

LEGA MAVRIČNIH LOKOV

DUŠAN HVALICA¹

¹Ekonomska fakulteta Univerze v Ljubljani

Ključne besede: mavrica, tretji mavrični lok

Podana je razlaga, zakaj obstaja več lokov mavrice in zakaj jih vedno vidimo pod enakimi koti glede na smer sončnih žarkov.

THE POSITION OF RAINBOW ARCS

We provide an explanation, why there are several rainbow arcs and why they always appear at specific angles offset to the direction of light rays.

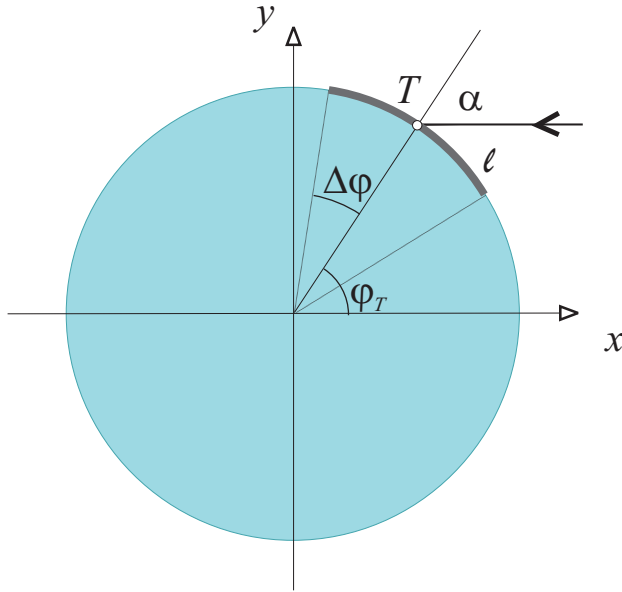
Vsakdo pozna mavrico, pa vendar ima ta tudi lastnosti, ki niso splošno znane – ena izmed njih, polariziranost svetlobe v mavričnem loku, je bila že obravnavana v Obzorniku[1]. Redki tudi vedo, da poleg dveh mavričnih lokov obstajajo še tretji, četrti, pa tudi nadaljnji loki. Zaradi njihove šibke svetlosti in še nekaterih drugih motečih dejavnikov jih je namreč mogoče opaziti izjemno redko – fotografija tretjega loka je uspela šele leta 2011[2]. Ogledali si bomo, kako ti loki nastanejo in pod kakšnimi koti so vidni.

Ko se vodna kapljica kondenzira, ima zaradi površinske napetosti obliko kroglice. Pri padanju so kapljice izpostavljene silam zaradi zračnega upora, a če premer kapljice ne presega 1 mm, so te sile v primerjavi s površinsko napetostjo zanemarljive, zato kapljica obdrži obliko krogle[5][6]. Če je kapljica večja, dobi obliko sploščenega rotacijskega elipsoida, ki z naraščajočim premerom postaja še dodatno ploščat na svoji spodnji strani. Dežne kapljice so torej različnih oblik, kot pa bomo videli, so za pojav mavrice zaslužne kapljice, ki so okrogle. Zato bomo v nadaljevanju privzeli, da ima dežna kapljica obliko krogle.

Ko sončni žarek zadene dežno kapljico, se pri prehodu v notranjost najprej lomi, potem se znotraj kapljice enkrat ali večkrat odbije, ko zapusti kapljico, pa se spet lomi. Žarek do točke T , kjer doseže kapljico, skupaj s spojnico točke T in središča kapljice napenja ravnino, v kateri žarek ostane tudi po lomu oziroma odbojih znotraj kapljice. Za opis dogajanja torej zadošča obravnavati preseka kapljice s to ravnino. Če v njej postavimo koordinatni sistem tako, da je izhodišče v središču kapljice, os x pa kaže v smeri proti Soncu, je kot, ki ga sončni žarek oklepa z normalo na površino kapljice v točki T , kjer žarek doseže kapljico, enak polarni koordinati φ_T točke T .

Vzemimo, da je kot, ki ga izhodni žarek oklepa s smerjo proti Soncu (se pravi z x -osjo), opisan s funkcijo $f(\alpha)$ (kjer je α vpadni kot).

Lega mavričnih lokov



Slika 1. Ravninski presek vodne kapljice

Oglejmo si, kam kažejo izhodni žarki, ki ustrezajo sončnim žarkom, ki zadenejo kapljico v točkah loka l ! Te točke ustrezajo vpadnim kotom $\alpha \in (\varphi_T - \Delta\varphi, \varphi_T + \Delta\varphi)$. Kot, ki ga tak izhodni žarek oklepa z x -osjo, je enak $f(\alpha)$ in zato leži na intervalu $(f(\varphi_T) - \Delta f, f(\varphi_T) + \Delta f)$, kjer je

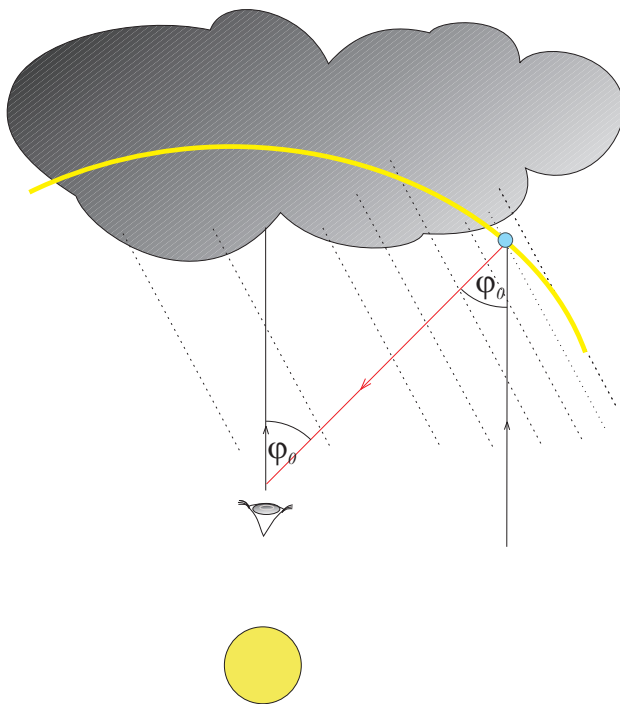
$$\Delta f \sim f'(\varphi_T) \cdot \Delta\varphi.$$

Manjši ko je odvod $f'(\varphi_T)$, manj se za žarke, ki zadanejo lok l , smeri izhodnih žarkov razlikujejo med seboj – če bi jih vzporedno premaknili tako, da bi izhajali iz iste točke, bi vsi ležali v kotu velikosti $2f'(\varphi_T) \cdot \Delta\varphi$.

Če je φ_T stacionarna točka funkcije $f(x)$, je $\Delta f \sim 0$, v tem primeru so zato smeri izhajajočih žarkov približno enake za vse točke loka l . Šopu vzporednih sončnih žarkov, ki pokrijejo lok l , zato ustreza (skoraj) vzporeden šop izhodnih žarkov, ki sijejo (približno) v smeri, ki s smerjo proti Soncu oklepa kot $\varphi_0 = f(\varphi_T)$. Kdor pogleda v nasprotni smeri, vidi zato enako (le obrnjeno) sliko, kot če bi z mesta dežne kapljice pogledal proti Soncu (ker se vse opisano dogaja v ravnini, seveda velja vse povedano le za to, kar vidimo skozi zaslon z rezo, ki leži v tej ravnini). Ta nasprotna smer je v obravnavani ravnini okarakterizirana s tem, da oklepa kot φ_0 s smerjo

stran od Sonca (glej sliko 2).

Opisano velja za vsako ravnino skozi središče dežne kapljice, ki je vzporedna smeri proti Soncu in za vsako dežno kapljico, na katero pada sončna svetloba. Vsaka vodna kapljica, obsijana s soncem, zato del svetlobe, ki pade nanjo, preusmeri v smeri vsakega poltraka, ki s smerjo proti Soncu oklepa kot φ_0 . Če se v neki smeri od opazovalca, ki s smerjo stran od Sonca oklepa kot φ_0 , nahaja vodna kapljica, obsijana s soncem, zato ta kapljica del sončne svetlobe, ki pade nanjo, preusmeri tudi v smeri proti opazovalcu, zato je zanj svetloba iz te smeri veliko svetlejša kot iz drugih smeri, iz katerih prihaja le običajna dnevna difuzna svetloba. Če do tega pride tudi v drugih smereh, ki s smerjo stran od Sonca oklepajo kot φ_0 , vidi to opazovalec kot svetel krožni lok, ki sega, do koder se nahajajo dežne kapljice, obsijane s soncem.



Slika 2. Nastanek loka mavrice

To pa še ni vsa zgodba. Za svetlobe različnih valovnih dolžin se namreč lomni količnik vode nekoliko razlikuje – za rdečo znaša 1.331, za vijolično 1.344, za ostale spektralne barve se vrednosti zvrstijo vmes. Kot bomo

videli, je količina $f(\varphi_T)$ zvezno odvisna od lomnega količnika. Ker vse povedano velja za vsako spektralno barvo posebej, ustreza zato vsaki barvi svetel lok v tisti barvi, ki ga vidimo pod malo drugačnim kotom, kot druge barve, skupaj pa ti loki tvorijo znano mavrico.

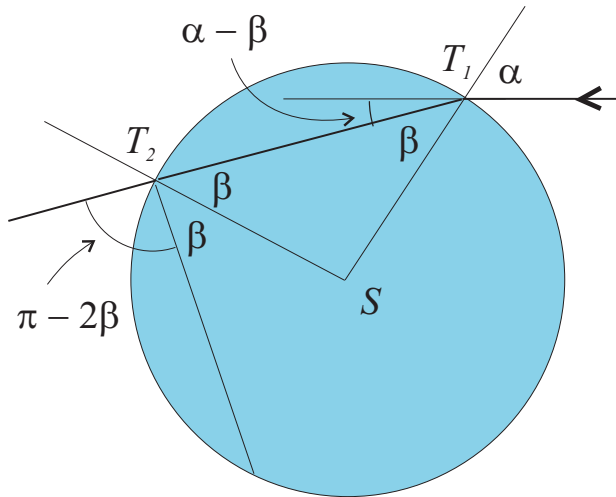
Kot je bilo že uvodoma rečeno, vse dežne kapljice niso okrogle. Iz tega, kar je bilo doslej povedano, pa je jasno, da za nastanek pojava mavrice zadošča, da so med njimi prisotne tudi okrogle kapljice. Seveda pa velja: večji ko je delež okroglih kapljic med njimi, močnejši oziroma izrazitejši je pojav.

Oglejmo si zdaj, kaj se zgodi s sončnim žarkom na poti skozi dežno kapljico!

Najprej se pri prehodu iz zraka v vodo žarek lomi v skladu s Snellovim zakonom: kota α in β , ki ju vpadni in lomljeni žarek oklepata z normalo na vodno površino, sta v zvezi

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad (1)$$

(konstanti n pravimo *lomni količnik* vode). Pri tem se smer žarka spremeni za kot $\alpha - \beta$.



Slika 3. Pot žarka v kapljici

Del žarka znotraj kapljice od ene do druge robne točke je tetiva kroga, ki je presek kapljice z našo ravnino. Trikotnik T_1T_2S je zato enakokrak, vpadni kot pri odboju je enak kotu β . Ker je odbojni kot enak vpadnemu,

se zato to ponovi tudi pri vsakem morebitnem nadaljnjem odboju znotraj kapljice, pri tem pa je vsakič sprememba smeri žarka enaka kotu $\pi - 2\beta$. Ko žarek zapusti kapljico, se spet lomi in pri tem spremeni smer za $\alpha - \beta$.

Če se žarek znotraj dežne kaplice k -krat odbije, znaša skupna sprememba njegove smeri

$$(\alpha - \beta) + k(\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha - 2(k + 1)\beta + k\pi.$$

Ker začetni žarek z x -osjo oklepa kot π , oklepa zato izhajajoči žarek z njo kot

$$f_k = 2\alpha - 2(k + 1)\beta + (k + 1)\pi.$$

Če iz (1) izrazimo β , dobimo tako

$$f_k(\alpha) = 2\alpha - 2(k + 1) \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + (k + 1)\pi. \quad (2)$$

Enačba

$$\frac{df_k(\alpha)}{d\alpha} = 0$$

ima na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ rešitev

$$\alpha_k = \arcsin \sqrt{\frac{(k + 1)^2 - n^2}{(k + 1)^2 - 1}}.$$

Za vsak $k \geq 1$ torej stacionarna točka obstaja, tako da tej poti žarka skozi kapljico ustreza svetlobni lok, ki s smerjo sončnih žarkov oklepa kot

$$\begin{aligned} \varphi_k = f_k(\alpha_k) = \\ = 2 \arcsin \sqrt{\frac{(k + 1)^2 - n^2}{(k + 1)^2 - 1}} - 2(k + 1) \arcsin\left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{(k + 1)^2 - n^2}{(k + 1)^2 - 1}}\right) + \\ + (k + 1)\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

To je res zvezna funkcija lomnega količnika n , zato ležijo (za izbrani k) svetlobni loki posameznih barv blizu drug drugega in skupaj tvorijo mavrico.

Lego posameznih mavričnih lokov na nebu najdemo, če poiščemo kote, pod katerimi vidimo rdeče oziroma vijolične loke v posameznem mavričnem loku. Kot vemo, so ti koti (glede na smer stran od Sonca) enaki φ_k (se pravi, kotom izhodnih žarkov glede na smer proti Soncu), ki jih izračunamo

po (3). Običajno nam je vseeno, v kateri smeri odmerimo kot med žarkom in dano smerjo, zato je pravzaprav tu za nas relevantna količina $|f_k(\alpha)|$. Ti koti so:

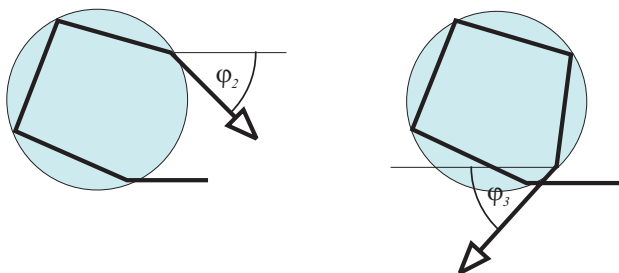
	rdeča	vijolična
$ \varphi_1 $	42, 37	40, 51
$ \varphi_2 $	50, 36	53, 73
$ \varphi_3 $	137, 53	142, 25
$ \varphi_4 $	137, 24	131, 17
$ \varphi_5 $	52, 91	45, 57

Za tretji in četrti mavrični lok so ti koti topi, kar pomeni, da sta ta dva mavrična loka na tisti strani neba, kjer je Sonce. V teh primerih raje uporabljamo suplementarne kote teh kotov, se pravi, kote, odmerjene od smeri proti Soncu:

	rdeča	vijolična
$ \varphi_3 $	42, 47	37, 75
$ \varphi_4 $	42, 76	48, 83

Vidimo, da je v primarnem loku vijolična na dnu in rdeča na vrhu mavričnega loka, pri sekundarnem loku pa je vrstni red barv obrnjen. Podobno je pri tretjem oziroma četrtm mavričnem loku: pri tretjem je na dnu vijolična in na vrhu rdeča, pri četrtm loku pa je obratno. Drugi mavrični lok leži nad prvim, razmik med njima pa znaša 8° . Podobno je četrti mavrični lok nad tretjim, razmik med njima pa je malo več kot četrt stopinje. Prvi mavrični lok je širok manj kot 2° , vsak naslednji lok pa je širši od prejšnjega. Peti mavrični lok leži med prvim in drugim mavričnim lokom (pravzaprav njegov vrh že seže v območje sekundarnega loka), na dnu tega loka je vijolična barva.

Glede na to, da leži drugi mavrični lok blizu prvega, se morda zdi komu presenetljivo, da ležita tretji in četrti mavrični lok na drugi strani neba – na strani, kjer je Sonce. A dodatni odboji naredijo svoje. Na sliki 4 lahko primerjamo poti žarka pri dveh oziroma treh odbojih, ki ustrezata vpadnima kotoma, ki sta stacionarni točki za f_2 oziroma f_3 . Medtem ko oklepa izhodni žarek s smerjo proti Soncu pri dveh odbojih oster kot, je ta kot pri treh odbojih že top oziroma njegov suplementarni kot – kot glede na smer stran od Sonca – je oster. Zato je kot, ki ga sekundarni mavrični lok oklepa s smerjo stran od Sonca, oster, medtem ko je kot, ki ga s to smerjo oklepa terciarni mavrični lok, top, oziroma njegov suplementarni kot – kot tega mavričnega loka glede na smer proti Soncu – je oster. Medtem ko leži sekundarni mavrični lok na strani neba, ki je stran od Sonca, je terciarni mavrični lok na strani neba, kjer je Sonce.



Slika 4. Pot žarka pri dveh oziroma treh odbojih

Ni se težko prepričati, da je za vsak k funkcija $f_k(\alpha)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ konveksna, vsaka od njih ima torej v svoji stacionarni točki minimum.

Ker vrednosti $f_k(\alpha)$ izražajo kote, med kotoma φ in $\varphi + 2\pi$ pa (kadar gre za določanje lege) ne razlikujemo, lahko izraze $f_k(\alpha)$ ustrezno poenostavimo. Konstantni člen v (3) postavimo pri lihih k kar enak nič, pri sodih pa π ali $-\pi^1$. Ker so vse $f_k(\alpha)$ lihe funkcije², zadošča, da jih proučimo na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Za $k = 1, 2, \dots, 5$ dobimo funkcije

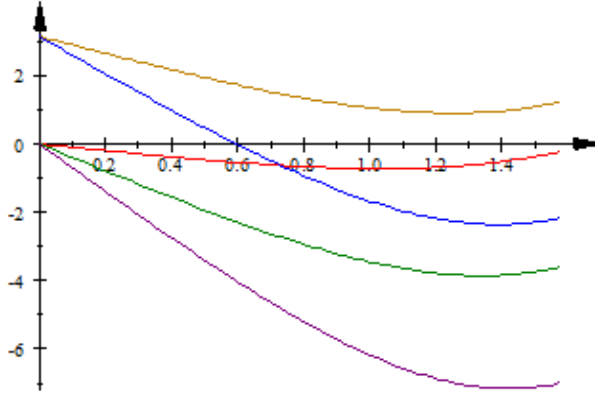
$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= 2\alpha - 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 2\pi = 2\alpha - 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) \\ f_2(\alpha) &= 2\alpha - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 3\pi = 2\alpha - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + \pi \\ f_3(\alpha) &= 2\alpha - 8 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 4\pi = 2\alpha - 8 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) \\ f_4(\alpha) &= 2\alpha - 10 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 5\pi = 2\alpha - 10 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + \pi \\ f_5(\alpha) &= 2\alpha - 12 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 6\pi = 2\alpha - 12 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right). \end{aligned}$$

¹Saj lahko π nadomestimo s $\pi - 2\pi = -\pi$.

²Pri lihih k je to očitno, drži pa to tudi pri sodih k – na primer

$$\begin{aligned} f_2(-\alpha) &= 2(-\alpha) - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(-\alpha)\right) + \pi = \\ &= 2(-\alpha) - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(-\alpha)\right) - \pi = \\ &= -f_2(\alpha) \end{aligned}$$

Njihovi grafi za $n = 1.335$ (kar je lomni količnik rumene svetlobe) na tem intervalu so na sliki 5. Zaradi boljše preglednosti so narisani v različnih barvah: f_1 je rdeče, f_2 rjave, f_3 zelene, f_4 modre in f_5 vijolične barve.



Slika 5. Grafi funkcij f_1 , f_2 , f_3 , f_4 in f_5

Funkcija $|f_1(\alpha)|$ ima očitno v stacionarni točki α_1 maksimum in zato zalogo vrednosti $[0, |\varphi_1|]$. Po enem odboju znotraj dežne kapljice zato noben izhodni žarek ne more s smerjo proti Soncu oklepati kota, večjega od $|\varphi_1|$. Nad primarnim mavričnim lokom je torej nebo temnejše kot pod njim. Po drugi strani ima $|f_2(\alpha)|$ v svoji stacionarni točki α_2 minimum in zato zalogo vrednosti $[|\varphi_2|, \pi]$. Po dveh odbojih znotraj dežne kapljice zato noben izhodni žarek ne more s smerjo proti Soncu oklepati kota, manjšega od $|\varphi_2|$, nebo pod sekundarnim mavričnim lokom je temnejše kot nad njim. Med prvim in drugim mavričnim lokom je zato nebo temnejše, kot drugje. Temu pasu pravimo Aleksandrov temni pas (po filozofu Aleksandru iz Afrodizija).

Označimo zdaj s Ψ_k svetlobni tok po k -tem odboju znotraj dežne kapljice, s Φ_k pa svetlobni tok, ki po k -tem odboju zapusti kapljico. Potem velja

$$\Psi_k = \Phi_k + \Psi_{k+1}.$$

Ker smemo vzeti, da je $\Phi_k = a\Psi_k$ (kjer je $0 < a < 1$), sledi $\Psi_{k+1} = (1 - a)\Psi_k$, zato je

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1} &= a\Psi_{k+1} = a(1 - a)\Psi_k = \\ &= (1 - a)\Phi_k.\end{aligned}$$



Slika 6. Aleksandrov temni pas

Φ_k je torej geometrično zaporedje s koeficientom, manjšim od ena, vrednosti Φ_k zato z rastočim k padajo. Poleg tega se, kot smo videli, širine mavričnih lokov z rastočim k večajo, zato se relativne svetlosti naslednjih mavričnih lokov še toliko hitreje manjšajo.

Na sliki 6 se lepo vidi, da je svetlost sekundarnega mavričnega loka opazno manjša od svetlosti primarnega. Kot vemo iz izkušenj, se pravzaprav včasih, kadar razmere niso idealne, sekundarnega mavričnega loka sploh ne vidi. Tovrstne težave se seveda pri mavričnih lokih višjega reda še potencirajo.

Pri lokih tretjega in četrtega reda pa, kot vemo, nastopi še dodatna komplikacija – ta dva loka sta, za razliko od prvih dveh, na strani Sonca, zato praviloma sončna svetloba še dodatno prekrije svetlobo mavričnega loka. Da bi bila ta dva mavrična loka vidna oziroma, da bi bil viden vsaj tretji, je torej potrebno, da je nebo zapolnjeno z oblaki, tako, da je le malo svetlobe in koristno je, če je za mavričnim lokom še posebej temen oblak, na ozadju katerega bo lok bolj izstopal. Ob vsem tem pa ne smejo imeti Sončni

žarki na poti do območja dežja, kjer naj bi mavrica nastala, nobenih ovir, tako da na dežne kapljice pade kar najmočnejša svetloba, kar bo zagotovilo kar največjo svetlost mavričnega loka, hkrati pa mora biti opazovalec v senci (to je, ne sme biti izpostavljen direktni sončni svetlobi). Vsi ti pogoji so seveda le redkokdaj izpolnjeni, a tudi, ko so, je zaradi šibke svetlosti loka potrebno, da opazovalec ve, kje je treba mavrični lok iskati, sicer ga zlahka spregleda.

Vse naštetu pojasnjuje, zakaj so bili zapisi o opaženem tretjem mavričnem loku silno redki oziroma, zakaj so se prve fotografije tretjega loka posrečile šele leta 2011. Po drugi strani pa zaradi podobnosti oziroma bližine med tretjim in četrtnim mavričnim lokom ne preseneča, da je prva fotografija četrtega mavričnega loka uspela že en mesec kasneje[3].

Pri petem mavričnem loku nastopi ugodna okoliščina – ne le, da lok leži stran od Sonca, ampak pade prav v Aleksandrov temni pas, se pravi v najtemnejši del neba. Kljub manjši svetlosti tega loka je zato tudi njegova fotografija sledila razmeroma hitro, že leta 2012[4]. Kot ugotavlja njen avtor, pa je prav verjetno, da je bil na kaki lepo uspeli fotografiji prvih dveh mavričnih lokov zaradi svoje šibke relativne svetlosti peti lok spregledan, da pa ga, če vemo, kje ga je treba iskati, ob pozornem pregledu fotografije vseeno najdemo.

Zaradi majhne svetlosti nadaljnjih mavričnih lokov je brez posebne opreme opaženje ali celo uspela fotografija takega loka malo vrejetna, oziroma mogoča le v kontroliranem okolju laboratorija.

LITERATURA

- [1] M. Vilfan, *Polarizacija mavrične svetlobe*, Obzornik mat. fiz., 70 (2023) 1
- [2] M. Grossmann, E Schmidt, & A Haussmann, *Photographic evidence for the third-order rainbow*, Applied Optics, Vol. 50, Issue 28, pp. F134-F141 (2011)
- [3] M. Theusner, *Photographic observation of a natural fourth-order rainbow*, Applied Optics, Vol. 50, Issue 28, pp. F129-F133 (2011)
- [4] H. E. Edens, *Photographic observation of a natural fifth-order rainbow*, Applied Optics, Vol. 54, Iss. 4, pp. B26–B34 (2015)
- [5] K. V. Beard, N. V. Bringi, M. Thurai, *A new understanding of raindrop shape*, Atmospheric Research, Volume 97, Issue 4, pp. 396-415 (2010)
- [6] *Bad rain*, dostopno na: <https://personal.ems.psu.edu/~fraser/Bad/BadRain.html>, ogled 15. 2. 2024