

KAKO IN ZAKAJ VKLJUČITI ZGODOVINO MATEMATIKE V POUK MATEMATIKE

JURIJ KOVIČ¹

¹IMFM, Ljubljana in UP FAMNIT, Koper

Math. Subj. Class. (2020): 01A99

V članku pregledamo nekaj možnih smiselnih uporab zgodovine matematike pri pouku matematike na različnih stopnjah izobraževanja, ki lahko učiteljem služijo kot modeli za podobne, bolj domiselne in kreativne pedagoške obravnave tudi nekaterih drugih matematičnih vsebin; tak pristop je lahko privlačnejši za učence kot pa strogo premočrtni koraki od A to B po shemi definicija – izrek – dokaz.

INCLUDING HISTORY OF MATHEMATICS IN TEACHING OF MATHEMATICS – HOW AND WHY

In the article we review some possible sensible uses of history of mathematics in teaching mathematics at various levels which can serve to the teachers of mathematics as models for similar, more ingenious and creative pedagogical treatments also of some other mathematical themes; this approach can be more attractive for pupils in comparison with the strict straightforward steps from A to B via the scheme: definition – theorem – proof.

1. Uvod

Kaj *zgodovina matematike* (v nadaljevanju na kratko: ZM) sploh je? Pod tem izrazom si po navadi predstavljamo zbiranje, razvozlanje in predstavitve najrazličnejših podatkov oz. ohranjenih virov v zvezi z matematičnimi praksami različnih obdobij, lokacij in kultur, pa tudi kar se da zvesto rekonstruiranje podrobnosti iz življenja velikih matematikov. Kadar je podatkov malo, vrzeli v našem znanju poskuša zapolniti z različnimi legendami, anekdotami, ugibanji itd., ali pa se ukvarja s svojo lastno teorijo in zgodovino (čemur bi lahko rekli: *zgodovina zgodovine matematike*, na kratko: ZZM).

Vendar sta tako faktografija kot samorefleksija le sredstvi, ne pa tudi cilj ZM, ki ni namenjena le zbiranju podatkov in ukvarjanju s samo seboj, ampak je to predvsem podporna in aplikativna veda, ki ob primerni uporabi služi temu, da se matematike (v nadaljevanju na kratko: M) globlje, širše in lažje učimo in jo bolje poučujemo, ter kot raziskovalci uspešneje prihajamo do novih matematičnih odkritij. Prvine ZM so prisotne tudi v znanstvenih matematičnih člankih, kjer avtorji v Uvodu praviloma omenijo relevantne že znane rezultate, v Literaturi pa navedejo reference nanje.

2. Komparativna metoda in primeri uporabe ZM pri pouku M

S primerno uporabo ZM lahko M učencem, dijakom in študentom predstavimo na privlačnejši način, tudi za tiste, ki jo sicer a priori dojemajo kot težko, tudi zato, ker so zaradi prenatrpanosti učnih programov izpostavljeni predvsem minimalističnemu, redukcionističnemu pedagoškemu pristopu po shemi: definicija – izrek ali formula – dokaz – primeri – naloge, brez kakršnegakoli zgodovinskega konteksta, ki bi tematiko osmisлил in povezal z drugim, že osvojenim matematičnim znanjem.

Vključevanje ZM v pouk M naravno vodi k uporabi t. i. *komparativne metode*, ki je uveljavljena tudi v drugih vedah, npr. pri študiju primerjalne književnosti na Filozofski fakulteti Univerze v Ljubljani, s katero lahko najboljše prikažemo *evolucijo* in *diverziteto* matematičnih idej, konceptov, simbolov, problemov, struktur, teorij itd. v različnih obdobjih, deželah in kulturah.

Oglejmo si na primerih, kako primerjalna metoda lahko pomaga pri razumevanju M, oziroma kako lahko njena odsotnost takšno razumevanje zavira.

Študentu, ki npr. ne razume najboljše, zakaj je definicija funkcije takšna, kot je – urejena trojica (D_f, Z_f, f) , ki sestoji iz domene, kodomene in funkcijskega predpisa – bo razumevanje tega pojma bistveno lažje, če mu na kratko predstavimo zgodovino razvoja tega pojma, kaj je npr. ta izraz pomenil Eulerju, ali kako so se nekateri matematiki razburjali, da se med funkcije zdaj štejejo tudi takšne eksotične in strašljive novotvorbe, kot so npr. v vsaki točki zvezne in nikjer odvedljive funkcije.

Če pa, nasprotno, nekdo prvič sliši npr. definicijo grupe, čemur takoj nato sledi sicer logično povsem korektna izpeljava njenih osnovnih lastnosti, vendar brez kakršnekoli motivacije in brez kakršnekoli omembe zgodovinskega konteksta nastanka tega pojma (Galois in njegov dokaz, da polinomske enačbe stopnje pet ali več niso rešljive z radikali) ali vsaj njegovih uporab (npr. za študij permutacij, simetrij, kompozitumov rotacij in zrcaljenj itd.), s takšnim pedagoško neosmišljenim znanjem ne bo zadovoljen.

Priložnost za vsaj občasno, skrbno odmerjeno in domišljeno popestritev pouka M z elementi ZM se učiteljem na vseh stopnjah ponuja dobesedno na vsakem koraku, na primer pri obravnavi številskih množic $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, kjer lahko poudarimo, da je vsaka razširitev pojma števila sledila isti razvojni logiki: kot so negativna števila omogočila rešljivost vsake enačbe $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$, tako so racionalna števila omogočila rešljivost vsake enačbe $ax = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, in so iracionalna števila nastala iz potrebe rešiti enačbe $x^a = b$ itd. Obravnavo kompleksnih števil lahko bolj kot zgolj

suhoparna definicija seštevanja in množenja urejenih parov $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ oz. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ osmisli omemba rešitve naloge $ab = 40, a + b = 10$, ki je naravno pripeljala do kompleksnih rešitev ustrezne kvadratne enačbe. Če želimo učencem še bolj razširiti obzorja, jim lahko omenimo znani spor med Cardanom in Tartaglio, ki je lahko tudi izhodišče za etični razmislek, ali je prav, da so matematični izsledki javno dostopni vsem, kar je lepa vzporednica danes aktualnemu vprašanju, ali naj bodo programske kode najrazličnejših spletnih orodij prosto dostopne ali ne. In čeprav bo marsikateri učitelj povsem zadovoljen, če bodo njegovi učenci znali reševati osnovne računske naloge, jim potem lahko pokaže tudi kakšne zanimive uporabe kompleksnih števil v geometriji, npr. za dokaz Napoleonovega izreka ali za dokaz izreka, da znamenite tri točke trikotnika ležijo na isti premici, kar je računsko dokazal že Euler na ta način, da je izračunal njihove koordinate. Veljavnost ustreznega izreka lahko pred tem učenci intuitivno preverijo tudi z orodji dinamične geometrije (npr. GeoGebro) in tako bo pouk M uspešno povezal ZM in napredne tehnologije, kar je takor ekoč idealna formula za pritegnitev pozornosti učencev.

Vselej velja učence opozoriti na širši kontekst obravnavane snovi. Ko npr. obravnavamo infinitezimalni račun, ni dovolj dijake izuriti le v računanju odvodov in integralov ali študentom vbiti v glave t. i. "epsilon-delta" definicije limite in zveznosti ter jih naučiti korektno uporabiti Newton-Leibnizevo formulo, ampak jih je smiselno opozoriti tudi na to, kako zelo je M napredovala, ko je začela obravnavati spremenljive pojave in količine, kot so npr. hitrost, pospešek itd., in da so diferencialne enačbe v bistvu jezik za opisovanje in raziskovanje spremenljivih pojavov v naravi in družbi.

Eno temeljnih pedagoških sporočil ZM je, da se M nenehno (danes še posebej pospešeno) spreminja in razvija, kar je močan argument za to, da je smiselno vsaj del pouka M posvetiti tudi procesu njenega nastajanja, ne le nekemu končnemu naboru njenih formul, izrekov, računskih metod itd. Danes, ko so celo na spletu že odprto dostopna računalniška orodja, ki uspešno rešujejo ne le preproste računske naloge, kot je npr. množenje matrik, ampak tudi naloge z matematičnih olimpiad in univerzitetne izpitne naloge, ne moremo več vztrajati, da se nove generacije učijo M na enak način kot v prejšnjem tisočletju. Poudarek ne more biti samo na memoriranju, računanju, dokazovanju in reševanju nalog, saj vse to t. i. *umetna inteligenca* že počenja bolje od človeka. Pri pouku M moramo danes razvijati predvsem našo *naravno inteligenco*, ki zmore tudi zastavljati originalna smiselna vprašanja, odkrivati nove probleme, kritično primerjati različne metode, ustvarjalno spreminjati matematične modele realnih pojavov v svetu

itd. Od učencev na vseh stopnjah ne smemo več zahtevati le reprodukcije v kurikulumu določenega matematičnega znanja, formul in metod, ampak moramo spodbujati tudi njihovo radovednost, kritičnost in ustvarjalnost. Ker M ni le skupek formul, izrekov in metod, ampak ima tudi zgodovinsko, aplikativno dimenzijo, njen vpliv pa se danes širi na vse pore družbe, lahko zlasti bolj družboslovno in manj naravoslovno usmerjene učence pritegnemo k M tudi na ta način, da jih spodbujamo in navajamo k branju matematičnih revij in knjig, skupnem reševanju lažjih matematičnih problemov v manjših skupinah, pisanju kratkih esejev o M ali ZM ipd.

Reševanje eksotičnih starih matematičnih nalog zaradi njih samih zgreši smisel ZM, saj je za samo učenje M enako neproduktivno kot brskanje za biografskimi podatki, ki sami po sebi niso pomembni za razumevanje razvoja M (tako kot npr. poznavanje življenja skladateljev ne pomaga bolje razumeti njihove glasbe, ampak je lahko celo moteče). ZM daje M širši kontekst, tako kot v glasbi harmonija podpira melodijo, ali kot v slikarstvu barve obogatijo risbo. Reševanje starih, za današnje standarde trivialnih besedilnih matematičnih nalog, npr. babilonskih, ki se z uporabo osnovne algebre prevedejo na reševanje linearnih enačb, je za učence praviloma težko, saj so praviloma zapisane v gostobesednem jeziku in brez današnjih matematičnih simbolov. Če jih že vključimo v pouk, potem prikažimo tudi njihove izvirne rešitve (dobljene brez algebre). Ob tem pa je smiselno učence opozoriti na dejstvo, da Babilonci niso podajali splošnih algoritmov, ampak samo rešitve konkretnih številskih primerov, iz katerih so morali učenci sami razvozlati splošno pravilo za reševanje nalog podobnega tipa. Kot učitelji moramo biti fleksibilni, saj imajo nekateri učenci raje pristop od spodaj navzgor (od konkretne rešitve do formulacije splošnega pravila), drugi pa od zgoraj navzdol (od splošnega pravila h konkretnim uporabam tega pravila).

3. Zakaj vključiti ZM v pouk M?

Za smiselnost vključevanja ZM v pouk M govorijo številni razlogi:

1. *Pretehtana vgradnja elementov ZM v pouk posameznih matematičnih vsebin lahko pripomore k boljšemu razumevanju M.* To je eden od bistvenih poudarkov iz zbornika *Using History to Teach Mathematics* [3], katerega avtorji so do svojih splošnih spoznanj, ki jih utemeljujejo s konkretnimi opažanji, prišli skozi prakso, prek lastnih izkušenj v razredu. Za vzorec navedimo le en citat: *“Uporaba ZM kot uvoda v kritični in kulturološki študij matematike je eden najpomembnejših izzivov za učitelje M in za študente. Obstaja veliko možnosti za uporabo zgodovine v matematičnem izobraževa-*

nju. Ob reševanju starih problemov lahko učenci primerjajo svoje strategije z originalnimi. To je zanimiv način, kako lahko razumejo ekonomičnost in učinkovitost naših sedanjih algebraičnih metod. Z opazovanjem zgodovinske evolucije določenega matematičnega koncepta se učenci naučijo, da M ni nekaj fiksnega in dokončnega." Lucia Grugnetti: *The History of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems* ([3], 29–35).

2. *ZM prinese v pouk M tudi humanistično in kulturno dimenzijo.* S svojim poudarjanjem njenega evolucijskega vidika širi zavedanje, da nenehno razvijajoči se univerzum M ne obstaja sam po sebi kot idealna kreacija čistega uma v Platonovih nebesih, ampak je skupna stvaritev ljudi različnih obdobj in kulturno-zgodovinskih okolij, ki se glede svojih teorij in prvenstva pri odkritjih dostikrat silovito prepirajo (kot npr. Tartaglia in Cardano zaradi objave formul za reševanje enačb 3. stopnje, ali Newton in Leibniz glede prvenstva pri odkritju infinitezimalnega računa), spori glede kontroverznih vprašanj pa lahko trajajo tudi po več stoletij. Spomnimo se npr. na silovito kritiko škofa Berkeleyja, s katero je v delu *The Analyst* iz leta 1734 opozoril na logične nedoslednosti in protislovja, skrita v pojmu infinitezimalno majhnih količin, kot jih je uporabljal Newton. Šele stroga Weierstrassova "epsilon-delta" formulacija, ki vključuje še eno tehnikalijo, in sicer pojem limite, in ki povzroča študentom toliko težav, je postavila infinitezimalni račun na čvrste temelje. Vendar zgodbe tu še ni konec: nestandardna analiza Abrahama Robinsona (1918-1974) je na sceno vrnila in povsem rehabilitirala neskončno majhne količine s paradokso lastnostjo, da so večje od 0, a manjše od poljubnega pozitivnega števila, in priskrbelo strogost dokazom matematične analize v izvornem Newtonovem duhu ([1], 237-254).

3. *Poskus spoznati in razumeti delo matematikov daljnih časov in dežel nas osvobodi iz ujetosti v zmotno paradigmo o eni sami možni (zahodni) M .* Matematiki, ki so uporabljali drugačno matematično simboliko (ali je sploh niso!), ki so imeli na voljo drugačna računska orodja in drugačen nabor matematičnih orodij, ki so uporabljali drugačne načine dokazovanja, računanja in sklepanja, in ki so jim celo osnovni koncepti, kot npr. število, funkcija, dokaz, pomenili nekaj drugega kot nam, nam dostikrat predstavljajo pravi detektivski oz. rekonstrukcijski izziv. Tako je npr. v [3] lepo pokazano, kaj vse lahko iz matematičnega teksta sklepamo o njegovem piscu. Praviloma takšno delo zahteva *interdisciplinarni pristop* in (npr. v srednji šoli) ponuja lepo priložnost za *medpredmetno sodelovanje* (M , fizika, zgodovina, tuji jeziki itd.). Je tudi odlična vaja v *strpnosti do drugače mislečih*.

4. *Zgodovinske osvetlitve evolucije M lahko spodbudijo radovednost učen-*

cev. Samo v okviru takšnega širšega humanističnega pristopa k pouku M, ki se ne omejuje na suhoparno nizanje definicij, izrekov in dokazov, ampak priznava in integrira v zavedanje tudi neštete druge njene dimenzije, je sploh mogoče učence spodbuditi, da razmišljajo o vprašanjih, kot so: “*Zakaj je nastal določen koncept? V kakšnih zgodovinskih okoliščinah?*” ([3], str. 29).

5. *Videti M v njenem nastajanju, kot dinamično, nenehno spreminjajočo se stvaritev, na razvoj katere vplivajo tudi družbene razmere, v katerih nastaja, pripomore k njenemu boljšemu razumevanju.* Zelo poučno je videti, kako se pomen matematičnih pojmov s časom spreminja, razširja, se izčističuje, zori. Podobno velja za matematične metode (npr. pri reševanju sistemov linearnih enačb z veliko enačbami in neznankami ni vseeno, katero metodo uporabimo za reševanje z računalnikom). Številni izreki in formule imajo veliko različnih dokazov, ki uporabljajo zelo različna orodja (npr. Pitagorov izrek, Eulerjeva poliedrska formula). Zgodovina nas uči, da M, natanko tako, kot to velja tudi za vse druge znanosti, ni nekaj statičnega, za vekomaj kristaliziranega v nekem aksiomatskem sistemu (kot so matematiki npr. verjeli za evklidsko geometrijo, dokler niso odkrili neevklidskih geometrij). In celo že samo opazovanje znanja, kritično premišljanje o njem, kaj šele govorjenje in pisanje o njem, nekaj dodaja k temu znanju. “*Zgodovinska analiza pomaga učiteljem razumeti, zakaj je določen koncept težak za učence, in jim pomaga pri didaktičnem pristopu in razvoju tematike*” ([3], str. 30).

6. *Vpeljava elementov ZM v pouk M lahko naredi M privlačnejšo za bolj humanistično naravnane učence.* Po razcvetu starogrške M je družbeno in intelektualno statični srednji vek v Evropi močno zavrl razvoj M, ki se je spet razmahnil šele po renesansi. Dinamične spremembe v družbi so posredno spodbudile tudi raziskovanje sprememb z matematičnimi sredstvi, npr. s pomočjo infinitezimalnega računa. Veliko moderne M je tesno povezane z razvojem računalnikov po drugi svetovni vojni, pa s potrebami prometa, na-ravovarstva, informatike itd. Pri pouku M na vseh nivojih bi morali razmišljati tudi o etičnih dimenzijah različnih uporab M, ki že dolgo ni več “čista” znanost, ponosna na svojo neuporabnost (kot je npr. verjel še Hardy, vsaj za teorijo števil, v svoji *Matematičkovi apologiji*). Vsaj občasno pisanje esejev o teh temah, ki spodbujajo kritično razmišljanje, namesto nenehnega duhamornega računanja in reševanja nalog – ki jih za povrh danes že lahko v trenutku rešujejo računalniki, tako kot so kalkulatorji pred nekaj desetletji poenostavili računanje – bi lahko približalo M tudi bolj humanistično kot naravoslovno orientiranim učencem, dijakom in študentom. Pouk M bi danes lahko in moral služiti ne le urjenju v duhamornem računanju, ampak

predvsem razvijanju še drugih, kompleksnejših veščin, potrebnih v današnjem svetu. Le tako vzgajani raziskovalci M bodo lahko ravnali podobno etično kot Leonardo da Vinci, ki je ob odkritju nekaterih svojih bojnih strojev sklenil, da jih raje ne bo javno objavil, zaradi človeške narave, ki teži k nenehnim nesmiselnim spopadom. Raziskovalci M imajo namreč odgovornost pred človeštvom in naravo, kaj raziskujejo, pa če se tega zavedajo ali ne. Uporaba M v vojne namene je nedopustna zloraba človekove intelektualne moči, ki uničuje tudi naravo in planet, na katerem živimo. Nekaj civilizacij je že propadlo zato, ker se niso zavedale nevarnosti tehnologije, ki so jo bile sposobne razviti tudi po zaslugi M, za njihov lasten obstoj. Je to torej res tema, ki jo v pouku M lahko enostavno prezremo, kot to (po vsem svetu) počnemo sedaj?

7. *Vključevanje ZM v pouk M pa je treba vselej izpeljati zelo pozorno. Najprej moramo kot učitelji marsikaj vedeti o ZM, da jo lahko smiselno vključimo v pouk M. Zgodovina ima lahko tudi negativen vpliv na didaktiko, saj ponuja veliko zanimivih in nenavadnih informacij, ki pa dejansko niso bistvene in ne pripomorejo k razumevanju pri pouku obravnavane matematične vsebine. Dobro se je zavedati nekaterih tipičnih napak, ki jih pogosto delajo zgodovinarji M, zato da ne bomo nekritično ponavljali in širili njihovih zmotnih mnenj. Ena od njih je npr. zmotno sklepanje, da je nekdo dejansko že odkril trditev A, ki pa mu je v resnici ostala skrita, čeprav je že prišel do trditve B, iz katere se jo da (oz. jo znamo danes) hitro izpeljati. O tem govori tale citat: "Eno od mnogih tveganj pri vpeljavi ZM v matematično izobraževanje je anahronizem, ki sestoji v tem, da pripišemo avtorju takšno zavestno znanje, ki ga nikoli ni imel. Ogromna razlika je med tem, če prepoznamo Arhimeda kot predhodnika integralnega in diferencialnega računa, čigar vpliv na utemeljitelje tega računa je komaj mogoče preценjevati, in fantaziranjem, da lahko v njem vidimo, kot so to nekateri storili, zgodnjega praktikanta tega računa. Če je tveganje anahronizma veliko za zgodovinarje, ni manjše tudi pri vključevanju ZM v pouk M."*([3], str. 29.)

4. Dolga tradicija uporabe ZM pri poučevanju M

Ideja uporabe ZM pri poučevanju M nikakor ni izum zadnjih desetletij XX. stoletja, ko so jo, po številnih člankih in knjigah na to temo, ki so redno izhajali skozi vse XX. stoletje, začeli bolj množično tudi praktično preizkušati na različnih koncih sveta in na različnih ravneh, od osnovnih do srednjih šol in univerz, rezultate različnih tovrstnih projektov pa so poizkušali tudi

kritično ovrednotiti. Danes je zainteresiranemu učitelju na voljo že obilica literature, pa tudi spletnih učnih orodij in slikovnega gradiva, iz katere lahko črpa navdih za obogatitev pouka v razredu z uporabo ZM. Uporabi lahko npr. *anekdote* (verodostojne ali nepreverjene) o znanih matematikih, ali *stare matematične naloge* (morda v kombinaciji z modernimi računalniškimi orodji, ki po vzoru starih nalog generirajo nove, za vsakega učenca z drugačnimi parametri), pa tudi krajše ali daljše *odlomke iz originalnih tekstov*, knjig, člankov ali korespondence, ali iz biografij matematikov, ki jih sicer učenci spoznajo le po imenu kakšne njihove formule ali izreka. Kot ugotavlja Siu Man-Keung z Univerze v Hong Kongu: “Zavedanje tega evulcijskega vidika M lahko naredi učitelja bolj potrpežljivega, manj dogmatskega, bolj človeškega, manj pedantnega” ([3], str. 8).

Matematična misel v tesni povezavi z jezikom in pisavo ter matematičnimi simboli, s pomočjo katerih je zabeležena oziroma zakodirana vselej zrcali duha določene kulture in časa, v kateri je nastala oziroma se je oblikovala. Že Platon pa je opozarjal, da je živa, govornjena beseda, ustrežnejši izraz misli, kot zapisana beseda, ki je ne moreš nič vprašati, in je tako le njena bleda in molčeča senca. Vendar so pisni viri, vsaj do pojava modernih tehnologij zapisovanja zvoka in gibljivih slik, praktično edino, kar imamo na voljo za preučevanje M preteklosti (še vedno pa so npr. zgodovinarji starogrške M veliko na boljšem kot zgodovinarji starogrške glasbe, ki so jo zapisovali s črkami njihove abecede, in od katere je ohranjenih praktično le nekaj drobcov, npr. Seikilov epitaf – pesem z njegovega nagrobnega spomenika).

M preteklosti pa nikakor ni bila le stopnica k današnji, avtomatično višji stopnji, ampak je bila v marsičem precej drugačna od tistega otočka v ogromnem oceanu M, ki ga poznamo mi. Matematiki prejšnjih časov in drugih kultur niso uporabljali le drugačnih *matematičnih simbolov* in drugačnih raziskovalnih in pedagoških *metod*, ampak so se ukvarjali tudi z drugačnimi *problemi*. Če so npr. renesančni arhitekti in umetniki študirali *linearno perspektivo*, so to počeli predvsem zaradi njene praktične uporabe v slikarstvu; in če so matematiki nekaj stoletij kasneje na tej osnovi zgradili *projektivno geometrijo*, je bila motivacija za to bistveno drugačna.

Zavedati se moramo tudi, da se je *pomen* posameznih matematičnih pojmov skozi zgodovino spreminjal: pomena besed, ki jih je uporabljal npr. Descartes, ne moremo nekritično avtomatsko enačiti s pomenom istih besed v današnjem času, ne moremo jih torej dognati le s sodobnimi francosko-slovenskimi ali latinsko-slovenskimi slovarji (kaj šele z google prevajalnikom), ampak moramo dejansko vedeti, kaj so te besede pomenile tedaj. Ko

presojamo delo matematikov preteklosti, se moramo zavedati, da določenih metod (npr. algebraičnih), ki jih poznamo danes, takrat niso imeli na razpolago. Probleme so reševali drugače, pa tudi zastavljali in razumevali so jih drugače, poudarjali so druge njihove vidike, kot jih vidimo mi oz. so zanimivi za nas. Posledično lahko vidimo, da koncept težavnosti (matematičnih) problemov, ki naj bi objektivno merila razdaljo od problema do rešitve, npr. s štejetjem elementarnih korakov, potrebnih za to, da pridemo do cilja, ni nekaj povsem absolutnega, neodvisnega od reševalca; odvisna je od uporabljenih metod in dovoljenih ali razpoložljivih orodij ter predznanja, inteligence, domiselnosti in domišljije, s katerimi razpolaga reševalec. Tako npr. nekateri dokazi evklidske geometrije, ki razpolaga le z najosnovnejšimi orodji, niso prav nič elementarni, po drugi strani pa nekateri dokazi v višji M niso posebej zapleteni, saj so tam na voljo zelo močna orodja, ki dokaze zelo poenostavijo, seveda šele potem, ko se jih naučimo uporabljati. Primerjava starejših in novejših metod reševanja po eni strani učencem nazorno pokaže, da se da iste probleme reševati na različne načine, po drugi strani pa jim osmisli učenje novejših metod, ki jih lahko potem bolje razumejo in tudi cenijo kot izboljšave starejših, manj učinkovitih.

Domiselne metode dokazovanja geometrijskih izrekov in algebraičnih formul s pomočjo diagramov in 3D-modelov geometrijske algebre (npr. za dokaz formule $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$) najdemo na različnih koncih sveta, npr. pri Babiloncih in starih Kitajcih, pa tudi pri arabskih matematikih srednjega veka. Te nešablonske metode (oz. trike, unikatno prilagojene konkretnim posameznim problemom) lahko učencem osnovnih in srednjih šol predstavimo kot zanimive alternative danes prevladujočim univerzalnim metodam, s pomočjo katerih je načeloma mogoče rešiti vse probleme določene vrste. Tako lahko danes veliko geometrijskih problemov rešimo celo na več načinov, ki ne zahtevajo posebnega, konkretnemu problemu na kožo pisanega dodatnega razmisleka: z uporabo kompleksnih števil, analitične geometrije, pa tudi vektorjev in matrik. Poučno je spoznati npr. različne dokaze Morleyevega izreka (odkrita 1899, dokazanega pa 15 let kasneje), ki pravi: *“Če v poljubnem trikotniku razdelimo vse kote na tri dele, se sosednji kraki tretjinskih kotov sekaajo v ogliščih enakostraničnega trikotnika.”*

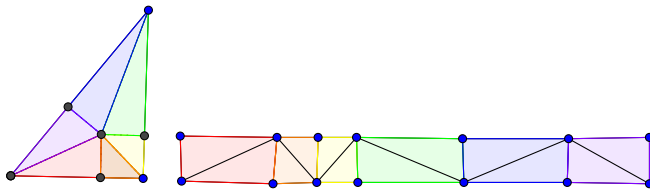
5. Kako danes vključiti ZM v pouk M?

Zdaj si lahko zastavimo temeljno pedagoško vprašanje: *Ali želimo svoje učence, dijake, študente naučiti le splošnih, široko uporabnih računskih metod oziroma algoritmov, ki jih bodo sposobni izvesti gladko in tako rekoč brez*

razmisleka, ali pa jih želimo spodbujati tudi k nešablonskemu, spontanemu razmišljanju in sledenju intuiciji onstran utečenih splošnih metod? Učenci, poučevani po prvi (bolj pragmatični) metodi, bodo po najhitrejši poti prišli od točke A do točke B, medtem ko bodo učenci, poučevani po drugi (bolj filozofski) metodi poizkušali najti izvirno rešitev. Ta dilema ni nekaj novega: v ZM poznamo prerekanja med zagovorniki Descartesovih analitičnih in starejših sintetičnih metod v geometriji; prve poenostavijo reševanje nalog, druge pa zahtevajo bistrumne rešitve, prilagojene vsaki nalogi posebej. Zanimivo analogijo dilemi, ali slediti utečenim načinom reševanja ali razmišljati na izviren način, zasledimo tudi v šahu: t.i. šahovski hipermodernisti so se v začetku XX. stoletja odločno zoperstavili idejam o tem, da je vrhunski šah mogoče igrati po nekih pravilih (npr. tistih, ki jih je formuliral Steinitz, in so sicer pomenili veliki prispevek k šahovski teoriji in praksi). Tako je npr. vele mojster Richard Reti dejal: *“Zanimajo nas izjeme, ne pravila!”*

Obilico primerov prav takšnega, prvinskega, nešablonskega razmišljanja odkrijemo tudi v M, če raziskujemo matematične naloge in njihove originalne rešitve. Prav takšen svež pristop ohranja matematično misel živo in večno nepredvidljivo. Ne glejmo torej na stare naloge in davne M zviška, ker npr. niso poznali niti formule za kvadratno enačbo, in so vsako nalogo morali rešiti na drugačen, izviren, domiseln način. Eleganca splošnih, do avtomatizma naučenih metod iz zavesti večine matematikov žal izbriše bistrumne rešitve, ki so idealno prilagojene danemu konkretnemu problemu, prav zato pa delujejo le v zelo redkih ali celo le v posameznih primerih! Vzemimo si za zgled vrhunske šahiste, ki so že spoznali, da mora strateško razmišljanje potrditi konkreten taktični izračun potez v dani poziciji in sistematično pregledovanje drevesa vseh možnih relevantnih variant. Podobno, rešitve res težkih matematičnih problemov praviloma zahtevajo izum nestandardnih, izvirnih metod. Torej je učence, dijake in študente smiselno uriti tudi v tovrstnem matematičnem razmišljanju, ne toliko zato, da bi spoznali posamezne eksotične matematične naloge iz preteklosti, ampak da bodo kasneje, kot raziskovalci (na kateremkoli področju, ne nujno na področju M), bolje usposobljeni za reševanje novih, nešablonskih problemov, ki jih pred nas postavlja naš dinamični in hitro spreminjajoči se svet. Po drugi strani pa je smiselno pri pouku M predstaviti tudi določene splošne metode iz ZM, drugačne od tistih, ki jih sicer uporabljamo mi, in spodbuditi debato o prednostih in pomanjkljivostih različnih metod. Ena od široko razširjenih metod po vsem svetu je takšna ali drugačna uporaba vizualnih pripomočkov. Tako je npr. Liu Hui, eden od velikih matematičnih

komentatorjev in matematikov stare Kitajske, svojim bralcem svetoval, naj rišejo na papir diagrame in režejo ter preurejajo koščke ter tako dokazujejo matematične trditve. Za Kitajce je bilo rezanje in zgibanje papirja splošno sprejeta metoda matematičnega dokazovanja [2]. S to metodo je npr. mogoče preprosto pokazati, da je radij r kroga, včrtanega pravokotnemu trikotniku s katetama a, b in hipotenuzo c , enak $r = \frac{ab}{a+b+c}$. Opis rešitve: Iz središča S trikotniku včrtanega kroga narišemo daljice SA, SB, SC do oglišč A, B, C ter pravokotnice na stranice a, b, c , ki skupaj razdelijo trikotnik na šest pravokotnih trikotnikov z višino r . Iz dveh kompletov takšnih koščkov pa lahko sestavimo pravokotnik s stranicama r in $a + b + c$ (Slika 1). Torej je $2 \cdot \frac{ab}{2} = (a + b + c)r$.



Slika 1: Geometrijska utemeljitev formule $r = \frac{ab}{a+b+c}$.

Takšni preprosti, nazorni dokazi, ki jih mrgoli tudi v knjigah t. i. razvedrilne matematike, so našli svojo tržno nišo celo v resnih matematičnih revijah, najdemo jih npr. v rubriki *Proofs without words* v reviji Math Magazine.

ZM je le material, iz katerega učitelj M ali pisec matematičnega članka ali knjige naredi zgodbo, podobno kot ravna pisatelj, ki uporabi resnične dogodke in osebnosti le kot gradnike, iz katerih sestavi svojo zgodbo; v literarni teoriji je sicer vpeljšano jasno razlikovanje med *fabulo* – zgodbo samo, in *naracija* – načinom njene pripovedi. V tem smislu je naloga učitelja M podati poučno zgodbo na privlačen način, s smotrno uporabo elementov ZM.

LITERATURA

- [1] Davis, J. Philip and Hersh, Reuben, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston 1981.
- [2] Siu, M. K., *Proof and Pedagogy in Ancient China – Examples from Liu Hui’s Commentary on Jinhang Suanshu*, Educational Studies in mathematics (1993) 24: 345–357.
- [3] *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, Victor Katz, Editor, MAA Notes 51, The Mathematical Association of America, 2000.