk v $GQ(s, t)$

2. Dualnost

V vsaki izjavi o geometriji lahko zamenjamo vloži točk in premic ter še nekaj izrazov, kot so *kolinearnost* in *sekati se* ali pa *leži na* in *gre skozi*. Na ta način pridemo do *dualne* izjave. Oglejmo si nekaj primerov:

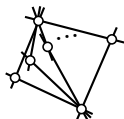
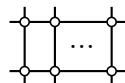
- premici se sekata $\rightarrow$ točki sta kolinearni,
- točka leži na premici $\rightarrow$ premica vsebuje točko.

Če dualna izjava trdi isto kot originalna, kot se je zgodilo v drugem primeru, potem pravimo, da gre za *sebi-dualno* izjavo.

Na poljubnem primeru se prepričajte, da je *dualni* dokaz neke trditve v resnici dokaz dualne trditve. V poljubni geometriji točke A, B, C, D predstavljajo *četverokotnik*, če so $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$ in $\{D, A\}$ pari kolinearnih točk, para $\{A, C\}$, $\{B, D\}$ pa nista taka (glej sliko 7(a)).

Lema 3. V posplošenem četverokotniku $GQ(s, t)$ velja:

- (a) poljubni nekolinearni točki sta hkrati kolinearni z natanko $t + 1$ točkami, le-te pa so paroma nekolinearne (glej sliko 4),
- (b) poljubni premici, ki se ne sekata, določata lestev $(s + 1) \times 2$, tj. hkrati ju seka natanko $s + 1$ premic, le-te pa se paroma ne sekajo (glej sliko 5),
- (c) poljubni točki ležita v nekem četverokotniku.

Slika 4: $t + 1$ točk

Slika 5: Lestev

Dokaz. (a) Naj bosta A in B nekolinearni točki. Po aksiomu (A1) gre skozi točko A natanko $t + 1$ premic. Po aksiomu (A3) pa na vsaki od teh premic leži natanko ena točka, ki je kolinearna s točko B . Skupaj dobimo torej natanko $t + 1$ točk (aksiom (A0)), ki so kolinearne z A in B hkrati, paroma pa niso kolinearne po lemi 1.

(b) To je ravno dual prve trditve (ne bo škodilo, če bralec za vajo dokaz iz (a) res 'dualizira').

(c) Če začnemo z dvema nekolinearnima točkama, si pomagamo s točko (a), sicer pa uporabimo točko (b) (glej sliko 5), kajti na lestvi hitro najdemo četverokotnik. $\square$

Tudi iz dane geometrije $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lahko dobimo novo, t. i. *dualno* geometrijo $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$, tako da zamenjamo vlogi točk in premic, tj. $(\mathcal{P}', \mathcal{L}') = (\mathcal{L}, \mathcal{P})$. Oglejmo si, kaj se v tem primeru zgodi z aksiomi posplošenega četverokotnika.

- (B0) Na dveh različnih premicah iz $\mathcal{L}$ obstaja največ ena skupna točka iz $\mathcal{P}$.
- (B1) Vsaka premica $\ell \in \mathcal{L}$ vsebuje $t + 1$ točk iz $\mathcal{P}$.
- (B2) Vsaka točka $P \in \mathcal{P}$ leži na $s + 1$ premicah $\mathcal{L}$.
- (B3) Za vsako točko $P \in \mathcal{P}$ in premico $\ell \in \mathcal{L}$, ki ne vsebuje te točke, obstaja natanko določena točka na premici ℓ , ki je na skupni premici s točko P .

Aksioma (A0) in (A3) sta sebi-dualna (tj. aksioma (A0) in (B0) sta odvisna drug od drugega, enako pa velja za (A3) in (B3)), pri aksiomih (A1) in (A2) pa se je spremenil le vrstni red, kar pomeni, da smo iz $GQ(s, t)$ dobili

$GQ(t, s)$. Sedaj lahko uporabimo trditev 2 za izračun števila $|\mathcal{L}|$, tj. števila premic v $GQ(s, t)$.

Posledica 4. Število vseh premic v posplošenem četverokotniku $GQ(s, t)$ je $(t+1)(ts+1)$. $\square$

3. Enostavnejše konstrukcije

Podali smo definicijo geometrije, za katero smo zahtevali, da veljajo neki čisto novi aksiomi. Na splošno obstaja velika nevarnost, da ni nobenega primera take geometrije ali pa veliko nezanimivih. Izkazalo pa se je, da za posplošene četverokotnike to na srečo ne drži. Najmanjši primer te geometrije, za $s = t = 1$, je četverokotnik. Naša geometrija ima torej kar pravšnje ime. Poiščimo še kakšen večji primer posplošenega četverokotnika. Naj bo $n \geq 2$ in $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Potem geometriji s točkami (i, j) za $i, j \in \mathbb{Z}_n$ in premicami

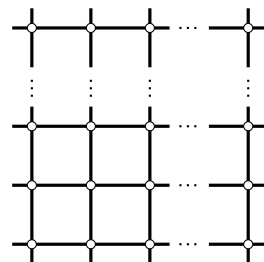
$$\{(a, c) \mid a \in \mathbb{Z}_n\} \text{ za vsak } c \in \mathbb{Z}_n \quad \text{in} \quad \{(c, a) \mid a \in \mathbb{Z}_n\} \text{ za vsak } c \in \mathbb{Z}_n$$

rečemo $(n \times n)$ -mreža. Ta geometrija je posplošen četverokotnik $GQ(n-1, 1)$. Podmnožici premic neke geometrije, ki predstavljajo razdelitev (particijo) vseh točk te geometrije, pravimo *razpetje* (obstoj takšne podmnožice v $GQ(s, t)$ ni zagotovljen, njena velikost pa mora biti enaka $st+1$), npr. prva oz. druga skupina zgornjih premic je razpetje za $GQ(n-1, 1)$.

Četverokotnik lahko narišemo v ravnini na več različnih načinov (glej sliko 7(a)). Za našo geometrijo, ki v resnici ne ve za ravnino, to ni pomembno. Če lahko za točke dveh geometrij poiščemo tako bijekcijo, ki ohranja *kolinearnost*, rečemo, da sta geometriji *izomorfni*.

Trditev 5. Posplošen četverokotnik $GQ(s, 1)$ je izomorfen $((s+1) \times (s+1))$ -mreži oz. je enoličen (glej sliko 6).

Dokaz. Naj bo h_0 poljubna premica v geometriji $\text{GQ}(s, 1)$. Zaradi $t = 1$ gre skozi vsako točko premice h_0 poleg h_0 še natanko ena premica. Označimo te premice z $v_0, \dots, v_s$. Ker sekajo premico h_0 , se po lemi 1 medsebojno ne sekajo. Torej tvorijo razpetje. Na enak način ugotovimo tudi, da sekajo premico v_0 poleg premice h_0 še premice $h_1, \dots, h_s$. Tudi premice $h_0, \dots, h_s$ tvorijo razpetje. Po askiomu (A3) vsaka točka leži na natanko določeni premici h_i , ter natanko določeni premici v_j ($i, j \in \mathbb{Z}_{s+1}$), zato jo lahko označimo z (i, j) . Potem je $h_i = \{(a, i) \mid a \in \mathbb{Z}_n\}$ in $v_j = \{(j, a) \mid a \in \mathbb{Z}_n\}$ za $i, j \in \mathbb{Z}_n$, kar smo želeli pokazati. $\square$

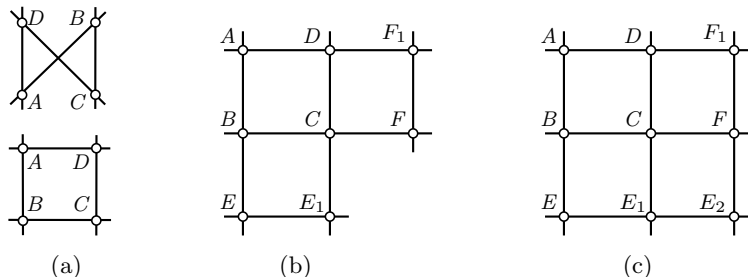
Slika 6: $\text{GQ}(s, 1)$

Zgornja trditev nam torej zagotavlja, da obstaja (do izomorfizma) en sam posplošen četverokotnik $\text{GQ}(s, 1)$. To nam omogoča, da označimo $((s+1) \times (s+1))$ -mrežo kar z $\text{GQ}(s, 1)$. Tudi v primeru $\text{GQ}(1, t)$ gre za natanko določeno geometrijo (glej 1. nalogo).

Odslej naj bosta oba parametra s in t večja od 1. Za začetek privzemimo $s = 2$.

Lema 6. *Naj bo $\mathcal{G}$ posplošen četverokotnik $\text{GQ}(2, t)$, $t \geq 2$. Poljubne štiri točke, ki določajo četverokotnik, lahko dopolnimo na natanko en način s petimi točkami tako, da 9 točk s kolinearnostjo iz $\mathcal{G}$ določa (3×3) -mrežo (glej sliko 7(c)).*

Dokaz. Naj bo $ABCD$ četverokotnik. Zaradi leme 1 se premici AB in CD ne sekata, enako pa velja tudi za premici BC in DA . Ker je $s = 2$, obstajata po Lemi 3(b) premica, ki seka obe premici AB in CD , ter premica, ki seka premici BC in DA . Označimo presečišči prve premice zaporedoma z E in E_1 , druge pa zaporedoma s F in F_1 (glej sliko 7(b)),



Slika 7. (a) Množica premic je v obeh primerih enaka:

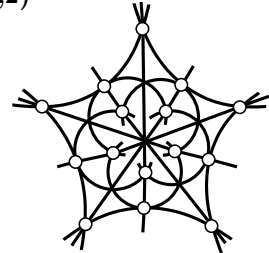
$$\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}\},$$

(b) skoraj 3×3 mreža, (c) 3×3 mreža.

še neimenovano tretjo točko na premici EE_1 pa z E_2 . Točki E in F nista kolinearni, ker bi sicer imeli trikotnik BEF . Prav tako tudi točki E_1 in F nista kolinearni (ker bi sicer imeli trikotnik CE_1F_1). Tako mora biti po aksiomu (A3) točka F kolinearna z neko točko na premici EE_1 , vendar slednja vsebuje le še E_2 . Zaključimo, da sta F in E_2 kolinearni, enak razmislek pa pokaže, da sta kolinearni tudi F_1 in E_2 . Ker so točke F , F_1 in E_2 paroma kolinearne in v geometriji ni trikotnikov, morajo ležati na skupni premici (glej sliko 7(c)). $\square$

4. Posplošeni četverokotnik $GQ(2,2)$

Vsak posplošen četverokotnik $GQ(2,2)$ sestavljajo premice, na katerih so natanko tri točke, skozi vsako točko pa gredo natanko tri premice. V $GQ(2,2)$ imamo torej 15 točk in 15 premic (glej npr. sliko 8).



Slika 8: $GQ(2,2)$

Kombinatorična predstavitev

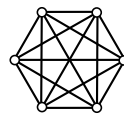
Naj bo $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Za točke vzemimo vse možne (neurejene) pare števil iz množice V . Vseh 15 smo našeli v tabeli 1. Množico V lahko s tremi pari števil razbijemo na tri dele, npr.

$$\{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\} \text{ ali } \{\{1,3\}, \{2,4\}, \{5,6\}\}.$$

Takih razbitij množice V na tri pare je natanko 15 (glej tabelo 1 in sliko 9). Ta razbitja bodo predstavljala premice. Rekli bomo, da točka $\{i, j\}$ leži na premici natanko tedaj, ko ustrezno razbitje vsebuje par $\{i, j\}$.

toke	premice
$\{1, 2\}$	$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
$\{1, 3\}$	$\{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$
$\{1, 4\}$	$\{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$
$\{1, 5\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$
$\{1, 6\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4, 6\}\}$
$\{2, 3\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$
$\{2, 4\}$	$\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$
$\{2, 5\}$	$\{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$
$\{2, 6\}$	$\{\{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}$
$\{3, 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4, 6\}\}$
$\{3, 5\}$	$\{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}\}$
$\{3, 6\}$	$\{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}\}$
$\{4, 5\}$	$\{\{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$
$\{4, 6\}$	$\{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}$
$\{5, 6\}$	$\{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$

Tabela 1



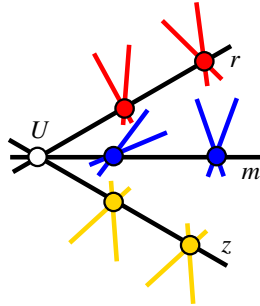
Slika 9: Poln graf K_6 ima 15 povezav. V tem kontekstu pravimo razbitju prirejanje in ga sestavljajo 3 povezave. Za prvo povezavo imamo 15 možnosti, za drugo 6 (število povezav v K_4), tretja pa je potem določena; ker pa vrstni red izbire povezav ni pomemben, moramo še deliti s $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, da dobimo 15.

Ali tabela 1 res predstavlja posplošen četverokotnik $GQ(2, 2)$? Aksioma (A0) in (A2) sta očitno izpolnjena. Sedaj pa preverimo, ali vsaka točka leži na treh različnih premicah. Premice, na katerih leži npr. točka $\{1, 2\}$, so natanko $p_1 := \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$, $p_2 := \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ in $p_3 := \{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$. Točko $\{1, 2\}$ štejemo za poljubno točko, saj lahko oznake za elemente množice V vedno premešamo tako, da bo izbrana točka imela prav te oznake. Torej za našo konstrukcijo velja aksiom (A1). Preverimo še aksiom (A3). Tokrat začnimo s točko $P = \{1, 2\}$ in premico $\ell = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$, ki ne vsebuje točke P . Že prej smo ugotovili, da točka $\{1, 2\}$ leži na premicah p_1 , p_2 ter p_3 in res med njimi le premica p_1 seka premico ℓ (konkretno se to zgodi v točki $\{5, 6\}$). Tudi v tem primeru bi lahko premešali oznake množice V tako, da bi poljubni par (točka, premica), kjer točka ne leži na tej premici, imel prav takšne oznake kot par (P, ℓ) . Torej smo se prepričali, da naša konstrukcija iz tabele 1 ustreza aksiomom za geometrijo $GQ(2, 2)$.

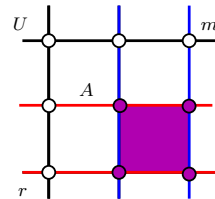
Izrek 7. *Obstaja le ena geometrija $GQ(2, 2)$, namreč zgoraj konstruirana.*

Dokaz (Skica dokaza). Naj bo $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ posplošen četverokotnik $GQ(2, 2)$ in $U \in \mathcal{P}$. Označimo z r (rdeča), m (modra) in z (zlata, čeprav mislimo na rumeno) premice skozi točko U . Na vsaki od teh treh premic sta poleg točke U še dve točki. Vsaka izmed preostalih $15 - 3 = 12$ premic, ki jim bomo rekli *nove*, vsebuje zaradi leme 1 natanko eno izmed teh 6 točk. Nove

premice pobarvajmo z rdečo, modro ali zlato glede na to, ali sekajo premico r , m ali z . Zlate premice se po lemi 1 sekajo le na premici z , tako pokrijejo prav vseh preostalih $15 - 7 = 8$ točk. Tudi slednjim bomo rekli *nove*. Enak razmislek velja za modre in rdeče premice. Vsaka nova premica gre torej skozi eno od točk na premicah r , m in z ter skozi dve točki od novih osmih, vsaka nova točka pa leži na eni rdeči, eni modri in eni zlati premici. Oglejmo si, kako se prepletajo premice dveh različnih barv. Naj bosta ti barvi npr. rdeča ter modra in naj bo A ena od novih točk. Potem točka A skupaj s svojo rdečo in modro premico ter s premicama r in m določa četverkotnik, ki po lemi 6 določa (3×3) -mrežo. Le-to sestavljata še ena modra in ena rdeča premica. Z drugimi besedami, prišli smo do “vijoličnega” četverkotnika na novih točkah.



Slika 10: Dual slike 3

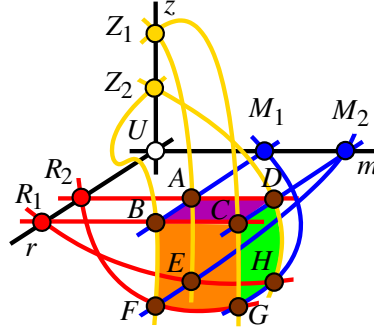


Slika 11: Vijolična ploskev

Izberimo še eno novo točko, ki ni v tem vijoličnem četverkotniku. Po pravkar povedanem je tudi ta točka v nekem drugem vijoličnem četverkotniku, ki s prvim nima nobene skupne točke, kar pomeni, da vijolična četverkotnika pokrivata vse nove točke. Na enak način tudi dva oranžna četverkotnika (kombinacija, ki jo dobimo, če začnemo z rdečo in zlato) oziroma dva zelena četverkotnika (modra in zlata) pokrivata vse nove točke. Gotovo ste že pomislili, da ima kocka 8 oglišč (nove točke), 12 robov (nove premice) in 6 lic (štirikotniki). Res je, pokazali bomo, da nove premice na novih točkah tvorijo ravno kocko. Ker si kocko po navadi predstavljamo v trirazsežnem prostoru, v mislih tja postavimo tudi naših novih 8 točk. Po klasifikaciji Platonovih teles sedaj ni več nobene druge možnosti, kot da gre res za kocko, pri čemer so nove premice povezane z novimi točkami, kot kaže slika 12. $\square$

Opomba 8.

(i) V resnici se nam ne bi bilo treba sklicevati na Platona, saj mora kombinacija dveh barv četverokotnikov sestavljati plašč, tretja barva pa je potem le še podstavek in pokrov. S tem je naša konstrukcija končana, saj smo povezali vse nove točke z novimi premicami.

Slika 12: $GQ(2, 2)$ s kocko

(ii) Točke s slike 12 ustrezajo točkam kombinatorične konstrukcije, npr. na naslednji način:

U	R ₁	R ₂	M ₁	M ₂	Z ₁	Z ₂	A	B
{1,2}	{3,4}	{5,6}	{3,5}	{4,6}	{3,6}	{4,5}	{2,5}	{1,6}
C	D	E	F	G	H			
{2,4}	{1,3}	{1,4}	{2,3}	{1,5}	{2,6}			

5. Druge geometrije in povezava z grafi

V definiciji posplošenega četverokotnika $GQ(s, t)$ nadomestimo aksiom (A3) z aksiomom:

(D3) Naj bo $\alpha \in \mathbb{N}$. Za vsako premico $\ell \in \mathcal{L}$ in točko $P \in \mathcal{P}$, ki ne leži na tej premici, obstaja natanko α premic skozi točko P , ki sekajo premico ℓ .

Očitno je $\alpha \leq \min(s + 1, t + 1)$ in gre za posplošitev aksioma (A3), saj dobimo za $h = 1$ posplošeni četverokotnik. Za $\alpha = s + 1$ dobimo geometrijo poznano pod imenom **2**-($v, \alpha, 1$) *načrt*, pri čemer je $v := |\mathcal{P}|$ (angl. 2-design, tudi Steiner system $S(2, s + 1, ts + 1)$), za $\alpha = s$ *transverzalni načrt* (angl. transversal design $TD(s + 1, t + 1)$), za $\alpha = t$ pa *mrežo* (angl. net). Če je $R = t + 1$, $K = s + 1$ in $T = \alpha$, potem geometrijo z aksiomi (A0)-(A2) in (D3) imenujemo *delna geometrija* s parametri (R, K, T) (angl. partial geometry, in zato oznaka $pg(s, t, \alpha)$). Leta 1963 jo je vpeljal Bose. Iz geometrije lahko skonstruiramo graf na naslednji način. Za vozlišča grafa vzemimo njene točke, različni vozlišči pa sta sosednji, če sta ustrezni točki kolinearni. Dobljeni graf imenujemo *graf kolinearnosti* oz. *točkovni graf*.

Le-ta je *enostaven*, tj. nima zank ali večkratnih povezav. Za osnovne pojme iz teorije grafov glej Vrabec [24], Bajc in Pisanski [4] ter Batagelj, Marušič, Klavžar in Mohar [5].

Za (enostaven) graf na v vozliščih rečemo, da je *krepro regularen* (angl. strongly regular) s parametri (v, k, a, c) , oznaka $\text{SRG}(v, k, a, c)$, če ima vsako vozlišče k sosedov, in imata vsaki dve sosednji vozlišči a skupnih sosedov, vsaki dve nesosednji vozlišči pa c . Za parametre mora veljati $1 \leq c \leq k$ in $0 \leq a \leq k - 1$. Na primer, graf kolinearnosti posplošenega četverokotnika $\text{GQ}(2, 2)$ je $\text{SRG}(15, 6, 1, 3)$. Enako pa velja tudi za poljubno delno geometrijo, glej 8. nalogo.

Naj bo G krepko regularen graf s parametri (v, k, a, c) . Iz $c=0$ sledi, da v grafu G ne obstajata vozlišči na razdalji 2, kar pomeni, da gre za polni graf K_{k+1} (v tem primeru je $a = k - 1$) ali pa unijo takšnih grafov ($G = tK_{k+1}$, $t \geq 2$). V primeru $c \neq 0$ pa je premer grafa G enak 2. Če na dva različna načina preštejemo povezave med sosedi in nesosedi nekega vozlišča, dobimo naslednjo zvezo

$$(v - k - 1)c = k(k - 1 - a),$$

zato se pogosto uporablja tudi oznaka $\text{SRG}(k, a, c)$. Komplement $\overline{G}$ grafa G je prav tako krepko regularen, glej 9. nalogo. Npr. $\overline{tK_n} = K_{t \times n}$, tj. poln t -delen graf, kjer so vsi "deli" (maksimalne neodvisne množice) enake velikosti. To je edini krepko regularni graf s $k = c$, tj. $\text{SRG}(tn, (t-1)n, (t-2)n, (t-1)n)$, za vse druge pa velja $c \leq k - 1$. Nadalje je graf kolinearnosti $\text{GQ}(2, 2)$ komplement trikotniškega grafa $T(6)$ (tj. grafa povezav polnega grafa K_6), ki je $\text{SRG}(15, 8, 4, 4)$.

Več o teh grafih najdete v knjigi *Krepko-regularni grafi*, avtorjev Bruwerja in Van Maldeghema [9]. Npr. za določene parametre je krepko regularen graf celo ekvivalenten delni geometriji, tj. iz njega lahko konstruiramo delno geometrijo. Tak primer so točkovni grafi od $\text{GQ}(q, q^2)$, kjer je q potenca praštevila, glej [9, Izrek 1.3.11], cf. [15, Izrek 5.5].

V primeru posplošenega četverokotnika $\text{GQ}(2, 2)$ pa lahko pridemo do njega tudi tako, da začnemo s Petersenovim grafom, ki je $\text{SRG}(10, 3, 0, 1)$ (glej sliko 13). Slednji je enoličen, tj. do izomorfizma grafov natanko določen s temi parametri (lahka domača naloga). Ima 15 povezav, njegov graf povezav pa ima 15 vozlišč. V grafu povezav povežemo vsa vozlišča, ki so na razdalji 3. Končno nadomestimo vozlišča s točkami, vseh 15 trikotnikov pa s premicami.

6. Lastne vrednosti grafov

Bolj zahtevnim bralcem omenimo še povezavo grafov z linearno algebro. Vozlišča grafa G predstavimo z elementi iz $\mathbb{Z}_{v-1}$. *Matrika sosednosti* $A = A(G)$ je kvadratna matrika z v vrsticami, kjer je $A_{ij} = 1$ ($i, j \in \mathbb{Z}_{v-1}$), če sta vozlišči i in j sosednji in 0 sicer. Spomnimo se, da je število θ lastna vrednost matrike A , če obstaja neničeln vektor $\vec{x} = (x_0, \dots, x_{v-1})^T$, za katerega velja:

$$A\vec{x} = \theta\vec{x}$$

oziroma, če zapišemo i -to komponento (kombinatorično),

$$\sum_{j \sim i} x_j = \theta x_i \quad (0 \leq i < v).$$

Če štejemo komponente vektorja $\vec{x}$ za oznake vozlišč našega grafa, potem nam desna zveza pravi, da je vsota oznak sosedov vozlišča i enaka večkratniku oznake vozlišča i , faktor pa predstavlja lastno vrednost θ . Za lastne vrednosti matrike sosednosti grafa G bomo rekli, da so kar lastne vrednosti grafa G . Za $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ velja:

$$\text{graf } G \text{ je regularen (stopnje } k) \iff \begin{array}{l} \mathbf{1} \text{ je lasten vektor} \\ (\text{z lastno vrednostjo } k). \end{array} \quad (1)$$

V primeru (neusmerjenega) grafa je matrika A simetrična in so zato njene lastne vrednosti realna števila. Za komponento lastnega vektorja x_i , ki je najbolj oddaljena od 0, velja $x_i \neq 0$ (saj je $\vec{x} \neq 0$) in zaradi trikotniške neenakosti tudi

$$\text{stopnja}(i) \geq \sum_{j \sim i} \frac{|x_j|}{|x_i|} \geq \left| \sum_{j \sim i} \frac{x_j}{x_i} \right| = |\theta|. \quad (2)$$

Od tod sledi:

$$\text{Spektralni radij grafa } G \text{ je navzgor omejen z maksimalno stopnjo vozlišča v grafu } G. \quad (3)$$

Naj bo G k -regularen graf in $\theta = k$ v oceni (2). Potem iz (3) sledi, da njeni neenakosti preideta v enakost. Iz prve enakosti (maksimalnost komponente x_i po absolutni vrednosti) sledi $|x_i| = |x_j|$ za vsakega sosedo j vozlišča i , kar pa pomeni, da so tudi oznake sosedov vozlišča i maksimalno oddaljene od 0 v grafu G . Zato tudi $|x_j| = |x_\ell|$ za vsakega sosedo ℓ vozlišča $j, \dots$. Dodajmo še predpostavko, da je graf G povezan. Potem zaključimo $|x_0| = \dots = |x_{v-1}|$. Iz druge enakosti v (2) (ko v trikotniški neenakosti velja enakost) pa sledi,

da morajo imeti vse komponente enak predznak oz. vektorja $\vec{x}$ in $\mathbf{1}$ sta kolinerna. Ker je $\vec{x}$ predstavljal poljuben lasten vektor, smo se prepričali o veljavnosti naslednje trditve:

Večkratnost stopnje k v povezanem k -regularnem grafu je enaka 1. (4)

Za $v \in \mathbb{N}$ naj bo $I = I_v$ identična matrika, $J = I + A(K_v)$, tj. matrika samih enic. Potem za krepko regularen graf G s parametri (v, k, a, c) in $A(\overline{G}) = J - I - A$ velja (glej 11. nalogo):

$$A^2 = kI + aA(G) + cA(\overline{G}) \quad (5)$$

(in je $\{I, A(G), A(\overline{G})\}$ (metrična) asociativna shema, glej Jurišić in Mikla-vič [15]). Relacijo (5) pomnožimo z desne z lastnim vektorjem $\vec{x}$, ki ustreza lastni vrednosti $\theta \neq k$ in je zato pravokoten na $\mathbf{1}$ oz. je v jedru matrike J , nato pa si ogledamo samo komponento, za katero je $x_i \neq 0$ in po deljenju z x_i dobimo:

$$\theta^2 - (a - c)\theta + (c - k) = 0 \quad (6)$$

oziroma, če rešitvi te enačbe označimo s σ in τ ($\sigma > \tau$), po Vietovih pravilih velja

$$\begin{aligned} c &= k + \sigma\tau, & a &= k + \sigma + \tau + \sigma\tau, \\ v &= \frac{(k - \sigma)(k - \tau)}{k + \sigma\tau}, & m_\sigma &= \frac{(\tau + 1)k(k - \tau)}{c(\tau - \sigma)} \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (7)$$

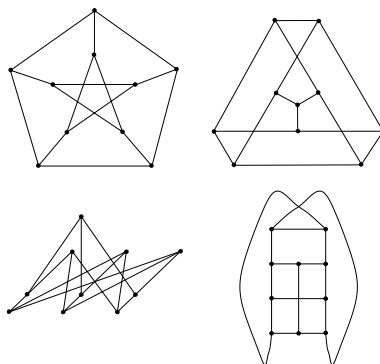
in $m_\tau = v - 1 - m_\sigma$ (za izračun večkratnosti lastnih vrednosti smo uporabili še dejstvo, da je $0 = \text{sled}(A) = k + \tau m_\tau + \sigma m_\sigma$). Celoštevilčnost parametrov krepko regularnega grafa in večkratnosti m_σ precej omeji možnosti za parametre delnih geometrij oz. bolj konkretno posplošenih četverokotnikov. Obstajajo pa še drugi pogoji za obstoj, ki presegajo ta sestavek, glej Brouwer in Van Maldeghem [9, str. 16], cf. [15, Izreka 5.3 in 5.4].

7. Moorovi grafi

Ko smo že omenili grafe, predstavimo bralcu še en pogled na najbolj zanimiv aksiom posplošenega četverokotnika (A3). Dolžini najkrajšega cikla v grafu G pravimo *ožina* (angl. girth) in jo označimo z $g = g(G)$. Sami se prepričajte, da za graf G premera d , ki ni drevo (v tem primeru bi lahko definirali, da je ožina ∞), velja

$$g \leq 2d + 1. \quad (8)$$

Grafe, za katere velja v zgornji neenakosti enakost, imenujemo *Moorovi grafi*. Singleton je pokazal, da je Moorov graf nujno regularen (to je lahko tudi domača naloga za ambiciozne bralce). Poln graf je očitno Moorov. *Kaj pa, če graf ni poln?* Tudi v tem primeru ni težko najti neskončno primerov Moorovih grafov: lihi cikli C_{2d+1} . *Kaj pa če bi radi našli še kakšen primer, ki ni ne poln graf in tudi ne cikel.* Večina bralcev, ki so se že kdaj srečali s teorijo grafov, bi verjetno pomislili na *Petersenov graf*. Le-ta nima ne trikotnikov ne četverkotnikov, njegov premer pa je 2. Ker v tem grafu ni težko najti 5-cikla (C_5), smo prišli do novega primera Moorovega grafa.



Slika 13. Petersenov graf $4 \times$. Lahko ga dobimo tudi iz pravilnega četverca ali tetraedra, tako da dodamo po eno točko na središče vsakega roba in paroma povežemo tiste, ki ustrezajo robovom, ki se ne stikajo.

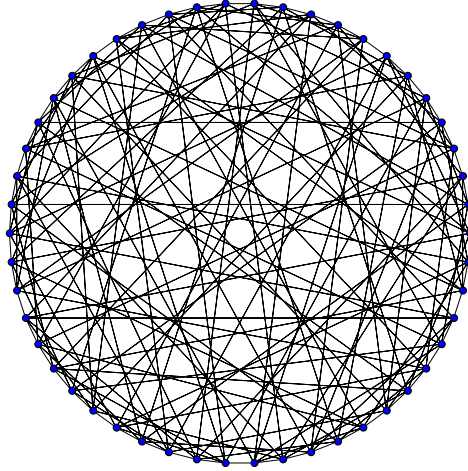
Naslednji primer Moorovega grafa pa ni tako lahko najti, saj ima že 50 vozlišč in stopnjo 7. Vseeno je to uspelo leta 1960 A. Hoffmanu in R. Singletonu. Predstavimo elegantno konstrukcijo N. Robertsona, glej pa tudi sliko 14. Za $j, \ell \in \mathbb{Z}_5$ naj bo P_j petkotnik in Q_ℓ peterokraka (tj. za $i \in \mathbb{Z}_5$ je vozlišče i iz P_j oz. iz Q_ℓ sosednje vozliščema $i \pm 1$ v P_j oz. $i \pm 2$ v Q_ℓ). Sedaj pa dodajmo vsakemu vozlišču še pet povezav: za vse $i, j, \ell \in \mathbb{Z}_5$ povežemo vozlišče i petkotnika P_j z vozliščem $i + j\ell$ peterokrake Q_ℓ . Tudi v tem primeru gre za enoličen krepko regularen graf $\text{SRG}(7, 0, 1)$, cf. Jurišić in Vidali [16], ki sta za dokaz enoličnosti uporabila enoličnost Sylvestrovega grafa, glej sliko 14.

Damerell [12] je za $k \geq 3$ in $d \geq 3$ v Moorovih grafih pokazal, da mora obstajati iracionalna lastna vrednost, ki pa ne more imeti celoštevilčne večkratnosti (cf. Bannai in Ito [3], Biggs [6]), tako da lahko privzamemo $d = 2$ in zaključimo, da je Moorov graf $\text{SRG}(k, 0, 1)$. Z uporabo celoštevilskosti večkratnosti lastnih vrednosti dobimo še $k \in \{2, 3, 7, 57\}$.

Izrek 9. *Edini Moorovi grafi, ki niso polni grafi ali lihi cikli, so Petersenov graf ($k = 3$), Hoffman-Singletonov graf ($k = 7$) in morda še krepko regularni graf na 3250 vozliščih ($k = 57$).*

Obstoj “poslednjega” Moorovega grafa na 3250 vozliščih in stopnjo 57

je odprt problem že več kot 60 let. Jurišić in Vidali [16] sta pokazala, da je obstoj tega grafa ekvivalenten obstoju razdaljno-regularnega grafa premera 3, s presečnim zaporedjem $\{55, 54, 2; 1, 1, 54\}$, $v = 3136$ in spektrom $55^1 7^{1617} - 1^{110} - 8^{1408}$. Za potencialen neobstoj slednjega grafa glej Makhnev [20], vendar tudi Faber in Keegan [13].



Slika 14. Hoffman-Singletonov graf. Konstruirati se ga da tudi iz $GQ(2, 2)$: za vozlišča vzamemo vse možne pare (oval, razpetje), kjer je oval dual razpetja, glej 4. nalogo, ter sta para (O, S) in (O', S') sosednja natanko tedaj, ko je

$$O \cap O' = \{P\} \in \mathcal{P}, \quad S \cap S' = \ell \in \mathcal{L} \text{ in } P \in \ell;$$

dobimo 5-regularen graf (na 36 vozliščih), premera 3 in ožine 5, v katerem za vsako vozlišče v velja, da vozlišča, ki so na razdalji 2 od v , inducirajo unijo ciklov, vozlišča na razdalji 3 od v pa $5K_2$, ki se imenuje Sylvestrov graf. Iz tega grafa lahko skonstruiramo nov graf na istih vozliščih, tako da povežemo tista vozlišča, ki so v originalnem grafu na razdalji 3. Dobljeni graf je graf kolinearnosti od $GQ(5, 1)$, tj. $K_6 \times K_6$, ki je tudi $SRG(10, 1, 2)$. V $GQ(5, 1)$ imamo 2 razpetji in 12 premic, ki skupaj predstavljajo množico 14 vozlišč. Dodamo jih Sylvestrovemu grafu in tako dobimo 50 vozlišč. Manjkajoče povezave naj za vajo doda bralec sam in nato preveri, če je res dobil pravi graf.

8. Posplošeni n -kotniki

V primeru dvodelnih grafov se da zgornja meja za ožino iz (8) izboljšati v **2d**. Dvodelne grafe, ki dosežejo to mejo, je *Jacques Tits* (leta 1959) je vpeljal in poimenoval *posplošeni večkotniki* oz. *poligoni* (angl. generalized polygons).

Naj bo G dvodelni graf (tj. brez lihih ciklov) in $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ geometrija.

Če vozlišča v enem delu grafa G ustrezajo točkam, vozlišča v drugem delu pa premicam in poljubna točka $P \in \mathcal{P}$ leži na poljubni premici $\ell \in \mathcal{L}$ natanko tedaj, kadar sta P in ℓ sosednji v grafu G , potem rečemo, da je G *incidenčni graf* geometrije $\mathcal{G}$. Ime izhaja iz dejstva, da relaciji $P \in \ell$ rečemo tudi, da sta točka P in premica ℓ *incidenčni*. Geometrijo $\mathcal{G}$, ki jo dobimo iz dvodelnega grafa G premera n , imenujemo *posplošeni n -kotnik*, če velja naslednji aksiom:

(I3) Ožina grafa G je dvakratnik njegovega premera, tj. $2n$.

Zanjo pravimo, da ima *red* (s, t) , kadar velja še

(I1) Vozlišče iz dela $\mathcal{L}$ ima stopnjo $t + 1$.

(I2) Vozlišče iz dela $\mathcal{P}$ ima stopnjo $s + 1$.



Slika 15. Jacques Tits

Za posplošeni n -kotnik rečemo, da je *debel*, če je vsaka točka (premica) incidenčna z vsaj tremi premicami (točkami). Z nekaj dela se lahko prepričamo, da imajo debeli posplošeni n -kotniki vedno red (s, t) za neki naravni števili $s, t \geq 2$. Walter Feit in Graham Higman, ki sta znana po svojem delu na področju klasifikacije enostavnih končnih grup, pa sta leta 1964 dokazala sloviti izrek, glej npr. [7, Thm. 6.5.1]:

Izrek 10. Vsak končni posplošeni n -kotniki, za katerega je $s, t \geq 2$, obstaja le, če je $n \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$. Za $n = 2$ je posplošen 2-kotnik poln dvodelen graf $K_{s+1, t+1}$.

Za $n = 3$ dobimo projektivno ravnino in $s = t$,

Za $n = 4$ dobimo posplošen četverokotnik $\text{GQ}(s, t)$, $\sqrt{t} \leq s \leq t^2$.

Za $n = 6$ dobimo posplošen šestkotnik, $\text{GH}(s, t)$, st je popoln kvadrat in $t^{1/3} \leq s \leq t^3$.

Za $n = 8$ dobimo posplošen osemkotnik, $\text{GO}(s, t)$, $2st$ je popoln kvadrat in $\sqrt{t} \leq s \leq t^2$.

Opomba 11. (i) Večino neenakosti v zgornjem izreku je prispeval D.G. Higman. (ii) Za definicijo projektivne ravnine (podobne tisti za posplošene četverokotnike, s katero smo začeli), glej npr. Kiss in Malnič [17].



Slika 16. W. Feit in G. Higman.

Če se omejimo na posplošene četverokotnike s tremi točkami na vsaki premici, tj. $s = 2$, potem obstaja poleg $GQ(2, 1)$ in $GQ(2, 2)$ le še $GQ(2, 4)$. V ta namen bi lahko najprej pokazali Higmanovo neenakost $t \leq s^2$, ki velja v $GQ(s, t)$ za $s > 1$ in $t > 1$ (z nekaj štetja gre le za uporabo neenakosti med kvadratno in aritmetično sredino). V našem primeru to pomeni $t \leq 4$. Iz celoštevilčnosti večkratnosti lastnih vrednosti sledi, da za $GQ(s, t)$ velja tudi $s + t \mid st(s + 1)(t + 1)$, zato je $t \neq 3$ in $GQ(2, 3)$ ne obstaja.

Bi znali iz $GQ(2, 2)$ skonstruirati $GQ(2, 4)$? Slednji četverokotnik mora imeti 27 točk in 45 premic, torej še 12 novih točk in 30 novih premic. Začnimo s kombinatorično konstrukcijo, ki smo jo opisali na začetku 4. razdelka in označimo nove točke z $1, 2, \dots, 6$ in $1', 2', \dots, 6'$. Nove premice naj bodo $\{i, \{i, j\}, j'\}$ za $1 \leq i, j \leq 6$ in $i \neq j$. Bralcu prepustimo preverjanje, da smo res dobili posplošen četverokotnik $GQ(2, 4)$ in omenimo, da je v resnici edini s temi parametri.

Za konec omenimo še, da sta Payne in Thas zgodbo uspešno nadaljevala tudi v primeru $s = 3$, saj mora biti $t \in \{1, 3, 5, 6, 9\}$. Skonstruirala sta posplošen četverokotnik $GQ(3, 3)$ in njegov dual (ki mu ni 'enak'), $GQ(3, 5)$ in $GQ(3, 9)$, ter pokazala, da drugih ni. V primeru $s = 4$ pa je $t \in \{1, 2, 4, 6, 8, 11, 12, 16\}$ in je poznana enoličnost za $GQ(4, 4)$ ter po ena konstrukcija v primerih $GQ(4, 6)$, $GQ(4, 8)$ in $GQ(4, 16)$, medtem ko je obstoj $GQ(4, 11)$ in $GQ(4, 12)$ še vedno odprt problem.

9. Zaključek

Ko uporabimo vse pogoje za obstoj parametrov, običajno dobimo oz. naredimo listo "dopustnih parametrov" (kot smo to videli v majhnih primerih posplošenih četverokotnikov $s \in \{2, 3, 4\}$). Za dobljene parametre ne vemo, ali kombinatorični objekt/geometrija obstaja ali ne. Tudi če konstruiramo en primer geometrije (ali pa ta že obstaja), še vedno ne vemo, ali jih je še več. Dokazi enoličnosti so običajno zahtevni. Včasih se zgodi, da drugih primerov ni, drugič pa jih je lahko celo veliko (v nekaterih primerih na področju krepko regularnih grafov celo eksponentno oz. hiperekspONENTNO mnogo).

Predstavili smo le zelo enostavno neskončno družino posplošenih četverokotnikov, tj. mreže in njihove duale ter primera $GQ(2, 2)$ ter $GQ(2, 4)$ oz. njegov dual¹. Obstajajo številne druge zanimive konstrukcije: $GQ(q, q)$,

¹Predstavimo ga lahko kot 45 točk in 27 premic Hermitske ploskve $\mathcal{U}_{3,4}$ z enačbo

$GQ(q, q^2)$, $GQ(q - 1, q + 1)$, kjer je q potenca praštevila, in njihovi duali. Neskončne družine običajno pridejo iz projektivnih prostorov, katere pogosto konstruiramo iz končnih obsegov (in jim pravimo klasične), vendar ne vedno (te druge včasih smatramo za sporadične). Več o tem področju najdete v knjigah *Končni posplošeni četverokotniki* avtorjev Payne & Thas [21] in *Posplošeni večkotniki* avtorja Van Maldeghama [19].



Slika 17. Hendrik Van Maldeghem Slika 18. Stanley Payne in Joseph A. Thas

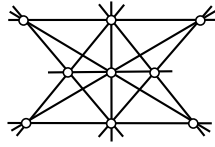
Če ste že pogledali naloge, ste morda ugotovili, da v teh geometrijah lahko iščemo še druge objekte ali strukture, kot npr. razpetja. Razpetja posplošenega četverokotnika $GQ(2, 4)^2$ so npr. lahko izpeljana iz lastnosti kubične ploskve s 27 premicami nad kompleksnimi števili. Avtor [14, str. 45] je v svojem doktoratu (neodvisno) pokazal, da obstajata dve neizomorfni razpetji in ju konstruiral oz. celo narisal, s precej več znanja o končnih geometrijah pa sta ta rezultat prva objavila Brouwer in Wilbrink [10].

Ne nazadnje se lahko v času računalnikov vprašamo, ali bi si lahko pri teh vprašanjih pomagali z njimi. Pri končnih geometrijah in grafih gre za končno število možnosti, torej človek lahko pomisli, da se da pregledati vse možnosti kar z računalnikom ali superračunalnikom in da bomo tako slej ko prej prišli do odgovora. Pa vendar ni tako, saj imamo že za krepko regularne grafe z $v \leq 100$ vozlišč veliko odprtih problemov enoličnosti (najmanjši je $SRG(37, 18, 8, 9)$ s 333 povezavami). Azarija in Marc sta pokazala neobstoj $SRG(75, 32, 10, 16)$ [1] in $SRG(95, 40, 12, 20)$ [2], letos pa sta še Shpectorov in Zhao pokazala neobstoj $SRG(85, 14, 3, 2)$ [22], tako obstaja do $v \leq 100$ še 8 odprtih problemov obstoja (najmanjši je $SRG(69, 20, 7, 5)$ s 690 povezavami, zanimiv pa je tudi $SRG(99, 14, 1, 2)$ s 693 povezavami, glej Conway [11]).

$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ nad Galoisovim obsegom $GF(4)$. Kot zanimivost omenimo še, da sta teh 27 premic že našla Cayley in Salomon leta 1849.

²Pravzaprav gre za dualno trditev, v kateri nastopajo ovali, glej 4. nalogo.

Svet brez trikotnikov



Slika 19. Rešitev naloge iz uvoda.

Naloge

1. Naj bo $\mathcal{G}$ posplošeni četverokotnik $\text{GQ}(1, t)$. Glede na to, da vsako premico sestavljata dve točki, jo štejemo za povezavo. Prepričajte se, da je $\mathcal{G}$ poln dvodelni graf $K_{t+1, t+1}$.
2. Dokaži točko (b) iz Leme 3.
3. Koliko četverokotnikov, petkotnikov in (3×3) -mrež je v $\text{GQ}(2, 2)$?
4. *Oval* $\mathcal{O}$ je dual razpetja, tj. taka podmnožica točk, da vsaka premica vsebuje natanko eno točko iz $\mathcal{O}$. Glej npr. Kiss in Malnič [18] za primer projektivne ravnine (ko je $n = 3$). Opomba: obstoj ovala v $\text{GQ}(s, t)$ ni zagotovljen, tako kot ne v primeru razpetja, sta pa zato njuni velikosti enaki $st + 1$. Koliko razpetij oziroma ovalov je v $\text{GQ}(2, 2)$?
5. V kombinatorični konstrukciji $\text{GQ}(2, 2)$, kjer so bile stranice polnega grafa K_6 točke, je oval množica 5 točk, ki ustrezajo povezavam iz enega vozlišča. Dokaži, da mora biti oval vedno množica, ki jo dobimo na tak način.
6. S 15 pari elementov iz množice $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ označite še geometrijo na sliki 8, tako da bodo premice res ustrezale razbitjem množice V . (Ker je grupa simetrij za $\text{GQ}(2, 2)$ velika, to ne bo preveč težko. Pa bi znali morda določiti tudi to grupo?)
7. Dokaži, da je dual delne geometrije tudi delna geometrija in določi njene parametre.
8. Pokaži, da je točkovni graf delne geometrije s parametri (R, K, T) krepko regularen ter določi njegove parametre in lastne vrednosti.
9. Naj bo G krepko regularen graf $\text{SRG}(v, k, a, c)$. Dokaži, da je komplement $\overline{G}$ tudi krepko regularen graf in določi njegove parametre ter lastne vrednosti.
10. Iz Robertsonove konstrukcije je razvidno, da lahko vozlišča tega grafa razdelimo na dve polovici tako, da vsaka inducira $5C_5$. Prepričaj se, da unija vsakega petkotnika in petokrake inducira Petersenov graf (kar

pomeni, da graf nima trikotnikov) in da v tem grafu ni četverokotnikov ima pa premer 2. Od tod sledi, da gre za $\text{SRG}(7, 0, 1)$.³

11. Naj bo $v \in \mathbb{N}$, G pa graf z množico vozlišč $\mathbb{Z}_v$ in A njegova matrika sosednosti. Z matematično indukcijo se prepričaj, da je za $i, j \in \mathbb{Z}$ in za poljubno naravno število h

$$(A^h)_{ij} = \text{število sprehodov med vozlišči } i \text{ in } j \text{ dolžine } h.$$

12. Naj bo G graf premera d . Dokaži, da ima vsaj $d + 1$ različnih lastnih vrednosti.
13. (k, g) -kletka je regularen graf stopnje k in ožine g ter minimalnega števila vozlišč $v = v(k, g)$. Problem določanja števila $v(k, g)$ je leta 1959 postavil F. Kármányi, ki je opazil, da je število $v(3, 5) = 10$ ter "realizirano" s Petersenovim grafom. Določi $v(2, g)$, $v(k, 3)$, $v(k, 4)$ in $v(7, 5)$.
14. Za potenco praštevila q se da iz končnega obsega $\text{GF}(q)$, glej Tonajc [23], konstruirati posplošeni n -kotnik za

(a) $n = 3$ – projektivna ravnina $\text{PG}(2, q)$,

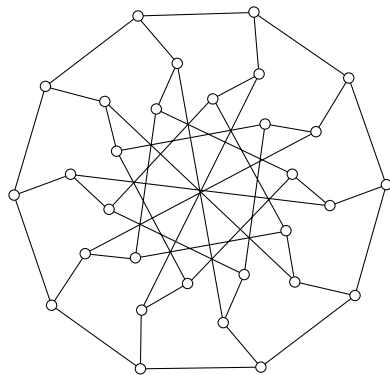
(b) $n = 4$ – posplošen štirikotnik $\text{GQ}(q, q)$, za $q = 2$ glej sl. 19,

(c) $n = 6$ – posplošen šestkotnik $\text{GH}(q, q)$,

katerega incidenčni graf je k -regularen, pri čemer je $k = q + 1$.

Prepričaj se, da je ta graf (k, n) -kletka in

(a) $v(k, 6) = 2(q^2 + q + 1)$, (b) $v(k, 8) = 2(q + 1)(q^2 + 1)$, (c) $v(k, 12) = 2(q + 1)(q^4 + q^2 + 1)$.

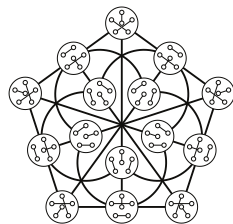


Slika 20. Tuttova $(3, 8)$ -kletka

³Kot zanimivost omenimo še, da ima Hoffman-Singletonov graf natanko 100 neodvisnih podmnožic vozlišč velikosti 15. Vsaka neodvisna podmnožica je disjunktna z natanko 7 drugimi neodvisnimi podmnožicami. Graf na 100 vozliščih, ki povezuje disjunktne neodvisne množice in pa tiste, ki se sekajo v 8 vozliščih, lahko razdelimo na dva podgrafa s 50 vozlišči, od katerih je vsak izomorfen Hoffman-Singletonovemu grafu. Gre za Higman-Simsov graf, ki je $\text{SRG}(22, 0, 6)$ in prav tako enoličen. Lahko bi nadaljevali in našli povezavo z Matejevo grupo M_{22} (Mathieu) in Wittovim načrtom ali pa Leechevo mrežo itd.

15. Na sliki 21 (z naslovnice) je predstavljen $GQ(2, 2)$ še v eni obliki. Pojasni, za kaj gre.

Rešitev. Ker je ta posplošeni četverokotnik sam sebi dualen, smo v tabeli 1 zamenjali vlogo točk in premic, tako da so tokrat točke prirejanja, prirejanja pa sestavljajo premico, kadar je presek treh prirejanj povezava v K_6 . Opozorimo še, da je K_6 narisano tako, da najprej narišemo K_5 , potem pa v sredino postavimo šesto točko, ki jo povežemo s petimi točkami, s katerimi smo začeli.



Slika 21. $GQ(2, 2)$ še enkrat, v nekoliko drugačni obliki.

16. Konstruiraj $SRG(9, 4, 1, 2)$ in dokaži njegovo enoličnost.⁴ Nadaljujmo s poljubnimi grafom, za katerega velja, da poljubna njegova povezava leži v natanko enem trikotniku ($a = 1$) in poljubni dve nesosednji vozlišči ležita v natanko enem četverokotniku ($c = 2$). Dokaži, da mora biti ta graf regularen. Potem gre za krepko regularen graf $SRG(k, 1, 2)$, iz (6) in (7) pa sledi še $k \in \{4, 14, 22, 112, 994\}$. Za $k = 14$ glej [11], za $k = 22$ pa obstaja graf, ki so ga l. 1971 konstruirali Berlekamp, Van Lint in Seidel iz ternarne Golayeve kode, cf [9, str. 333].

Iz 12. naloge sledi, da je graf z eno samo lastno vrednostjo K_1 , graf z dvema lastnima vrednostima pa K_n , $n > 1$. Grafi z največ tremi lastnimi vrednostmi so krepko regularni. V splošnem imajo razdaljno-regularni grafi (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [7], cf. [14], [15]) premera d natanko $d + 1$ lastnih vrednosti, obrat pa ne velja. Tem grafom se bomo posvetili v posebnem članku. Lahko pa omenimo, da se je za enoličnost Pattersonovega grafa kot razdaljno-regularnega grafa s parametri $\{280, 243, 144, 10; 1, 8, 90, 280\}$ uporabila enoličnost posplošenega četverokotnika $GQ(3, 9)$, glej Brouwer, Jurišić in Koolen [8]. Ta graf ima za vozlišča 22 880 centrov Sylowih 3-grup Suzukijeve grupe, kjer sta vozlišči sosednji takrat, ko generirata Abelovo grupo reda 3^2 . Dobljeni graf je primitiven, ima premer 4 in stopnjo 280.

Zahvala Mojci Mikac, s katero sva pred mnogimi leti začela študirati enoličnost posplošenega četverokotnika $GQ(2, 2)$, in recenzentoma za koristne pripombe.

LITERATURA

- [1] J. Azarija in T. Marc, There is no $(75, 32, 10, 16)$ strongly regular graph, *Lin. Alg. and its Appl.* **557** (2018), 62–83.

⁴Izkaže se, da gre za graf kolinearnosti posplošenega četverokotnika $GQ(2, 1)$.

- [2] J. Azarija in T. Marc, There is no $(95, 40, 12, 20)$ strongly regular graph, *J. Combin. Designs* **28** (2020), 294–306.
- [3] E. Bannai in T. Ito, (1973), On finite Moore graphs, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **20** (1973), str. 191–208.
- [4] D. Bajc in T. Pisanski, Najnужnejše o grafih, *Presek* **12/6** (1985).
- [5] V. Batagelj, Ovojnica vrednostne matrike, D. Marušić, Sedem posebnježev, S. Klavžar, Grafi intervalov, B. Mohar, Ravninski grafi, *Obzornik mat. fiz.* **37/4** (1990).
- [6] N.L. Biggs, Algebraic Graph Theory, in: *Cambridge Tracts in Mathematics* **67**, Cambridge University Press, London, 1974.
- [7] A.E. Brouwer, A.M. Cohen in A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*. Springer, New York, 1989.
- [8] A.E. Brouwer, A. Jurišić in J. Koolen, Characterization of the Patterson graph, *J. Algebra* **320** (2008), str. 1878–1886.
- [9] A.E. Brouwer in H. Van Maldeghem, Strongly regular graphs, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **182**, Cambridge University Press, 2022.
- [10] A.E. Brouwer in H.A. Wilbrink, Ovoids and fans in the generalized quadrangle $GQ(4, 2)$, *Geom. Dedicata* **36** (1990), str. 121–124.
- [11] J. H. Conway, Conway’s 99-graph problem, https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_99-graph_problem
- [12] R.M. Damerell, On Moore graphs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **74** (1973), str. 227–236.
- [13] V. Faber in J. Keegan, The existence of a Moore graph of degree 57 is still open, arxiv.org/pdf/2210.09577, revision: 27. februar, 2023.
- [14] A. Jurišić, Antipodni krovi, doktorska disertacija, Univerza v Waterlooju, Kanada, 1995. lkrv.fri.uni-lj.si/~ajurismic/teza.pdf
- [15] A. Jurišić in Š. Miklavič, Asociativne sheme, *Obzornik mat. fiz.* **50/3** (2003), str. 65–81.
- [16] A. Jurišić in J. Vidali, The Sylvester graph and Moore graphs, *European J. Combin.* **80** (2019), str. 184–193.
- [17] G. Kiss in A. Malnič, Končne projektivne ravnine, *Obzornik mat. fiz.* **47/5** (2000), str. 161–169.
- [18] G. Kiss in A. Malnič, Ovali v končnih projektivnih ravninah, *Obzornik mat. fiz.* **47/6** (2000), str. 129–134.
- [19] H. Van Maldeghem, *Generalized Polygons*, Springer Science & Business Media, 1998.
- [20] A.A. Makhnev, Moore graph with parameters $(3250, 57, 0, 1)$ does not exist, (v ruščini, angleški povzetek), [arXiv:2010.13443v2](https://arxiv.org/abs/2010.13443v2) [math.CO], Nov. 9, 2020.
- [21] S.E. Payne in J.A. Thas, *Finite generalized quadrangles*, Pitman, London, 1984.
- [22] S. Shpectorov in T. Zhao, Strongly regular graphs with parameters $(85, 14, 3, 2)$ do not exist, [arXiv:2504.02449](https://arxiv.org/abs/2504.02449), Apr. 3, 2025
- [23] J. Tonejc, Aritmetika dvojiških končnih obsegov, *Obzornik mat. fiz.* **57/5** (2010), str. 157–175.
- [24] J. Vrabec, Prikaz teorije grafov I, II, *Obzornik mat. fiz.* **14/2** (1967), str. 58–71 in **14/3-4** (1967), str. 107–120.