

Enaintrideseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

V letu 2024 je mednarodno matematično tekmovanje za študente potekalo med 5. in 11. avgustom, tudi tokrat v Blagoevgradu v Bolgariji. Na seznamu udeležencev je bil tokrat 401 študent, kar je največ do sedaj. Ekip je bilo 79. V vseh izvedbah je do sedaj sodelovalo že več kot 200 institucij, kar seveda pomeni, da jih mnogo ne sodeluje več. Razlogi za to so verjetno različni, a pogosto se zgodi, da ko vodja ekipe ne želi (ali zmore) več voditi svoje ekipe, ne dobi naslednika in univerza preneha s sodelovanjem. Pri nas se to na srečo ni zgodilo. Prav tako pogosto pride do kakšnih nepredvidenih neželenih okoliščin, zaradi katerih potem univerza ne sodeluje več. Tudi to se, na srečo, pri nas ni zgodilo. Več o tem kasneje.

Iz Slovenije je bilo letos spet veliko udeležencev, kar 10 tekmovalcev, še en udeleženec in trije spremljevalci. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so zastopali **Luka Ponikvar** iz drugega letnika, **Lovro Drofenik**, **Jaka Vrhovnik** in **Patrik Žnidaršič** iz tretjega letnika ter **Maša Žaucer**, **Luka Horjak** in **Job Petrovčič** iz prvega letnika druge stopnje. V ekipi je bil sicer tudi **Luka Andrenšek** iz drugega letnika, ki pa je na poti zbolel in se še pred tekmovanjem vrnil domov. Fakulteto za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem so zastopali **Diar Gashi**, **Esmir Zoletić** in **Dmytro Tupkalenko**. Vodji ekip sva bila Gregor Šega in Gregory Robson, pomočnik vodje ekipe FMF pa je bil Beno Učakar.



Slika 1. Ekipa FMF tik pred začetkom tekmovanja.

Mednarodno tekmovanje

Tudi letos so naši tekmovalci naloge reševali zelo uspešno. Luka Horjak je svojo lansko uvrstitev izboljšal še za eno mesto in s petim mestom spet osvojil veliko prvo nagrado. Poleg njega je prvo nagrado dobil tudi Job Petrovčič. Drugo nagrado so dobili Jaka Vrhovnik, Lovro Drofenik in Patrik Žnidaršič, tretjo nagrado pa Luka Ponikvar in Maša Žaucer. Prav tako je Diar Gashi osvojil tretjo nagrado, Esmir Zoletić pohvalo in Dmytro Tupkalenko potrdilo o udeležbi.

Ekipni uspeh se je odrazil pri skupni uvrstitvi, kjer je ekipa FMF dosegla **šestnajsto mesto**, kar je spet odlična uvrstitev naše ekipe. V vsakem izmed zadnjih štirih let smo vedno osvojili vsaj dve prvi nagradi, pred tem pa v štirinajstih letih le eno. Še en dokaz izjemnosti trenutne generacije tekmovalcev na FMF. Ekipa FAMNIT je bila 71-ta.

Več kot 400 tekmovalcev s spremljevalci presega zmogljivosti študentskega kampusa v Blagoevgradu, zato je bilo nekaj udeležencev nastanjenih po okoliških namestitvah. Tako se je delno sicer izgubila lokalnost tekmovanja. Tega naša ekipa sicer ni toliko občutila, saj smo bivali v Blagoevgradu manj časa od predvidenega.



Slika 2. Namesto na cilju še na poti.

Namreč, za ekipo FMF se je tokrat tekmovanje začelo neobičajno. Namesto da bi prispeli v ponedeljek (kot je bilo načrtovano), v torek prisostvo-

vali otvoritveni slovesnosti in izbirali naloge (to seveda počneta le vodja in pomočnik vodje), smo bili v sredo, na prvi tekmovalni dan, še na poti. Razlog so bile zamude v letalskem prometu. Sredi noči smo le prispeli, še nekaj časa pa je potem trajalo, da smo zbudili organizatorje in da so ti ugotovili, kam naj nas namestijo. Po le nekaj urah spanja je tekmovalce čakalo prvih pet ur reševanja nalog. Nadaljevanje sicer ni bilo brez nevšečnosti (od blizu smo spoznali tudi učinkovitost bolgarskega zdravstvenega sistema), vendar so tekmovalci vse dobro prenesli in, kot kažejo rezultati, hujšega negativnega učinka teh nevšečnosti ni bilo.



Slika 3. Ena od predavalnic tik pred začetkom reševanja.

Po vseh težavah na poti je bilo reševanje nalog za naše tekmovalce najboljša oblika sprostitev. Trije primeri sprostitev nalog sledijo.

Tokrat začnimo s kompleksnimi števili.

Naloga 1. Poiščite vse pare kompleksnih števil $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, za katere velja

$$|a| = |b| = 1 \quad \text{in} \quad a + b + a\bar{b} \in \mathbb{R}.$$

Druga naloga je z zaporedji:

Naloga 2. Dano je zaporedje $x_1, x_2, \dots$ z začetnima členoma $x_1 = 2$ in

Mednarodno tekmovanje

$x_2 = 4$ ter rekurzivno zvezo

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n + \frac{2^n}{x_n} \quad \text{za } n \geq 1.$$

Dokažite, da obstaja limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{2^n}$ ter velja

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{2^n} \leq \frac{3}{2}.$$



Slika 4. Piknik večerja po drugem tekmovalnem dnevu.

Končajmo z nalogo iz kombinatorike.

Naloga 3. Matrika $A = (a_{ij})$ je *prijetna*, če ustreza naslednjim zahtevam:

- (i) Elementi matrike A so natanko števila $\{1, 2, \dots, 2t\}$, za neko naravno število t .
- (ii) Elementi matrike A so nepadajoči v vsaki vrstici in vsakem stolpcu.
- (iii) Enaki elementi se lahko pojavijo samo v isti vrstici ali v istem stolpcu.
- (iv) Za vsak par dveh zaporednih števil lahko najdemo dva predstavnika v matriki, ki sta v različnih stolpcih in različnih vrsticah.

Dokažite, da je za vsaki celi števili m in n število različnih prijetnih matrik razsežnosti $m \times n$ sodo.

Na primer, edini 2×3 prijetni matriki sta $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.



Slika 5. Ekipa FMF na podelitvi priznanj.

Rešitev Naloge 1. Nalogo se da rešiti na več načinov. Če števili zapišemo v eksponentnem zapisu, preko faktorizacije vsot sinusov hitro pridemo do rešitve. Ena možnost je obravnava enačbe glede na a . Morda najelegantnejša rešitev pa je naslednja: ker je $a + b + a\bar{b} \in \mathbb{R}$, velja

$$a + b + a\bar{b} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{a}b.$$

Obe strani pomnožimo z ab ter upoštevamo, da je $a\bar{a} = 1$ in $b\bar{b} = 1$, da dobimo

$$a^2b + ab^2 + a^2 = b + a + b^2$$

oziroma

$$a^2b + ab^2 + a^2 - b - a - b^2 = 0.$$

Izraz razcepimo: $a^2b + ab^2 + a^2 - b - a - b^2 = ab(a+b) + (a+b)(a-b) - (a+b) = (a+b)(ab + a - b - 1) = (a+b)(a-1)(b+1)$. Tako dobimo tri družine rešitev: $b = -a$ ali $a = 1$ ali $b = -1$.

Mednarodno tekmovanje



Slika 6. Uspešni in zadovoljni udeleženci.

Rešitev Naloge 2. Rekurzivno zvezo preoblikujemo:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = x_{n+1} - 2x_n + \frac{2^n}{x_n},$$

od koder (z iteracijo) dobimo

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = x_2 - 2x_1 + \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{x_k}.$$

Prva dva člena poznamo, tako je

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{x_k}.$$

Sledi, da je $x_n \geq 2x_{n-1}$, posledično je $x_n \geq 2^n$. Ker je torej $\frac{2^k}{x_k} \leq 1$, smo dobili oceno

$$2x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq 2x_{n+1} + n.$$

oziroma

$$\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \frac{x_{n+2}}{2^{n+2}} \leq \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{n}{2^{n+2}}.$$

Sledi, da je zaporedje $\frac{x_n}{2^n}$ naraščajoče in

$$\frac{x_n}{2^n} \leq \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{n-2}{2^n} \leq \frac{x_2}{2^2} + \sum_{k=2}^n \frac{k-2}{2^k}.$$

Ker je $\frac{x_2}{2^2} = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$ in $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{2^k} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$, je $\frac{x_n}{2^n} \leq 1 + 1/2(4-1) - 1 = 3/2$. Dokazali smo, da je zaporedje naraščajoče in omejeno, torej ima limito. Ta limita je manjša (ali enaka) od zgornje meje ter večja od vsakega člena zaporedja. Izračunamo lahko $x_3 = 9$, $x_4 = 20$, $x_5 = 386/9$ in $x_6 = 1342/15$. Tako je $\frac{x_6}{2^6} = 671/480 = \frac{240+431}{480}$. Ker je $431/240 > \sqrt{3}$ ($431^2 = 185761$ in $3 \cdot 240^2 = 172800$), smo pokazali tudi spodnjo mejo.

Opozorilo glede tretje naloge: ta je bila precej težja od prejšnjih dveh, kar med drugim kaže povprečna ocena. Če je prva naloga bila v povprečju ocenjena z 8,3 točke (od 10 možnih) in druga s 4,7, je imela ta naloga povprečje le 0,2.

Rešitev Naloge 3.

Definiramo standardno Youngovo tabelo oblike $m \times n$ kot matriko razsežnosti $m \times n$ z elementi $1, 2, \dots, nm$, razporejenimi naraščajoče v vsaki vrstici in vsakem stolpcu. Rečemo, da sta dve standardni Youngovi tabeli prijateljski, če se razlikujeta le v dveh zaporednih številih (ker ima ena zapisana x in $x+1$, ima druga $x+1$ in x).

Iz prijetne matrike tvorimo standardno Youngovo tabelo tako, da število i iz prijetne matrike, ki se v njej pojavi n_i -krat, zamenjamo s števili od $n_1 + \dots + n_{i-1} + 1$ do $n_1 + \dots + n_i$. Ker moramo ohraniti monotonost, je transformacija enolična.

Opazimo, da ima dobljena standardna Youngova tabela natanko $2t - 1$ prijateljskih tabel ($2t$ je število različnih števil v izvorni prijetni matriki).

Poleg tega vsaka standardna Youngova tabela z lihim številom prijateljskih tabel ustreza enolično določeni prijetni matriki.

Za konec uporabimo lemo o rokovanjih: število Youngovih tabel, ki imajo liho prijateljskih tabel, je sodo.

Druge naloge najdete na internetni strani tekmovanja www.imc-math.org.uk.

S tem tekmovanjem se je zaključilo določeno obdobje, menjava se ekipa študentov (tako kot vsako leto), prihodnje leto pa tudi vodja ekipe FMF. Z veseljem in nestrpnim pričakovanjem tako čakamo poletje, ko bo 32. zaporedno tekmovanje spet potekalo v Blagoevgradu.

Gregor Šega