

AKADEMIJA ZNANOSTI IN UMETNOSTI V LJUBLJANI  
MATEMATIČNO-PRIRODOSLOVNI RAZRED — MATEMATIČNI ODSEK

---

# RAZPRAVE

KNJIGA III



LJUBLJANA  
1947



RAZPRAVE  
MATEMATIČNO - PRIRODOSLOVNEGA  
RAZREDA

III



AKADEMIJA ZNANOSTI IN UMETNOSTI V LJUBLJANI  
MATEMATIČNO-PIRODOSLOVNI RAZRED — MATEMATIČNI ODSEK

# RAZPRAVE

KNJIGA III



LJUBLJANA  
1947

Sprejeto na seji matematično prirodoslovnega razreda dne 5. aprila 1944.  
Reçu 5 avril 1944

ZALOŽILA AKADEMIJA ZNANOSTI IN UMETNOSTI V LJUBLJANI  
NATISNILA PROSVETNA TISKARNA V LJUBLJANI

1

ANTON VAKSELJ

MONODROMIJSKA FUNKCIJA LINEARNE  
DIFERENCIALNE ENAČBE

RAZPRAVE III  
SLOVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI IN UMETNOSTI V LJUBLJANI  
MATEMATIČNO-PRIRODOSLOVNI RAZRED — MATEMATIČNI ODSEK

SPREJETO NA SEJI DNE 5. APRILA 1944

## Monodromijska funkcija linearne diferencialne enačbe

### I. Definicija

1. Poljubna rešitev linearne diferencialne enačbe  $n$ -tega reda zavisi od  $n$  linearnih integracijskih konstant. Iz rešitev in odvodov pa lahko tvorimo take funkcije, da iz njih izpadejo integracijske konstante. Namesto od teh pa zavise dobljene funkcije od fiksne začetne in spremenljive končne točke. Število konstant se tako zniža za  $n-1$ . Vpeljava teh funkcij pa je tem važnejša, ker nas naravno privede do Galoisovi analogne teorije linearnih diferencialnih enačb. Ta analogija je pa različna od Picard-Vessiotove<sup>1</sup> teorije linearnih diferencialnih enačb. Picard-Vessiotova resolventa je tista enačba, kateri zadoščajo vse funkcije  $u_i y_k$ , kjer so  $u_i$  dane racionalne funkcije in kjer tvorijo  $y_k$  fundamentalni sistem rešitev dane diferencialne enačbe. Temu nasprotno je resolventa, ki jo uvajam v tem delu, tista enačba, kateri zadoščajo določene poddeterminante iz  $|y_i^{(k)}|$ .

*Do omenjenih, od izbire fundamentalnega sistema neodvisnih funkcij pridemo, če zasledujemo nastanje substitucije v sistemu neodvisnih rešitev na sklenjenem obhodu okoli singularnih točk.*

Zaradi preprostosti se hočem omejiti na linearne diferencialne enačbe 2. reda.

2. Bodi torej:

$$(1) \quad y'' - py = 0$$

dana linearna diferencialna enačba s  $p = p(x)$ ,  $y_1$  in  $y_2$  sistem neodvisnih rešitev, kateremu hočemo slediti od začetne točke  $x_0$  po določeni krivulji  $C$  do končne točke  $x$ . Vrednosti teh rešitev in prvih odvodov vstavimo v matriko  $Y$ :

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x), & y_1'(x) \\ y_2(x), & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> E. Picard, Traité d'Analyse, zv. III. 1905, str. 563.

Fundamentalni sistem  $Y$ , ki zavisi od točke na krivulji  $C$ , hočemo na ta način primerjati z  $Y_0 = Y(x_0)$ , da si poiščemo linearno substitucijo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ki komponirana z  $Y_0$  dá  $Y$ :

$$(2) \quad AY_0 = Y.$$

Koeficienti  $a = a(x_0, x)$ ,  $b = b(x_0, x)$ , . . . . . substitucije  $A = YY_0^{-1}$  so tedaj funkcije začetne in končne točke in zavisijo še od izbire fundamentalnega sistema  $Y$ . Ako vzamemo mesto  $Y$  fundamentalni sistem  $Y = TZ$ , sledi iz (2) takoj  $ATZ_0 = TZ$  ali

$$(T^{-1}AT)Z_0 = Z.$$

Pri prehodu od  $Y$  na  $Z$  preide substitucija  $A$  v transformirano substitucijo  $T^{-1}AT$ . Pri tej transformaciji pa ostane nezpremenjena absolutna invarianta substitucije  $A$ :

$$I = \frac{a + d}{2\sqrt{ad - bc}}.$$

Račun nam da zanjo:

$$(3) \quad I(x_0, x) = \frac{y_1(x_0)y_2'(x) + y_2'(x_0)y_1(x) - y_1(x_0)y_2'(x) - y_2'(x_0)y_1(x)}{2\sqrt{[y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2'(x_0)y_1(x_0)] [y_1(x)y_2'(x) - y_2'(x)y_1(x)]}}$$

Torej: Vrednost funkcije  $I(x_0, x)$  je neodvisna od izbire fundamentalnega sistema  $y_1$  in  $y_2$ , zavisi pa od začetne točke  $x_0$ , krivulje  $C$  in končne točke  $x$ .

V primeru enačbe (1) je koren pod ulomkovo črto enak konstanti, katero lahko vzamemo enako 1; če je še specialneje  $p = -\lambda$  konstanten, je n. pr.:

$$I(x_0, x) = \cos \sqrt{\lambda}(x - x_0).$$

3. Funkcija  $I(x_0, x)$  je pri fiksni začetni točki  $x_0$  kompleksna v splošnem neskončnokrat mnogolična analitična funkcija točke  $x$ . Ta funkcija je pa v važni zvezi z monodromijsko grupo dane linearne diferencialne enačbe. Ako popiše  $x$  iz  $x_0$  vse možne sklenjene obhode okoli singularnih točk, tedaj so končne vrednosti v točki  $x = x_0$  ravno invariante:

$$I = \frac{a + \delta}{2\sqrt{a\delta - \beta\gamma}}$$

vseh substitucij monodromijske grupe. Zategadelj hočem  $I(x_0, x)$  imenovati *monodromijsko funkcijo* dane linearne diferencialne enačbe 2. reda. Analogija z algebraičnimi integrali je očitna, invariante  $I$  monodromijske grupe odgovarjajo periodam takega integrala.

Medtem ko je vez med periodami algebraičnega integrala additivna in tako skrajno preprosta, zadoščajo razne invariante  $I$  celim racionalnim enačbam. *Obvladanje teh relacij je problem algebraično-grupne narave, čigar rešitev bo šele omogočila popolno funkcijskoteoretično obdelavo funkcij, ki so v zvezi z dano linearno diferencialno enačbo.*

Pri linearni diferencialni enačbi  $n$ -tega reda imamo  $n-1$  monodromijskih funkcij; izračunati jih moremo s pomočjo koeficientov karakteristične enačbe, ki jo dobimo, če zapišemo, da je determinanta substitucije  $A = \rho E$  enaka nič.

## II. Oscilacijsko število

4. Če pišemo monodromijsko funkcijo  $I$  v obliki:

$$I(x_0, x) = \cos \theta,$$

tedaj smemo tolmačiti  $\theta$ , ki je po analitičnem nadaljevanju od  $x_0$  do  $x$  določen tudi do mnogokratnika števila  $2\pi$ , kot dolžino nekega krožnega loka, prirejenega dvema točkama tiste Riemannove ploskve, ki spada k funkciji  $I(x_0, x)$ . Ta kot je isti za vse krivulje ravnine  $x$ , ki nastanejo iz prvotne  $C$ , ne da bi prešli kako singularno točko. Ako je  $x = x_0$ , obdaja krivulja  $C$  skupino singularnih točk, kateri potem pripada substitucija  $S$  monodromijske grupe. Realni del kvocienta  $\frac{\theta}{2\pi}$  se imenuje *oscilacijsko število* substitucije  $S$ .

V delu Zur Theorie der linearen Differentialgleichung der 2. Ordnung mit vier Fuchsschen singularen Punkten<sup>2</sup> definira J. Plemelj oscilacijsko število kot realni del spremembe pri  $\frac{1}{2\pi i} \log \frac{Y_2(x)}{Y_1(x)}$ , kjer sta  $Y_1(x)$  in  $Y_2(x)$  obe dani sklenjeni poti  $C$  prirejeni kanonični rešitvi in kjer opiše  $x$  pot  $C$ . Po

<sup>2</sup> Monatshefte für Mathematik und Physik. Bd. 43 (1936); str. 323.

ustnem sporočilu avtorju tega dela je pa J. Plemelj tudi še definiral oscilacijsko število s pomočjo rešitev  $y_1$  in  $y_2$ , ki v začetni točki zadoščata enačbam  $y_1(x_0) = y_2'(x_0) = 1$  in  $y_1'(x_0) = y_2(x_0) = 0$ . Ako zaznamujemo vrednosti teh rešitev po danem celem obhodu z zvezdico, je invarianta  $I$  pripadajoče substitucije enaka  $\frac{1}{2}[y_1^*(x_0) + y_2^*(x_0)]$ . J. Plemelj zasleduje potem spremembo funkcije  $\frac{1}{2}[y_1(x) + y_2'(x)] = \cos \theta$  po dani sklenjeni poti. Oba navidez različna načina sledita iz izrazov monodromijske funkcije (3), zapisanih za dva posebna fundamentalna sistema.

5. Ako vzamemo tri točke  $x_0$ ,  $x_1$  in  $x'$  in jih medsebojno zvežemo s krivuljami, tako da nastali trikotnik ne vsebuje singularnih točk, smemo smatrati odgovarjajoče  $\theta$  za stranice nekoga sferičnega trikotnika. Ako soupadejo vse tri točke  $x_0 = x = x'$ , ne da bi pri tem trikotnik izginil, in oklepajo posamezne stranice singularne točke, nastane sferični trikotnik  $F$  Schillingovega jedra.<sup>3</sup>

Na podoben način lahko tvorimo sferične mnogokotnike s poljubnim številom stranic. Ako premikamo oglišča odgovarjajočega mnogokotnika v ravnini  $x$  in padejo končno vsa oglišča kakor zgoraj v točko  $x_0$ , se bodo pri tem koti  $\theta$  zvezno spreminjali. Iz tega bi pa sledilo, da so med oscilacijskimi števili posameznih substitucij monodromijske grupe relacije, iz katerih bi bilo mogoče izločiti nekatera odlična kot oscilacijska števila dane diferencialne enačbe oziroma pripadajočega fundamentalnega obsega.

### III. Osnovne lastnosti monodromijske funkcije.

6. V primeru linearne diferencialne enačbe (1) je monodromijska funkcija kot funkcija končne točke  $x$  linearna sestava rešitev dane enačbe in prvih odvodov. Zategadelj zadošča linearni diferencialni enačbi 4. reda, ki ima rešitve  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_1'$ , in  $y_2'$  in do katere pridemo na sledeči način. Če odvedemo enačbo (1), sledi:

$$(4) \quad Y''' - py' - p'y = 0$$

ali

$$(5) \quad y = \frac{y''' - py'}{p}$$

<sup>3</sup> Gl. F. Klein: Vorl. ff. d. hypergeom. Funktion. — Springer 1933, str. 172.

Ako v ulomku nadomestimo  $y'$  z  $u$ , dobimo izraz:

$$\frac{u'' - pu}{p'}$$

Ako je  $u$  rešitev prvotne enačbe, je ulomek enak nič, če je pa  $u$  odvod rešitve dane enačbe, je po (5) ulomek rešitev prvotne enačbe. V obeh primerih je:

$$(6) \quad \left( \frac{u'' - pu}{p'} \right)' - p \frac{u'' - pu}{p'} = 0,$$

ki je že iskana enačba. Iz izrazov za funkcijo  $I$  in njene odvode po  $x$ -u pa sledi, da je za  $x = x_0$ :

$$I = 1, \quad I' = 0, \quad I'' = p(x_0) = p_0, \quad I''' = \frac{3}{2} p'(x_0) = \frac{3}{2} p_0'.$$

Torej: *Monodromijska funkcija  $I(x_0, x)$  je v odvisnosti od  $x$  tista rešitev enačbe (6), ki prejme v začetni točki  $x = x_0$  sledeče vrednosti:*

$$u = 1, \quad u' = 0, \quad u'' = p_0, \quad u''' = \frac{3}{2} p_0'.$$

7. Linearna diferencialna enačba (6) ima isto lastnost, kot jo ima Galoisova resolventa za algebraično enačbo. *Ako poznamo tako rešitev enačbe (6), ki ni istočasno rešitev nobene enačbe nižjega reda, tedaj moremo z njo in njenimi prvimi tremi odvodi izraziti vsako rešitev enačb (6) in (1).*

V resnici lahko uvidimo, da ima enačba poleg  $u_1 = u$  še sledeče rešitve:

$$u_2 = \frac{u'' - pu}{p'}, \quad u_3 = \left( \frac{u'' - pu}{p'} \right)', \quad u_4 = p \frac{u'' - pu}{p'} - u'.$$

Rešitev  $u_2$  je zaradi (6) tudi rešitev enačbe (1),  $u_3 = u_2'$  potem reši (4). Za  $u_4$  pa najdemo:

$$(7) \quad \frac{u_4'' - pu_4}{p'} = \left( \frac{u'' - pu}{p'} \right)' - u$$

in s tem

$$(8) \quad \left( \frac{u_4'' - pu_4}{p'} \right)' = p \frac{u'' - pu}{p'} - u' = u_4$$

ter

$$\left( \frac{u_4'' - pu_4}{p'} \right)'' = p \left( \frac{u'' - pu}{p'} \right)' - pu = p \frac{u_4'' - pu_4}{p'}.$$

Iz (7) sledi še, da je  $\left(\frac{u'' - pu}{p'}\right)' - u$  druga rešitev prvotne enačbe. Obe rešitvi sta linearno neodvisni, ker je n. pr. za  $x = x_0$ :

$$\frac{u'' - pu}{p'} = 0, \quad \left(\frac{u'' - pu}{p'}\right)' - u = \frac{1}{2}.$$

Prav tako so tudi rešitve  $u_1, u_2, u_3$  in  $u_4$  enačbe (6) linearno neodvisne. To pokažemo preprosto, če si določimo začetne vrednosti posameznih rešitev. Lahak račun da:

$$\begin{aligned} u_2 = 0, \quad u_2' = \frac{1}{2}, \quad u_2'' = 0, \quad u_2''' = \frac{1}{2}p_0, \\ u_3 = \frac{1}{2}, \quad u_3' = 0, \quad u_3'' = \frac{1}{2}p_0, \quad u_3''' = p_0', \\ u_4 = 0, \quad u_4' = -\frac{1}{2}p_0, \quad u_4'' = -\frac{1}{2}p_0', \quad u_4''' = -\frac{1}{2}(p_0'' + p_0'^2). \end{aligned}$$

Determinanta začetnih vrednosti je pa  $\frac{1}{16}(p_0')^2$ , tedaj različna od 0, če  $x_0$  nima prav specialne lege.

Zaradi njenih lastnosti smemo torej enačbo (6) imenovati *resolvento* prvotne enačbe.

8. Med resolvento (6) in Galoisovo resolvento algebraične enačbe je pa vendar bistvena razlika. Rešitve Galoisove resolvente so primitivne, t. j. ne zadoščajo nobeni algebraični enačbi nižje stopnje. Med rešitvami, ki zadoščajo linearni diferencialni enačbi (6), pa ločimo več vrst: rešitvi  $u_2$  in  $u_3$  zadoščata že diferencialni enačbi 2. reda, rešitev  $u_4$  pa enačbi (8), ki je 3. reda. V analogiji z algebraično teorijo hočemo imenovati rešitve, ki ne zadoščajo nobeni enačbi nižjega reda, *primitivne rešitve*. Ako je  $S$  substitucija, ki spada k polnemu obhodu določenih singularnih točk, tedaj je invarianta substitucije  $SA$  taka primitivna rešitev. Ker je enačba (6) 4. reda, se da vsaka njena rešitev izraziti linearno kot vsota štirih primitivnih rešitev.

S tem smo pa dobili možnost, da pojasnimo odvisnost monodromijske funkcije  $I$  od krivulje  $C$ . Ravnino  $x$  si razrežimo tako, da so polni obhodi okoli singularnih točk nemogoči. Poleg tega si izberimo iz začetne točke  $x_0$  štiri poljubne obhode okoli singularnih točk, katerim naj ustrezajo substitucije  $S_1, S_2, S_3$  in  $S_4$ . Primitivne rešitve, ki spadajo k substitucijam  $S_1A, S_2A, S_3A$  in  $S_4A$  so v razrezani ravnini enolične. Potem pa je vrednost monodromijske funkcije pri poljubni krivulji enaka linearnemu izrazu gornjih v razrezani ravnini  $x$  enoličnih primitivnih rešitev, pri čemer so koeficienti posameznih členov invariante monodromijske grupe. Ako vzamemo še peto substitucijo  $S_5$ ,

in k  $S_5 A$  pripadajočo primitivno rešitev, tedaj zadoščajo k  $S_1 A \dots, S_5 A$  pripadajoče primitivne rešitve neki linearni enačbi  $F$ . Ako se še giblje  $x$  po sklenjeni krivulji  $C$ , ki ji ustreza substitucija  $S$ , dobimo za  $x = x_0$  končno  $A = S$  in iz enačbe  $F$  nastane določena relacija med invariantami monodromijske grupe. S tem pa ni podan samo dokaz eksistence v § 3. omenjenih relacij, temveč je tudi odkrit način, kako nastanejo. Enačbe  $F$  pa dajo še nekoliko več. Odvisnost oscilacijskih števil, o kateri se govori v § 5., dobi tudi svoj analitičen izraz v enačbah  $F$ , ki jih zasledujemo po odgovarjajočih sklenjenih poteh.

V § 3. in 5. omenjeni problemi relacij med invariantami monodromijske grupe in njih oscilacijskih števil dobijo tako nekoliko točnejšo vsebino.

9. Zaznamujemo si z  $u_A$  invarianto substitucije  $A = YY_0^{-1}$  in bodi  $S$  poljubna substitucija monodromijske grupe ter  $u_{SA}$  invarianta substitucije  $SA$ . Substituciji  $S$  odgovarja prehod od  $u_A$  na  $u_{SA}$ : s tem je pa tudi na zunan pokazano, da je monodromijska grupa dane linearne diferencialne enačbe obenem njena Galoisova grupa  $(u_A, u_{SA})$ ; razlika od algebraične teorije je le v tem, da je  $u_A$  kompleksna funkcija.

10. Raztegnitev zgoraj dobljenih rezultatov na linearne diferencialne enačbe poljubnega  $n$ -tega reda hočemo samo na kratko omeniti. Od  $n - 1$  monodromijskih funkcij take enačbe, pri kateri si zaradi preprostosti mislimo, da manjka člen z  $y^{(n-1)}$ , je najvažnejša tista, k spada h karakterju  $I = \sum a_{ii}$  substitucije  $A = YY_0^{-1} = (a_{ik})$ . Tudi ta monodromijska funkcija  $I$  je kot funkcija končne točke  $x$  linearna sestava integralov dane enačbe in njihovih odvodov do  $(n - 1)$ -ega. Na isti način kot zgoraj se uvidi, da zadošča  $I$  linearni diferencialni enačbi reda  $n$ .

Podobno se tvorijo linearne diferencialne enačbe za ostale monodromijske funkcije, ki so homogene forme 2., 3., . . .  $(n - 1)$ -te stopnje rešitev in odvodov  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n^{(n-1)}$ . Preostane še, da se odkrije zveza teh diferencialnih enačb z Galoisovi analogno resolvento prvotne enačbe.

## Résumé

### La fonction de monodromie de l'équation différentielle linéaire

I. Définition. — 1. La solution générale de l'équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  dépend linéairement de  $n$  constantes d'intégration. Avec ces solutions et leurs dérivées, nous pouvons former des fonctions qui ne contiennent plus de constantes d'intégration. Par contre, les fonctions ainsi obtenues dépendent d'un point initial fixe et d'un point final variable. Cette notion nouvelle est d'autant plus importante qu'elle conduit naturellement à une théorie d'équations différentielles linéaires analogue à celle de Galois. Mais cette théorie est bien différente de la théorie de Picard-Vessiot<sup>1</sup> sur l'équation différentielle linéaire. La résolvante de Picard-Vessiot est l'équation à laquelle satisfont toutes les fonctions  $u_i y_k$ , où  $u_i$  sont des fonctions rationnelles définies et où les  $y_k$  forment un système fondamental de l'équation différentielle donnée. Au contraire, la résolvante que j'introduis dans cette étude est une équation à laquelle satisfont certains sous-déterminants de  $\begin{vmatrix} y_k^{(i)} \end{vmatrix}$ .

On obtient les fonctions indépendantes du choix du système fondamental en suivant la génération de la substitution que subit un système de solutions indépendantes sur un contour ferme autour des points singuliers. Pour simplifier, je me borne aux équations différentielles linéaires du second ordre. Des difficultés sérieuses ne pourraient pas s'opposer à la généralisation des résultats obtenus aux équations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

2. Soit donc

$$(1) \quad y'' - py = 0$$

l'équation différentielle proposée où la fonction  $p = p(x)$  est analytique. Suivons le système des deux solutions indépendantes  $y_1$  et  $y_2$  d'un point initial  $x_0$  le long d'une courbe donnée  $C$  jusqu'au point final  $x$ . Nous formons avec les valeurs de ces solutions et de leurs premières dérivées la matrice

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x), & y_1'(x) \\ y_2(x), & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> E. Picard, *Traite d'Analyse*, III, 1905, p. 563.

Nous comparons le système fondamental  $Y$  dépendant d'un point  $x$  de la courbe  $C$  avec  $Y_0 = Y(x_0)$  en déterminant la substitution  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  qui composée avec  $Y_0$  donne  $Y = AY_0$ . Les coefficients  $a = a(x_0, x)$ ;  $b = b(x_0, x)$ , ... de la substitution  $A = Y Y_0^{-1}$  sont ensuite des fonctions du point initial  $x_0$  et du point final  $x$ , mais elles dépendent encore du choix du système fondamental  $Y$ . Si l'on substitue  $Y$  par  $Y = TZ$ , alors passe  $A$  à la substitution transformée  $T^{-1} A T$ . C'est l'invariant absolu d' $A$ :

$$I = \frac{a + b}{2\sqrt{ad - bc}},$$

qui ne change pas dans cette transformation. On trouve ainsi:

$$(2) \quad I(x_0, x) = \frac{y_1(x_0)y_2'(x) + y_2'(x_0)y_1(x) - y_2(x_0)y_1'(x) - y_1'(x_0)y_2(x)}{2\sqrt{[y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)] [y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)]}}$$

Donc: *La valeur de la fonction  $I(x_0, x)$  est indépendante du choix du système fondamental  $y_1$  et  $y_2$  et elle dépend du point initial  $x_0$ , de la courbe  $C$  et du point final  $x$ .*

Pour  $p - \lambda = \text{const.}$  on obtient p. e.:

$$I(x_0, x) = \cos \sqrt{\lambda} (x - x_0).$$

3. La fonction  $I(x_0, x)$  où on laisse fixe le point initial  $x_0$  est, en général, une fonction analytique multiforme du point  $x$ . Elle a un rapport important au groupe de monodromie de l'équation différentielle donnée. Si  $x$  partant du point initial  $x_0$  décrit tous les contours fermés possibles autour des points singuliers, les valeurs finales obtenues au point  $x = x_0$  sont précisément les invariants:

$$I = \frac{a + \delta}{2\sqrt{a\delta - \beta\gamma}}$$

de toutes les substitutions du groupe de monodromie. C'est pour cela que j'appelle  $I(x_0, x)$  la *fonction de monodromie* de l'équation différentielle linéaire du 2<sup>e</sup> ordre donnée. L'analogie avec les intégrales algébriques est évidente; les invariants du groupe de monodromie correspondent aux périodes d'une intégrale algébrique.

Cependant, tandis que la dépendance mutuelle des périodes d'une intégrale algébrique est additive, et par cela très simple, les invariants  $I$  satisfont aux équations rationnelles entières. *L'étude de ces équations constitue un problème appartenant à l'algèbre et à la théorie de groupes. C'est la résolution de ce problème seulement qui rendra possible une étude approfondie des fonctions définies par une équation différentielle linéaire.*

II. Nombre d'oscillation. 4. Donnant à la fonction de monodromie  $I$  la forme

$$I(x_0, x) = \cos \theta,$$

nous pouvons considérer  $\theta$  qui prolongé analytiquement de  $x_0$  jusqu'à  $x$  est aussi déterminé à un multiple de  $2\pi$  près comme la longueur d'un arc de cercle adjoint aux deux points de la surface de Riemann appartenant à la fonction  $I(x_0, x) = I(x)$ . L'angle  $\theta$  dépend de la courbe  $C$  et reste le même pour toutes les courbes du plan- $x$  qu'on obtient en déformant  $C$  sans passer par un point singulier. Pour  $x = x_0$  correspond à la courbe  $C$  entourant des points singuliers déterminés la substitution  $S$  du groupe de monodromie. On appelle la partie réelle du quotient

$\frac{\theta}{2\pi}$  le nombre d'oscillation de la substitution  $S$ .

On obtient les définitions du nombre d'oscillation données par J. Plemelj<sup>2</sup> si l'on emploie la fonction de monodromie écrite pour deux systèmes fondamentaux spéciaux.

III. Propriétés fondamentales de la fonction de monodromie. 5. Pour l'équation différentielle linéaire (1) la fonction de monodromie (2) comme fonction du point final  $x$  est linéaire dans les solutions de l'équation donnée et ses premières dérivées. Donc, elle satisfait à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre dont les solutions sont  $y_1, y_2, y_1'$  et  $y_2'$ . L'équation différentielle cherchée est:

$$(3) \quad \left( \frac{u'' - pu}{p'} \right)'' - p \frac{u'' - pu}{p'} = 0.$$

Des expressions pour  $I$  et de ses dérivées par rapport à  $x$  il s'ensuit: la fonction de monodromie  $I(x_1, x)$  comme fonction

<sup>2</sup> Par communication verbale et dans son étude: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichung der 2. Ordnung mit vier Fuchs-schen singularen Punkten“. Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 43 (1936) p. 323.

de  $x$  est cette solution de (3) qui, au point initial  $x = x_0$ , prend les valeurs suivantes:

$$u = 1, \quad u' = 0, \quad u'' = p_0, \quad u''' = \frac{3}{2}p_0' = \frac{3}{2}p'(x_0)$$

6. L'équation différentielle linéaire (3) a une propriété semblable à celle de la résolvante de Galois pour une équation algébrique: si une solution donnée de l'équation (3) est telle qu'en même temps elle n'est pas la solution d'une équation différentielle d'ordre moindre, on peut exprimer chaque solution de l'équation (3) et (1) linéairement par la solution donnée  $u$  et ses trois premières dérivées.

En effet, (3) a outre  $u_1 = u$  les solutions suivantes, linéairement indépendantes:

$$u_2 = \frac{u'' - pu}{p'}, \quad u_3 = \left( \frac{u'' - pu}{p'} \right)', \quad u_4 = \frac{u'' - pu}{p'} - u'.$$

La deuxième solution de (1) linéairement indépendante de  $u_2$  est:

$$u_5 = \left( \frac{u'' - pu}{p'} \right)' - u.$$

A cause de la propriété mentionnée nous appelons (3) la résolvante de l'équation primitive.

7. Pourtant, il y a une différence essentielle entre la résolvante (3) et la résolvante de Galois pour une équation algébrique. Toutes les solutions de la résolvante de Galois sont primitives, tandis que parmi les solutions de (3) nous distinguons plusieurs espèces: les solutions  $u_2$  et  $u_5$  satisfont à une équation différentielle linéaire du deuxième ordre et la solution  $u_4$  à une équation différentielle du troisième ordre. Si  $S$  est une substitution correspondant à un contour complet autour des points singuliers déterminés l'invariant de  $SA$  est par exemple une solution primitive.

Maintenant nous pouvons élucider la dépendance de la fonction de monodromie de la courbe  $C$ . Nous coupons le plan  $x$  de manière que des contours complets autour des points singuliers ne soient pas possibles. En outre, en partant du point  $x_0$  nous choisissons à volonté quatre contours complets autour des points singuliers auxquels correspondent les substitutions  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Les solutions primitives qui sont adjointes aux substitutions  $S_1A, S_2A, S_3A$  et  $S_4A$  sont des fonctions uniformes

dans le plan découpé. Par conséquent, *la valeur de la fonction de monodromie pour une courbe  $C$  quelconque est égale à une expression linéaire des quatre solutions primitives, uniformes dans le plan découpé  $x$ , dans laquelle les coefficients de tous les membres sont des invariants du groupe de monodromie.*

Si nous prenons encore une cinquième substitution  $S_5$  et la solution primitive appartenant à  $S_5 A$ , les solutions primitives correspondantes à  $S_i A$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$  satisfont à une équation linéaire  $F$ . Si le point  $x$  décrit une courbe fermée  $C$  à laquelle correspond la substitution  $S$  du groupe de monodromie, nous obtenons pour  $x = x_0$  enfin  $A = S$  et l'équation  $F$  devient une équation déterminée entre les invariants du groupe de monodromie. Cela ne nous démontre pas seulement l'existence des équations citées dans le § 3, mais nous en expose aussi leur mode de génération. Par ce dernier développement, le problème mentionné au § 3 obtient une formulation plus précise.

2

ANTON VAKSELJ

MATRIČNI RAČUN LINEARNIH SUBSTITUCIJ  
2. REDA

RAZPRAVE III  
SLOVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI IN UMETNOSTI V LJUBLJANI  
MATEMATIČNO-PRIRODOSLOVNI RAZRED — MATEMATIČNI ODSEK

SPREJETO NA SEJI DNE 5. APRILA 1943

ANTON VAKSELJ

## Matrični račun linearnih substitucij 2. reda

### Uvod

Namen matričnega računa je podati klasifikacijo in pomen ter medsebojno povezanost invariant, ki pripadajo določenemu številu linearnih substitucij  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Pri tem razumemo pod invarianto tak izraz koeficientov v  $S_i$ , ki se pomnoži s konstanto, ako namesto koeficientov v  $S_i$  vzamemo koeficiente transformiranih substitucij  $T^{-1}S_iT$ .

Potreba po sistematičnem študiju teh invariant in njih relacij je omenjena že v mojem delu »Monodromijska funkcija linearne diferencialne enačbe«<sup>1</sup>, kjer sem poudaril važnost tega študija za popolnejšo teoretično obdelavo funkcij, ki so v zvezi z dano linearno diferencialno enačbo. Pričujoči spis je pa seveda šele uvod v ta del funkcijske teorije in se najprej nanaša le na substitucije, ki spadajo k linearni diferencialni enačbi 2. reda.

V dosedanji literaturi je posebej omeniti le dve deli, ki gresta v označeno smer. Delo H. Vogt-a »Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du II. ordre«<sup>2</sup>, v katerem so predvsem izračunane invariante produkta več linearnih substitucij, ni v neposredni zvezi s tem delom. Važnejša je zanj F. Schillingova teorija jedra<sup>3</sup>. V tej se trem substitucijam  $S_1, S_2$  in  $S_3$  s  $S_1S_2S_3 = E$  priredi na krogli sferični trikotnik, kateremu se poišče polarni sferični trikotnik s pripadajočimi substitucijami  $S_1'S_2'S_3' = E$ . S pomočjo te konstrukcije definiram »polarni« produkt dveh substitucij  $S_1$  in  $S_2$ :  $S_1 \times S_2$ , ki je invarianten proti transformacijam  $T$ :

$$(T^{-1}S_1T) \times (T^{-1}S_2T) = T^{-1}(S_1 \times S_2)T.$$

Strogo je pa treba ločiti polarni produkt  $S_1 \times S_2$  od navadnega  $S_1S_2$ .

<sup>1</sup> § 3, str. 9, § 8, str. 13.

<sup>2</sup> Annales de l'École Norm. Sup. Serie III, t. 6. (1889) Suppl.

<sup>3</sup> Math. Annalen, zv. 44 (1894) str. 161. — glej tudi F. Klein: Vorl. u. d. hypergeom. Funktion. — Springer 1933, str. 173.

Okoli te nove definicije se potem razvije ves matrični račun, ki kaže dosti veliko podobnost z navadnim vektorskim računom. Vendar so pa tudi razlike znatne. Glavne so v tem, da imamo v matričnem računu dva različna produkta dveh substitucij proti enemu pri vektorjih in poleg tega dva načina, kako se tvorijo k vektorskemu računu analogne operacije. Računski aparat matrik je tako znatno obsežnejši od aparata pri vektorjih, kar je le potrdilo velikega pomena matričnega računa.

V tem delu je podana sistematika invariant in kovariant 4 substitucij  $S_1, S_2, S_3$  in  $S_4$ .

### I. Kratka ponovitev osnovnih definicij in lastnosti. — Osni produkt dveh linearnih substitucij.

1. Linearno substitucijo, ki jo pišemo v homogeni obliki:

$$(1) \quad \begin{aligned} z_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\ z_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2 \end{aligned}$$

oziroma v nehomogeni:

$$(1) \quad z = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta},$$

zaznamujemo kratko z matriko  $S$ :

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Vsota dveh substitucij  $S_1$  in  $S_2$  je:

$$(2) \quad S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix}$$

in je očitno komutativna; vsota treh substitucij je asociativna.

Produkt skalarja  $\varrho$  z matriko  $S$  je substitucija:

$$(3) \quad \varrho S = S \varrho = \begin{pmatrix} \varrho \alpha & \varrho \beta \\ \varrho \gamma & \varrho \delta \end{pmatrix}$$

Produkt dveh substitucij  $S_1$  in  $S_2$  je, ako uporabimo (1), definiran s tole formulo:

$$(4) \quad S_1 S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2 \\ \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Produkt dveh substitucij običajno ni komutativen.

Produkt skalarja  $\varrho$  in dveh substitucij je glede na skalar asociativen in komutativen:

$$(5) \quad \varrho(S_1 S_2) = (\varrho S_1) S_2 = S_1 (\varrho S_2) = (S_1 S_2) \varrho.$$

Produkt substitucij ima distributivno lastnost:

$$(6) \quad (S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T.$$

Substitucija:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \gamma, & 1 \end{pmatrix}$$

je enota in jo zaznamujemo z  $E$ :

$$(7) \quad SE = ES = S.$$

Substitucijo:

$$\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

na kratko označimo z  $O$ .

Inverzna substitucija k  $S$  je  $S^{-1}$ , ki je definirana nekoliko drugače kakor običajno:

$$(8) \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}.$$

Inverzna substitucija produkta  $S_1S_2$  je  $S_2^{-1}S_1^{-1}$ .

Za  $S$  in  $S^{-1}$  veljajo, če pišemo  $2i = \alpha + \delta$  in  $d = \alpha\delta - \beta\gamma$ , sledeče relacije:

$$(9) \quad S + S^{-1} = 2iE, \quad SS^{-1} = S^{-1}S = dE.$$

Izraz  $i$  se imenuje karakter,  $d$  pa determinanta substitucije  $S$ ; oba sta invariantna. V resnici je n. pr. zaradi distributivne lastnosti ter (5) in (9):

$$T^{-1}ST + (T^{-1}ST)^{-1} = T^{-1}(S + S^{-1})T = 2id'E,$$

če je  $d'$  determinanta  $T$ -a. Prav tako je:

$$T^{-1}ST \cdot (T^{-1}ST)^{-1} = d'dE.$$

Izraz  $\frac{i}{d}$  je torej absolutna invarianta  $S$ -a.

Medtem ko je determinanta substitucije  $S = S_1S_2$  enaka produktu determinant obeh komponent:  $d = d_1d_2$ , je karakter produkta  $S_1S_2$  nova invarianta:

$$i_{12} = \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2 + \delta_1\delta_2 + \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2).$$

2. Iz (1)' sledi, da sta dvojni točki substitucije  $S$  korena enačbe:

$$(10) \quad \gamma y^2 + (\delta - \alpha)y - \beta = 0,$$

kjer tolmačimo  $y$  v kompleksni ravnini. Diskriminanta enačbe (10) je:

$$(11) \quad i_{11} = \frac{1}{4}(a - \delta)^2 + \beta\gamma = i^2 - d,$$

ki je pri parabolinih substitucijah enaka nič.

Iz (10) sledi še, da imajo vse substitucije  $S + \lambda E$  isti dvojni točki.

Dvojne točke substitucij  $S_1$  in  $S_2$  leže *harmonično*, če je

$$(12) \quad i_{12} = \frac{1}{4}(a_1 - \delta_1)(a_2 - \delta_2) + \frac{1}{2}(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2)$$

enaka nič. Lahek račun da:

$$(13) \quad j_{12} = i_{12} - i_1 i_2.$$

Substituciji  $S_1$  in  $S_2$  z  $j_{12} = 0$  imenujemo *konjugirani*.

3. V matričnem računu je invarianta  $j_{12}$  skalarni produkt obeh substitucij  $S_1$  in  $S_2$ . Da ločimo ta produkt od navadnega  $S_1 S_2$ , hočemo skalarni produkt označiti zgoraj s horizontalno črto. Torej:

$$(14) \quad \overline{S_1 S_2} = \frac{1}{4}(a_1 - \delta_1)(a_2 - \delta_2) + \frac{1}{2}(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) = i_{12}.$$

Potem pa je:

$$\overline{S_1^2} = j_{11}.$$

Skalarni produkt je komutativen in distributiven. N. pr. je:

$$\overline{(aS_1 + bS_2)(cS_1 + dS_2)} = ac\overline{S_1^2} + (ad + bc)\overline{S_1 S_2} + b\overline{dS_2^2}.$$

V posebnem je še:

$$\overline{SE} = 0$$

in s tem:

$$\overline{(S_1 + \lambda_1 E)(S_2 + \lambda_2 E)} = \overline{S_1 S_2}.$$

Skalarni produkt  $\overline{S_1 S_2}$  hočem zaradi te njegove posebne lastnosti in poznejše potrebe točneje imenovati *osni produkt* obeh substitucij.

## II. Definicija in lastnosti polarnega produkta. — Skalarni produkt treh substitucij

4. Polarni produkt dveh substitucij  $S_1$  in  $S_2$  je definiran s formulo:

$$(15) \quad S_1 \times S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(a_1 - \delta_1)(a_2 - \delta_2) + \beta_1\gamma_2, & \frac{1}{2}[(a_1 - \delta_1)\beta_2 - \beta_1(a_2 - \delta_2)] \\ \frac{1}{2}[\gamma_1(a_2 - \delta_2) - (a_1 - \delta_1)\gamma_2], & \frac{1}{4}(a_1 - \delta_1)(a_2 - \delta_2) + \gamma_1\beta_2 \end{pmatrix}$$

Ta definicija pa ima le smisel, če je produkt invariantno vezan s  $S_1$  in  $S_2$ . Ako zaznamujemo s črtico koeficiente transformirane substitucije  $T^{-1}ST$ , kjer je  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , je

$$(16) \quad \begin{aligned} \alpha' &= ad\alpha + cd\beta - ab\gamma - bc\delta \\ \beta' &= bd\alpha + d^2\beta - b^2\gamma - bd\delta \\ \gamma' &= -aca - c^2\beta + a^2\gamma + ac\delta \\ \delta' &= -bca - cd\beta + ab\gamma + ad\delta \end{aligned}$$

Potem pa je n. pr.:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(\alpha_1' - \delta_1')(\alpha_2' - \delta_2') + \beta_1'\gamma_2' = \\ & = (ad - bc) \left\{ ad \left[ \frac{1}{4}(\alpha_1 - \delta_1)(\alpha_2 - \delta_2) + \beta_1\gamma_2 \right] + \right. \\ & + cd \cdot \frac{1}{2}[(\alpha_1 - \delta_1)\beta_2 - \beta_1(\alpha_2 - \delta_2)] - ab \cdot \frac{1}{2}[\gamma_1(\alpha_2 - \delta_2) - \\ & \left. - (\alpha_1 - \delta_1)\gamma_2] - bc \left[ \frac{1}{4}(\alpha_1 - \delta_1)(\alpha_2 - \delta_2) + \gamma_1\beta_2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Če je  $ad - bc = d'$  je torej:

$$(T^{-1}S_1T) \times (T^{-1}S_2T) = d'T^{-1}(S_1 \times S_2)T.$$

Polarni produkt je očitno distributiven, ni pa komutativen. Iz (15) sledi namreč:

$$(17) \quad S_0 \times S_1 = (S_1 \times S_2)^{-1}.$$

V posebnem je:

$$(18) \quad S \times E = O$$

in

$$(19) \quad S_1 \times S_1 = \overline{S_1^2}E.$$

Karakter polarnega produkta je  $j_{12}$ , torej enak osnemu produktu istih dveh substitucij. Determinanta je pa izračunana enaka  $j_{11}j_{22}$ . Enačbo (17) tedaj lahko pišemo:

$$(20) \quad (S_1 \times S_2)(S_0 \times S_1) = \overline{S_1^2} \overline{S_2^2} E.$$

5. Analogija z vektorskim računom gre pa še dalje. Tvorimo si osni produkt substitucije  $S_1 \times S_2$  in tretje substitucije  $S_3$ :

$$\begin{aligned} & \overline{(S_1 \times S_2)} S_3 = \\ & = \frac{1}{4}(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)(\alpha_3 - \delta_3) + \frac{1}{4}[(\alpha_1 - \delta_1)\beta_2 - \beta_1(\alpha_2 - \delta_2)]\gamma_3 + \\ & \quad + \frac{1}{4}[\gamma_1(\alpha_2 - \delta_2) - (\alpha_1 - \delta_1)\gamma_2]\beta_3 = \\ & = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \delta_1 - \alpha_1 & -\beta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 - \alpha_2 & -\beta_2 \\ \gamma_3 & \delta_3 - \alpha_3 & -\beta_3 \end{vmatrix} = \overline{S_1 S_2 S_3} = \frac{1}{4} |\gamma, (\delta - \alpha), -\beta|. \end{aligned}$$

Torej kakor pri vektorjih:

*Oсни produkt polarnega produkta dveh substitucij s tretjo substitucijo je enak skalarnemu produktu treh substitucij:*

$$(21) \quad j_{123} = \overline{S_1 S_2 S_3} = (\overline{S_1 \times S_2}) S_3 = \frac{1}{4} |\gamma, (\delta - a), -\beta|.$$

Iz tega pa sledi takoj:

$$(22) \quad (\overline{S_1 \times S_2}) S_1 = (\overline{S_1 \times S_2}) S_2 = 0.$$

Za polarni produkt dveh substitucij imamo torej sledečo definicijo:

*Polarni produkt dveh substitucij  $S_1$  in  $S_2$  je tista substitucija, ki je konjugirana k  $S_1$  in  $S_2$  in koje karakter je osni produkt  $\overline{S_1 S_2}$ .*

Lahek račun nam da še:

$$(23) \quad \overline{S_l S_m S_n} = -|\overline{S_l S_m}|, \quad l, m = 1, 2, 3.$$

6. *Produkt dveh polarnih produktov z eno skupno srednjo komponento je transitiven:*

$$(24) \quad (\overline{S_1 \times S_2}) (\overline{S_2 \times S_3}) = \overline{S_2^2} (\overline{S_1 \times S_3}).$$

Zadnjo enačbo dokažemo, če vzamemo substitucijo  $S_2$  v kanični obliki  $\beta_2 = \gamma_2 = 0$ . Potem je:

$$\begin{aligned} S_1 \times S_2 &= \frac{a_2 - \delta_2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1 - \delta_1) & -\beta_1 \\ \gamma_1 & \frac{1}{2}(a_1 - \delta_1) \end{pmatrix}, \\ (S_2 \times S_3) &= \frac{a_3 - \delta_3}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_3 - \delta_3) & \beta_3 \\ -\gamma_3 & \frac{1}{2}(a_3 - \delta_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Produkt obeh skalarjev je  $j_{223}$ , produkt obeh substitucij pa  $S_1 \times S_3$ .

Z enačbo (24) pa lahko dokažemo sledečo splošno lastnost polarnih produktov:

*$n$  poljubnih substitucij  $S_1, S_2, \dots, S_n$  zadošča identiteti:*

$$(25) \quad (\overline{S_1 \times S_2}) (\overline{S_2 \times S_3}) \dots (\overline{S_{n-1} \times S_n}) = \overline{S_1^2 S_2^2} \dots \overline{S_{n-1}^2} E.$$

Stavek velja za  $n - 1$  in  $n = 2$ , vzemimo torej, da velja za  $n - 1$  substitucij:

$$(\overline{S_1 \times S_2}) \dots (\overline{S_{n-1} \times S_n}) = \overline{S_1^2 S_2^2} \dots \overline{S_{n-1}^2} E.$$

Iz (24) sledi za  $S_{n-1}, S_n, S_1$ :

$$(\overline{S_{n-1} \times S_n}) (\overline{S_n \times S_1}) = \overline{S_n^2} (\overline{S_{n-1} \times S_1}).$$

Produkt zadnjih dveh enačb da (25).

7. Osni produkt dveh polarnih produktov  $S_1 \times S_2$  in  $S_3 \times S_4$  se izračuna po formuli, ki je podobna formuli iz vektorskega računa:

$$(26) \quad \overline{(S_1 \times S_2)(S_3 \times S_4)} = - \left| \begin{array}{cc} \overline{S_1 S_3} & \overline{S_1 S_4} \\ \overline{S_2 S_3} & \overline{S_2 S_4} \end{array} \right|,$$

kar zopet najlaže dokažemo, če vzamemo eno substitucijo v kanonični obliki. Bolj komplicirana je formula za polarni produkt  $(S_1 \times S_2) \times S_3$ :

$$(27) \quad (S_1 \times S_2) \times S_3 = \overline{S_2 S_3} (S_1 - i_1 E) - \overline{S_1 S_3} (S_2 - i_2 E) + \overline{S_1 S_2 S_3} E.$$

Pri tem dokazu vzamemo  $S_3$  v kanonični obliki.

III. Notranji produkt dveh substitucij. — Zunanji produkt treh substitucij. — Skalarni produkt štirih substitucij.

8. Poleg osnega produkta  $\overline{S_1 S_2}$  je pa potrebno, da se vpelje še drugi skalarni produkt, ki ga pa hočem imenovati *notranji produkt* obeh substitucij. Dani sta dve substituciji  $S_1$  in  $S_2$ , ki priredita  $z_1$  in  $z_2$  točki  $y$  kompleksne ravnine. Zahtevamo, da vsi pari točk  $z_1$  in  $z_2$  tvorijo involucijo. Zato je očitno potrebno, da je  $S_2 S_1^{-1}$  involutivna, t. j. da je njen karakter nič. Kot notranji produkt substitucij  $S_1$  in  $S_2$  definiramo torej izraz:

$$(28) \quad d_{12} = \frac{1}{2} (a_1 \delta_2 + \delta_1 a_2 - \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2).$$

Simbolično hočemo označiti ta produkt s horizontalno črto spodaj:

$$(29) \quad d_{12} = \underline{S_1 S_2}$$

Dve substituciji s  $\underline{S_1 S_2} = 0$  sta *med seboj involutorični*.

V posebnem je:

$$d_{11} = \underline{S_1^2} = a_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 = d_1,$$

t. j. substitucija je involutorična sama sebi, če je izprijena.

Lahek račun da:

$$(30) \quad d_{12} = i_1 i_2 - j_{12} = 2 i_1 i_2 - i_{12}$$

9. S pomočjo novega skalarnega produkta pa moremo sedaj v drugi analogiji z vektorskim računom definirati *zunanji produkt* treh substitucij in končno skalarni produkt štirih substitucij.

K danim substitucijam  $S_1, S_2$  in  $S_3$  si hočemo poiskati substitucijo  $\Sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}$ , ki je involutorična k  $S_1, S_2$  in  $S_3$ :

$$\underline{\Sigma} S_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rešitev zadnjih linearnih enačb vzamemo v sledeči obliki:

$$(31) \quad A = \frac{1}{2}|a, \beta, \gamma|, \quad B = \frac{1}{2}|a, \beta, \delta|, \quad \Gamma = -\frac{1}{2}|a, \gamma, \delta|, \quad \Delta = -\frac{1}{2}|\beta, \gamma, \delta|;$$

kjer je n. pr.:

$$|a, \beta, \gamma| = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Novi produkt, ki ga zaznamujemo s  $[S_1 S_2 S_3]$ , ima v resnici vse lastnosti zunanjšega produkta vektorskega računa:

$$[S_1 S_2 S_3] = [S_2 S_3 S_1] = [S_3 S_1 S_2] = -[S_1 S_3 S_2] = -[S_3 S_2 S_1] = -[S_2 S_1 S_3] \\ [S_1 S_3 S_2] = 0.$$

Upravičenost vpeljave novega pojma pa leži zopet v dejstvu, da je zunanji produkt invariantno vezan s  $S_i$ . Račun s pomočjo (16) transformiranega  $\Delta$  dā n. pr.:

$$\begin{aligned} \Delta' &= -\frac{1}{2}|\beta', \gamma, \delta'| = \\ &= \frac{1}{2}|(bda + d^2\beta - b^2\gamma - b\delta\delta), (-aca - c^2\beta + \\ &\quad + a^2\gamma + ac\delta), (-bca - cd\beta + ab\gamma + ad\delta)| = \\ &= -\frac{1}{2}(ad - bc)|[cd|a, \beta| + ab|a, \gamma| + (ad + bc)|\beta, \gamma| + \\ &\quad + cd|\beta, \delta| + ab|\gamma, \delta|], (-bca - cd\beta + ab\gamma + ad\delta)| = \\ &= (ad - bc)^2 (-bcA - cdB + ab\Gamma + ad\Delta) \end{aligned}$$

kar je v skladu s (16). Torej je:

$$[(T^{-1} S_1 T) (T^{-1} S_2 T) (T^{-1} S_3 T)] = d'^2 T^{-1} [S_1 S_2 S_3] T.$$

10. *Karakter zunanjšega produkta  $[S_1 S_2 S_3]$  je skalarni produkt  $\overline{S_1 S_2 S_3}$ . V resnici je:*

$$\frac{1}{2}(A + \Delta) = \frac{1}{4}|a, \beta, \gamma| - \frac{1}{4}|\beta, \gamma, \delta| = \frac{1}{4}|\gamma, -a, -\beta| + \frac{1}{4}|\gamma, \delta, -\beta|$$

ali:

$$(32) \quad \frac{1}{2}(A + \Delta) = \frac{1}{4}|\gamma, \delta - a, -\beta| = \overline{S_1 S_2 S_3}.$$

Determinanto zunanjšega produkta dobimo, če si izračunamo bolj splošno notranji produkt dveh zunanjših produktov  $\Sigma = [S_1 S_2 S_3]$  in  $\Sigma' = [S_4 S_5 S_6]$ . Očitno je pa produkt  $\underline{\Sigma\Sigma'}$  po znanem stavku multiplikacije matrik enak produktu:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{4}\delta_4 & -\frac{1}{4}\gamma_4 & -\frac{1}{4}\beta_4 & \frac{1}{4}a_4 \\ \frac{1}{4}\delta_5 & -\frac{1}{4}\gamma_5 & -\frac{1}{4}\beta_5 & \frac{1}{4}a_5 \\ \frac{1}{4}\delta_6 & -\frac{1}{4}\gamma_6 & -\frac{1}{4}\beta_6 & \frac{1}{4}a_6 \end{vmatrix}.$$

Lahek račun dá torej:

$$(33) \quad \underline{[S_1 S_2 S_3]} \underline{[S_4 S_5 S_6]} = \begin{vmatrix} \underline{S_1 S_4} & \underline{S_1 S_5} & \underline{S_1 S_6} \\ \underline{S_2 S_4} & \underline{S_2 S_5} & \underline{S_2 S_6} \\ \underline{S_3 S_4} & \underline{S_3 S_5} & \underline{S_3 S_6} \end{vmatrix}.$$

Potem pa je determinanta zunanjega produkta:

$$(34) \quad \underline{[S_1 S_2 S_3]}^2 = \begin{vmatrix} \underline{S_1^2} & \underline{S_1 S_2} & \underline{S_1 S_3} \\ \underline{S_2 S_1} & \underline{S_2^2} & \underline{S_2 S_3} \\ \underline{S_3 S_1} & \underline{S_3 S_2} & \underline{S_3^2} \end{vmatrix}.$$

11. Zunanji produkt, v katerem je ena komponenta enaka  $E$ , je v enostavni zvezi s polarnim produktom ostalih dveh substitucij. Iz (31) sledi za  $S_3 = E$ :

$$[S_1 S_2 E] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2) & \frac{1}{2}[(a_1 - \delta_1)\beta_2 - \beta_1(a_2 - \delta_2)] \\ \frac{1}{2}\gamma[(a_2 - \delta_2) - (a_1 - \delta_1)\gamma_2] & \frac{1}{2}(\gamma_1 \beta_2 - \beta_1 \gamma_2) \end{pmatrix}.$$

Potem pa je po (15):

$$(35) \quad [S_1 S_2 E] = S_1 \times S_2 - \overline{S_1 S_2} E.$$

12. Ako dodamo k trem substitucijam  $S_1, S_2, S_3$  še četrto  $S_4$ , ter izračunamo notranji produkt  $\underline{[S_1 S_2 S_3]} S_4$ , dobimo:

$$\underline{[S_1 S_2 S_3]} S_4 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} a_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \\ a_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \\ a_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \\ a_4, \beta_4, \gamma_4, \delta_4 \end{vmatrix}.$$

Izračunani produkt je torej simetričen v vseh štirih substitucijah. Zategadelj ga moremo imenovati *skalarni produkt štirih substitucij*:

$$(36) \quad \begin{aligned} d_{1234} &= S_1 S_2 S_3 S_4 = \underline{[S_1 S_2 S_3]} S_4 = \\ &= \frac{1}{4} |a_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i|, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Ako pišemo  $d_{1234} = \frac{1}{4} |\gamma, (\delta - a), -\beta, \frac{\alpha + \delta}{2}|$ , dobimo takoj:

$$(37) \quad d_{1234} = -i_1 j_{234} + i_2 j_{134} - i_3 j_{124} + i_4 j_{123}.$$

Na običajen način se najde:

$$(38) \quad (S_1 S_2 S_3 S_4)^2 = |S_i S_k|, \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

13. Iz (30) in (36) sledi takoj formula za osni produkt  $j_{123,4}$  iz  $[S_1 S_2 S_3]$  in  $S_4$ :

$$j_{123,4} = j_{123} \cdot i_4 - d_{1234}$$

oziroma po (37):

$$(39) \quad j_{123,4} = i_1 j_{234} + i_2 j_{314} + i_3 j_{124}.$$

Prav tako sledi iz (30) formula za osni produkt dveh zunanjih produktov. Če uporabimo še (32) in (35), dobimo:

$$\begin{aligned} [S_1 S_2 S_3] [S_4 S_5 S_6] &= \overline{S_1 S_2 S_3} \cdot \overline{S_4 S_5 S_6} - [S_1 S_2 S_3] [S_4 S_5 S_6] = \\ &= - \begin{vmatrix} \overline{S_1 S_4} & \overline{S_1 S_5} & \overline{S_1 S_6} \\ \overline{S_2 S_4} & \overline{S_2 S_5} & \overline{S_2 S_6} \\ \overline{S_3 S_4} & \overline{S_3 S_5} & \overline{S_3 S_6} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \overline{S_1 S_4} & \overline{S_1 S_5} & \overline{S_1 S_6} \\ \overline{S_2 S_4} & \overline{S_2 S_5} & \overline{S_2 S_6} \\ \overline{S_3 S_4} & \overline{S_3 S_5} & \overline{S_3 S_6} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ali končno:

$$(40) \quad [S_1 S_2 S_3] [S_4 S_5 S_6] = \begin{vmatrix} \overline{S_1 S_4} & \overline{S_1 S_5} & \overline{S_1 S_6} & i_1 \\ \overline{S_2 S_4} & \overline{S_2 S_5} & \overline{S_2 S_6} & i_2 \\ \overline{S_3 S_4} & \overline{S_3 S_5} & \overline{S_3 S_6} & i_3 \\ i_4 & i_5 & i_6 & 0 \end{vmatrix}$$

14. Skalarna produkta zunanjega produkta  $[S_1 S_2 S_3]$  in polarnega produkta  $[S_4 \times S_5]$  dobimo iz (40). Za  $S_6 = E$  ter z uporabo (35) in  $\overline{SE} = 0$  sledi takoj iz (40):

$$(41) \quad \overline{[S_1 S_2 S_3] [S_4 \times S_5]} = - \begin{vmatrix} \overline{S_1 S_4} & \overline{S_1 S_5} & i_1 \\ \overline{S_2 S_4} & \overline{S_2 S_5} & i_2 \\ \overline{S_3 S_4} & \overline{S_3 S_5} & i_3 \end{vmatrix}$$

Nato pa dobimo s pomočjo (30):

$$(42) \quad \overline{[S_1 S_2 S_3] [S_4 \times S_5]} = \overline{S_1 S_2 S_3} \cdot \overline{S_4 S_5} + \begin{vmatrix} \overline{S_1 S_4} & \overline{S_1 S_5} & i_1 \\ \overline{S_2 S_4} & \overline{S_2 S_5} & i_2 \\ \overline{S_3 S_4} & \overline{S_3 S_5} & i_3 \end{vmatrix}$$

15. Za determinanto  $4d_{1234}$  v (36) si tvorimo vse njene poddeterminante ter si jih zapišemo v sledeči obliki:

$$\begin{vmatrix} 2A_1 & -2\Gamma_1 & -2B_1 & 2A_1 \\ 2A_2 & -2\Gamma_2 & -2B_2 & 2A_2 \\ 2A_3 & -2\Gamma_3 & -2B_3 & 2A_3 \\ 2A_4 & -2\Gamma_4 & -2B_4 & 2A_4 \end{vmatrix}$$

Po znanem stavku o determinantah so pa poddeterminante zadnje determinante zopet členi prvotne determinante, pomnoženi s  $16d_{1234}^2$ . Ako si za prvo vrsto izpišemo te poddeterminante, dobimo v razumljivi obliki:

$$\begin{aligned} 16d_{1234}^2 \alpha_1 &= -8 |A_i, B_i, \Gamma_i| \\ 16d_{1234}^2 \beta_i &= -8 |A_i, B_i, A_i|, \quad i = 2, 3, 4. \\ 16d_{1234}^2 \gamma_i &= 8 |A_i, B_i, A_i| \\ 16d_{1234}^2 \delta_i &= 8 |B_i, \Gamma_i, A_i| \end{aligned}$$

Determinante na levi strani so do skupnega predznaka na isti način tvorjene kot determinante v (31). Iz tega pa sledi

nova polarna oziroma involutivna konstrukcija za skupino 4 substitucij:

Ako priredimo substitucijam  $S_1, S_2, S_3$  in  $S_4$  štiri nove substitucije:

$$(43) \quad T_1 = [S_2 S_3 S_4], \quad T_2 = -[S_1 S_3 S_4], \quad T_3 = [S_1 S_2 S_4], \\ T_4 = -[S_1 S_2 S_3]$$

je tudi obratno, če je  $\lambda = -d_{1234}^2$ :

$$(44) \quad [T_1 T_3 T_4] = \lambda S_1, \quad [T_1 T_2 T_4] = -\lambda S_2, \quad [T_1 T_3 T_4] = \lambda S_3, \\ [T_1 T_2 T_3] = -\lambda S_4.$$

16. Značilne so formule za navadni oziroma polarni produkt dveh zunanjih produktov  $[S_1 S_2 S_3]$  in  $[S_1 S_2 S_4]$ . Ako pišemo koeficiente zunanjega produkta kot determinante 4. reda in pomnožimo odgovarjajoče determinante med seboj, najdemo, da je v produktu  $[S_1 S_2 S_3] [S_1 S_2 S_4]$  n. pr.:

$$AA' + BF' \\ = 2 \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \\ 0, 0, 0, 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \delta_4, -\frac{1}{2} \gamma_4, -\frac{1}{2} \beta_4, \frac{1}{2} \alpha_4 \\ \frac{1}{2} \delta_5, -\frac{1}{2} \gamma_5, -\frac{1}{2} \beta_5, \frac{1}{2} \alpha_5 \\ \frac{1}{2} \delta_6, -\frac{1}{2} \gamma_6, -\frac{1}{2} \beta_6, \frac{1}{2} \alpha_6 \\ 1, 0, 0, 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \\ 0, 0, 1, 0 \end{vmatrix} \\ \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \delta_4, -\frac{1}{2} \gamma_4, -\frac{1}{2} \beta_4, \frac{1}{2} \alpha_4 \\ \frac{1}{2} \delta_5, -\frac{1}{2} \gamma_5, -\frac{1}{2} \beta_5, \frac{1}{2} \alpha_5 \\ \frac{1}{2} \delta_6, -\frac{1}{2} \gamma_6, -\frac{1}{2} \beta_6, \frac{1}{2} \alpha_6 \\ 0, 0, 1, 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{14}, d_{15}, d_{16}, \alpha_1 \\ d_{24}, d_{25}, d_{26}, \alpha_2 \\ d_{34}, d_{35}, d_{36}, \alpha_3 \\ \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_{14}, d_{15}, d_{16}, \gamma_1 \\ d_{24}, d_{25}, d_{26}, \gamma_2 \\ d_{34}, d_{35}, d_{36}, \gamma_3 \\ \beta_4, \beta_5, \beta_6, 1 \end{vmatrix} = \\ = -\sum D_{lm} (\alpha_m \alpha_l + \beta_m \gamma_l) + |d_{lm}|.$$

Pri tem je  $D_{lm}$  poddeterminanta člena  $d_{lm}$  determinante  $|d_{lm}|$ . Oklepaj v zgornji vsoti je pa levi zgornji koeficient substitucije  $S_m S_l$ .

Na isti način najdemo, da je:

$$AB' + BA' = \\ = 2 \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \\ 0, 0, 0, 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \delta_4, -\frac{1}{2} \gamma_4, -\frac{1}{2} \beta_4, \frac{1}{2} \alpha_4 \\ \frac{1}{2} \delta_5, -\frac{1}{2} \gamma_5, -\frac{1}{2} \beta_5, \frac{1}{2} \alpha_5 \\ \frac{1}{2} \delta_6, -\frac{1}{2} \gamma_6, -\frac{1}{2} \beta_6, \frac{1}{2} \alpha_6 \\ 0, 0, 0, 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \\ 0, 0, 1, 0 \end{vmatrix} \\ \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \delta_4, -\frac{1}{2} \gamma_4, -\frac{1}{2} \beta_4, \frac{1}{2} \alpha_4 \\ \frac{1}{2} \delta_5, -\frac{1}{2} \gamma_5, -\frac{1}{2} \beta_5, \frac{1}{2} \alpha_5 \\ \frac{1}{2} \delta_6, -\frac{1}{2} \gamma_6, -\frac{1}{2} \beta_6, \frac{1}{2} \alpha_6 \\ 0, 0, 0, 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{14}, d_{15}, d_{16}, \beta_1 \\ d_{24}, d_{25}, d_{26}, \beta_2 \\ d_{34}, d_{35}, d_{36}, \beta_3 \\ \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_{14}, d_{15}, d_{16}, \delta_1 \\ d_{24}, d_{25}, d_{26}, \delta_2 \\ d_{34}, d_{35}, d_{36}, \delta_3 \\ \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0 \end{vmatrix} = \\ = -\sum D_{lm} (\alpha_m \beta_l + \beta_m \delta_l),$$

kjer je zopet oklepaj enak desnemu zgornjemu koeficientu produkta  $S_m S_i$ . Podobno je pri ostalih koeficientih produkta  $[S_1 S_2 S_3] [S_4 S_5 S_6]$ , za katerega najdemo takole formulo:

$$(45) \quad [S_1 S_2 S_3] [S_4 S_5 S_6] = \begin{vmatrix} \overline{S_1 S_4} & \overline{S_1 S_5} & \overline{S_1 S_6} & \cdot S_1 \\ \overline{S_2 S_4} & \overline{S_2 S_5} & \overline{S_2 S_6} & \cdot S_2 \\ \overline{S_3 S_4} & \overline{S_3 S_5} & \overline{S_3 S_6} & \cdot S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 & E \end{vmatrix}.$$

Pripisane točke povedo, kakšno je mesto substitucije v posameznih produktih: torej  $S_4 S_1$  in ne  $S_1 S_4$ .

Pripomnimo, da moremo poslednji produkt v podobni formuli izraziti, toda z uporabo invariant  $i_{lm}$ .

Na isti način izračunamo polarni produkt dveh zunanjih produktov. V tem produktu je n. pr.:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (A - \Delta) (A' - \Delta') + B\Gamma' = \\ & = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \\ -1, 0, 0, 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \delta_4, -\frac{1}{2} \gamma_4, -\frac{1}{2} \beta_4, \frac{1}{2} \alpha_4 \\ \frac{1}{2} \delta_5, -\frac{1}{2} \gamma_5, -\frac{1}{2} \beta_5, \frac{1}{2} \alpha_5 \\ \frac{1}{2} \delta_6, -\frac{1}{2} \gamma_6, -\frac{1}{2} \beta_6, \frac{1}{2} \alpha_6 \\ 1, 0, 0, -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \\ 0, 0, 1, 0 \end{vmatrix} \\ & = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \delta_4, -\frac{1}{2} \gamma_4, -\frac{1}{2} \beta_4, \frac{1}{2} \alpha_4 \\ \frac{1}{2} \delta_5, -\frac{1}{2} \gamma_5, -\frac{1}{2} \beta_5, \frac{1}{2} \alpha_5 \\ \frac{1}{2} \delta_6, -\frac{1}{2} \gamma_6, -\frac{1}{2} \beta_6, \frac{1}{2} \alpha_6 \\ 0, 0, 1, 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} d_{14}, & d_{15}, & d_{16} & (\alpha_1 - \delta_1) \\ d_{24}, & d_{25}, & d_{26} & (\alpha_2 - \delta_2) \\ d_{34}, & d_{35}, & d_{36} & (\alpha_3 - \delta_3) \\ \alpha_4 - \delta_4, & \alpha_5 - \delta_5, & \alpha_6 - \delta_6, & -4 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} d_{14}, d_{15}, d_{16}, \gamma_1 \\ d_{24}, d_{25}, d_{26}, \gamma_2 \\ d_{34}, d_{35}, d_{36}, \gamma_3 \\ \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0 \end{vmatrix} = \\ & = \Sigma D_{lm} [\frac{1}{4} (\alpha_m - \delta_m) (\alpha_l - \delta_l) + \beta_m \beta_l] - |d_{lm}|. \\ & \frac{1}{2} [(A - \Delta) B' - B (A' - \Delta')] = \\ & = \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \\ -1, 0, 0, 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \delta_4, -\frac{1}{2} \gamma_4, -\frac{1}{2} \beta_4, \frac{1}{2} \alpha_4 \\ \frac{1}{2} \delta_5, -\frac{1}{2} \gamma_5, -\frac{1}{2} \beta_5, \frac{1}{2} \alpha_5 \\ \frac{1}{2} \delta_6, -\frac{1}{2} \gamma_6, -\frac{1}{2} \beta_6, \frac{1}{2} \alpha_6 \\ 0, 1, 0, 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \\ 0, 0, 1, 0 \end{vmatrix} \\ & = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \delta_4, -\frac{1}{2} \gamma_4, -\frac{1}{2} \beta_4, \frac{1}{2} \alpha_4 \\ \frac{1}{2} \delta_5, -\frac{1}{2} \gamma_5, -\frac{1}{2} \beta_5, \frac{1}{2} \alpha_5 \\ \frac{1}{2} \delta_6, -\frac{1}{2} \gamma_6, -\frac{1}{2} \beta_6, \frac{1}{2} \alpha_6 \\ 1, 0, 0, -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} d_{14}, & d_{15}, & d_{16}, & \beta_1 \\ d_{24}, & d_{25}, & d_{26}, & \beta_2 \\ d_{34}, & d_{35}, & d_{36}, & \beta_3 \\ \alpha_4 - \delta_4, & \alpha_5 - \delta_5, & \alpha_6 - \delta_6, & 0 \end{vmatrix} - \\ & - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} d_{14}, d_{15}, d_{16}, \alpha_1 - \delta_1 \\ d_{24}, d_{25}, d_{26}, \alpha_2 - \delta_2 \\ d_{34}, d_{35}, d_{36}, \alpha_3 - \delta_3 \\ \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0 \end{vmatrix} = \\ & = \Sigma D_{lm} \frac{1}{2} [(\alpha_m - \delta_m) \beta_l - \beta_m (\alpha_l - \delta_l)]. \end{aligned}$$

Torej je:

$$(46) \quad [S_1 S_2 S_3] \times [S_4 S_5 S_6] = \begin{vmatrix} S_1 S_4, & S_1 S_5, & S_1 S_6, & \times S_1 \\ S_2 S_4, & S_2 S_5, & S_2 S_6, & \times S_2 \\ S_3 S_4, & S_3 S_5, & S_3 S_6, & \times S_3 \\ S_4, & S_5, & S_6, & -E \end{vmatrix}.$$

17. H koncu in zaradi izčrpnosti še kratko opazko o med seboj neodvisnih invariantah štirih substitucij.

Iz primerjanja formul (23) in (38) za kvadrate  $i_{1,2,3}^2$  in  $d_{1,2,3,4}^2$  uvidimo, da se vse vpeljane invariante morejo izraziti kot funkcije v  $i_l$  ter  $i_{lm}$  oziroma  $j_{lm}$ . Med poslednjimi je pa le  $3 \cdot 4 - 3 = 9$  neodvisnih. Omenjene invariante, po številu 10, zadoščajo tedaj še eni enačbi. To dobimo, če zapišemo, da je kvadrat matrike:

$$|\gamma_p, \delta_i - \alpha_p, -\beta_i|, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

enak nič:

$$(47) \quad \begin{vmatrix} j_{11}, & j_{12}, & j_{13}, & j_{14} \\ j_{21}, & j_{22}, & j_{23}, & j_{24} \\ j_{31}, & j_{32}, & j_{33}, & j_{34} \\ j_{41}, & j_{42}, & j_{43}, & j_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

## Résumé

### Le calcul des matrices des substitutions linéaires du 2<sup>ème</sup> ordre

L'importance théorique de ce calcul s'ensuit du fait qu'il nous donne une vue d'ensemble des invariants d'un nombre donné de substitutions linéaires  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Dans mon travail »La fonction de monodromie de l'équation différentielle linéaire«, qui précède dans ce recueil, j'ai déjà fait mention de la nécessité d'un examen systématique de ces invariants et des relations entre eux.<sup>3</sup>

On voit bien que nous ne pourrions pénétrer plus profondément dans la théorie des équations différentielles linéaires que lorsque nous aurons saisi au complet la théorie de ces relations. Ainsi le travail que je présente ici, et où je me borne aux substitutions linéaires du 2<sup>ème</sup> ordre, n'est qu'une première contribution à l'achèvement de cette partie de la théorie des équations différentielles linéaires du 2<sup>ème</sup> ordre.

Dans la littérature relative, deux travaux seulement, à mon su, doivent être mentionnés comme ayant des points de contact communs avec cette étude. Dans sa recherche »Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du II. ordre«<sup>4</sup> H. Vogt donne le calcul des invariants des produits de plusieurs substitutions, par quoi tout ce qu'il y a essentiellement commun est déjà indiqué. Plus importante pour ce que suit ici est la théorie du noyau de F. Schilling:<sup>5</sup> A trois substitutions  $S_1, S_2, S_3$  avec  $S_1 S_2 S_3 = E$  correspond sur la sphère stéréographique un triangle sphérique auquel est adjoint un triangle polaire avec les substitutions correspondantes  $S_1' S_2' S_3' = E$ . Au lieu de ceci je définis le produit polaire de deux substitutions  $S_1$  et  $S_2 : S_1 \times S_2$  qui est invariant par rapport à la transformation  $T$ :

$$(T^{-1} S_1 T) \times (T^{-1} S_2 T) = T^{-1} (S_1 \times S_2) T.$$

Nous insistons expressément sur la différence entre le produit polaire  $S_1 \times S_2$  et le commun  $S_1 S_2$ .

<sup>3</sup> § 3. p. 16, § 7. p. 18.

<sup>4</sup> Annales de l'Ecole Norm. Sup. Serie III. t. 6 (1889) suppl.

<sup>5</sup> Math. Annalen t. 44 (1894) p. 161 — V. aussi F. Klein: Vorl. ü. d. hypergeom. Funktionen. Springer 1933, p. 173.

La nouvelle définition du produit polaire nous conduit forcément à l'élaboration du calcul des matrices des substitutions linéaires du 2<sup>ème</sup> ordre qui montre des analogies remarquables avec le calcul vectoriel.

Dans cette étude je présente la systematique des invariants et covariants des quatre substitutions  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$ .

### I. Le produit axial de deux substitutions linéaires.

1. Nous désignons la substitution qui, écrite homogène ou non homogène, s'exprime:

$$(1) \quad \begin{aligned} z_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2, \\ z_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2, \end{aligned} \quad z = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta},$$

brèvement comme la matrice:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

La somme de deux substitutions  $S_1$  et  $S_2$  est:

$$(2) \quad S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Le produit de deux substitutions  $S_1$  et  $S_2$  suivant (1) est:

$$(3) \quad S_1 S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2 \\ \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2 \end{pmatrix}.$$

La substitution inverse de  $S$  est  $S^{-1}$  que nous définissons, un peu différemment que d'usage, comme suit:

$$(4) \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si nous écrivons  $\alpha + \delta = 2i$  et  $\alpha\delta - \beta\gamma = d$ , on a alors:

$$(5) \quad S + S^{-1} = 2iE, \quad SS^{-1} = S^{-1}S = dE, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'expression  $2i$  s'appelle le caractère,  $d$  le déterminant de la substitution  $S$  et ces deux quantités sont invariantes si nous passons de  $S$  à  $T^{-1}ST$ .

2. Le caractère de  $S_1 S_2$  est un invariant nouveau:

$$(6) \quad i_{12} = \frac{1}{2}(\alpha_1 \alpha_2 + \delta_1 \delta_2 + \beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2).$$

Plus important est l'invariant

$$(7) \quad J_{12} = i_{12} - i_1 i_2 = \frac{1}{4}(\alpha_1 - \delta_1)(\alpha_2 - \delta_2) + \frac{1}{2}(\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2),$$

qui, égal au 0, exprime que les points doubles de  $S_1$  et  $S_2$  sont situés harmoniquement; les deux substitutions s'appellent *conjuguées*.

Dans le calcul des matrices nous pouvons voir dans l'invariant  $j_{12}$  le produit scalaire de substitutions  $S_1$  et  $S_2$ . Pour le distinguer du produit commun, nous lui donnons, en écrivant, un trait au dessus.

Le produit scalaire est commutatif e distributif. On a :

$$\overline{SE} = 0, \quad \overline{(S_1 + \lambda_1 E)(S_2 + \lambda_2 E)} = \overline{S_1 S_2}.$$

Pour cette dernière propriété et tenant compte des développements ultérieurs, j'appelle le produit  $\overline{S_1 S_2}$  le produit axial des deux substitutions.

## II. Définition et propriétés du produit polaire.

### Le produit de trois substitutions.

3. Le produit polaire de deux substitutions  $S_1$  et  $S_2$  est donné par la formule:

$$(8) \quad S_1 \times S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (a_1 - \delta_1) (a_2 - \delta_2) + \beta_1 \gamma_2, & \frac{1}{2} [(a_1 - \delta_1) \beta_2 - \beta_1 (a_2 - \delta_2)] \\ \frac{1}{2} [\gamma_1 (a_2 - \delta_2) - (a_1 - \delta_1) \gamma_2], & \frac{1}{2} (a_1 - \delta_1) (a_2 - \delta_2) - \gamma_1 \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Cette définition a son bon sens parce que le nouveau produit est un covariant de  $S_1$  et  $S_2$ ;

$$(T^{-1} S_1 T) \times (T^{-1} S_2 T) = (T T^{-1}) T^{-1} (S_1 \times S_2) T.$$

Bien entendu, c'est aussi la propriété, sans mentions particulières, de toutes les notions ultérieures introduites ici.

Le produit polaire est distributif, mais il n'est pas commutatif:

$$S_2 \times S_1 = (S_1 \times S_2)^{-1}.$$

Au particulier:

$$S \times E = 0, \quad S_1 \times S_1 = \overline{S_1^2} E.$$

Finalement ou a en général:

$$(9) \quad (S_1 \times S_2)(S_2 \times S_3) \dots (S_n \times S_1) = \overline{S_1^2} \overline{S_2^2} \dots \overline{S_n^2} E.$$

4. C'est dans le suivant que l'analogie du calcul des matrices avec le calcul vectoriel apparait tout à fait clairement. Nous faisons le produit axial de  $S_1 \times S_2$  et d'une troisième

substitution  $S_2$ . Nous obtenons: *Le produit axial du produit polaire de deux substitutions et d'une troisième substitution est égal au produit scalaire des trois substitutions:*

$$(10) \quad j_{123} = \overline{S_1 S_2 S_3} = \overline{(S_1 \times S_2) S_3} = \frac{1}{4} |\gamma_i \delta_i - \alpha_i - \beta_i|, \quad i = 1, 2, 3.$$

(10) nous donne la définition suivante pour le produit polaire de deux substitutions:

*Le produit polaire de deux substitutions  $S_1$  et  $S_2$  est la substitution qui est conjuguée à  $S_1$  et  $S_2$  et dont le caractère est égal au produit axial  $S_1 S_2$ .*

Par analogie partielle avec le calcul vectoriel ou a les formules suivantes:

$$(11) \quad \overline{(S_1 \times S_2) (S_3 \times S_4)} = - \frac{\overline{S_1 S_3} \cdot \overline{S_2 S_4}}{\overline{S_1 S_2} \cdot \overline{S_3 S_4}},$$

$$(12) \quad (S_1 \times S_2) \times S_3 = \overline{S_2 S_3} (S_1 - i_1 E) - \overline{S_1 S_3} (S_2 - i_2 E) + \overline{S_1 S_2} S_3 E.$$

III. Le produit intérieur de deux substitutions.  
Le produit extérieur de trois substitutions.  
Le produit scalaire de quatre substitutions.

4. Pour une élaboration plus complète du calcul des matrices, il est nécessaire d'introduire, conjointement au produit axial  $\overline{S_1 S_2}$ , encore un produit scalaire. M'appuyant sur le calcul vectoriel, je l'appellerai le produit intérieur des deux substitutions.

Supposons qu'à un point  $y$  quelconque du plan complexe les substitutions  $S_1$  et  $S_2$  font correspondre les points  $z_1$  et  $z_2$ . Cherchons la condition que tous les couples  $z_1$  et  $z_2$  forment une involution. Pour cela il est évidemment nécessaire que le caractère de  $S_2 S_1^{-1}$  soit égal au zéro. Donc, nous définissons comme produit intérieur des substitutions  $S_1$  et  $S_2$  l'expression:

$$(13) \quad \underline{S_1 S_2} = d_{12} = \frac{1}{2} (\alpha_1 \delta_2 + \delta_1 \alpha_2 - \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2).$$

Deux substitutions avec  $S_1 S_2 S_1 S_2 = O$  sont *mutuellement involutives*.

A l'aide du nouveau produit scalaire nous pouvons, d'abord, définir le produit extérieur de trois substitutions par une nouvelle, deuxième analogie au calcul vectoriel.

Nous déterminons la substitution  $\Sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}$ , qui est involutive aux trois substitutions  $S_1, S_2$  et  $S_3$ :

$$\underline{\Sigma S_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Nous trouvons comme solution des dernières équations:

$$(14) \quad A = \frac{1}{2} |\alpha, \beta, \gamma|, \quad B = \frac{1}{2} |\alpha, \beta, \delta|, \quad \Gamma = -\frac{1}{2} |\alpha, \gamma, \delta|, \quad \Delta = -\frac{1}{2} |\beta, \gamma, \delta|$$

avec la signification p. e.  $|\alpha, \beta, \gamma| = |\alpha_i, \beta_i, \gamma_i|$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Le nouveau produit que nous désignons par  $[S_1 S_2 S_3]$  possède toutes les propriétés caractéristiques du produit vectoriel extérieur.

On a: *Le caractère de  $[S_1 S_2 S_3]$  est le produit scalaire  $\overline{S_1 S_2 S_3}$ .*

Nous déterminons le déterminant du produit extérieur en calculant plus généralement le produit intérieur de deux produits extérieurs  $[S_1 S_2 S_3]$  et  $[S_4 S_5 S_6]$ :

$$(15) \quad \underline{[S_1 S_2 S_3] [S_4 S_5 S_6]} = |\underline{S_i S_k}|, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 4, 5, 6.$$

Une composante étant  $E$ , le produit extérieur dépend simplement du produit polaire des deux substitutions restantes:

$$(16) \quad [S_1 S_2 E] = S_1 \times S_2 - \overline{S_1 S_2} E.$$

5. Calculons le produit intérieur  $\underline{[S_1 S_2 S_3] S_4}$  formé des quatre substitutions  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$ . Ce produit est symétrique par rapport à toutes les substitutions, nous pouvons le désigner comme *le produit scalaire de quatre substitutions*:

$$(17) \quad d_{1234} = \underline{S_1 S_2 S_3 S_4} = \underline{[S_1 S_2 S_3] S_4} = \frac{1}{4} |\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i|, \\ i = 1, 2, 3, 4.$$

On a:

$$(18) \quad \overline{[S_1 S_2 S_3] S_4} = j_{123,4} = i_1 j_{234} + i_2 j_{314} + i_3 j_{124},$$

$$(19) \quad \overline{[S_1 S_2 S_3] [S_4 S_5 S_6]} = \begin{vmatrix} S_1 S_4 & S_1 S_5 & S_1 S_6 & i_1 \\ S_2 S_4 & S_2 S_5 & S_2 S_6 & i_2 \\ S_3 S_4 & S_3 S_5 & S_3 S_6 & i_3 \\ i_4 & i_5 & i_6 & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Formons pour le déterminant  $4 d_{1234}$  de (17) tous les sous-déterminants et composons les dans le déterminant suivant:

$$|2A_i, \quad -2\Gamma_i, \quad -2B_i, \quad -2\Delta_i|, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Suivant une proposition connue les sous-déterminants du dernier déterminant sont les éléments du primitif (17) multipliés par

16  $d_{1,2,3,4}^2$ . Ces sous-déterminants sont formés, sauf le signe commun, ainsi que le prescrivent les formules (14). Cela nous donne la *construction polaire ou involutive* de deux quadruples adjoints de substitutions comme suit:

*En adjoignant aux quatre substitutions  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  quatre substitutions nouvelles:*

$$T_1 = [S_2 S_3 S_4], \quad T_2 = -[S_1 S_3 S_4], \quad T_3 = [S_1 S_2 S_4], \\ T_4 = -[S_1 S_2 S_3],$$

*on a inversement, si  $\lambda = -d_{1,2,3,4}^2$ :*

$$[T_2 T_3 T_4] = \lambda S_1, \quad [T_1 T_3 T_4] = -\lambda S_2, \quad [T_1 T_2 T_4] = \lambda S_3, \\ [T_1 T_2 T_3] = -\lambda S_4.$$

7. Il y a des formules remarquables pour le produit commun et polaire de  $[S_1 S_2 S_3]$  et  $[S_4 S_5 S_6]$ . Si nous écrivons les coefficients des produits extérieurs comme déterminants du 4<sup>ème</sup> ordre et si nous multiplions les déterminants correspondants entre eux nous obtenons:

$$(20) \quad [S_1 S_2 S_3] [S_4 S_5 S_6] = \begin{vmatrix} \frac{S_1 S_4}{S_4}, & \frac{S_1 S_5}{S_5}, & \frac{S_1 S_6}{S_6}, & S_1 \\ \frac{S_2 S_4}{S_4}, & \frac{S_2 S_5}{S_5}, & \frac{S_2 S_6}{S_6}, & S_2 \\ \frac{S_3 S_4}{S_4}, & \frac{S_3 S_5}{S_5}, & \frac{S_3 S_6}{S_6}, & S_3 \\ S_4, & S_5, & S_6, & E \end{vmatrix},$$

$$(21) \quad [S_1 S_2 S_3] \times [S_4 S_5 S_6] = \begin{vmatrix} \frac{S_1 S_4}{S_4}, & \frac{S_1 S_5}{S_5}, & \frac{S_1 S_6}{S_6}, & \times S_1 \\ \frac{S_2 S_4}{S_4}, & \frac{S_2 S_5}{S_5}, & \frac{S_2 S_6}{S_6}, & \times S_2 \\ \frac{S_3 S_4}{S_4}, & \frac{S_3 S_5}{S_5}, & \frac{S_3 S_6}{S_6}, & \times S_3 \\ S_4, & S_5, & S_6, & -E \end{vmatrix}.$$

Le point ou le signe de multiplication adjoints indiquent la place des substitutions relatives dans les singles produits; donc:  $S_4 S_1$  ou  $S_4 \times S_1$ .



3

ANTON VAKSELJ

DVA PRISPEVKA K TRIKOTNIŠKI GEOMETRIJI

RAZPRAVE III  
AKADEMIJA ZNANOSTI IN UMETNOSTI V LJUBLJANI  
MATEMATIČNO-PIRODOSLOVNI RAZRED — MATEMATIČNI ODSEK

SPREJETO NA SEJI DNE 5. APRILA 1944

## Dva prispevka k trikotniški geometriji

### I.

#### Simetrične točke trikotnika

Znamenite točke trikotnika, kot so n. pr. središči očrtanega in včrtanega kroga, težišče, višinska točka in Lemoinova točka, spadajo pod širši pojem *simetrične točke*,<sup>1</sup> to je tiste točke trikotnikove ravnine, katere trikotniške koordinate sledijo druga iz druge, če ciklično permutiramo trikotnikova ogljišča. Ako zaznamujemo ta z  $A, B, C$ , notranje kote pa z  $\alpha, \beta, \gamma$ , tedaj so koordinate omenjenih točk  $(\cos \alpha)$ ,  $(1)$ ,  $(\sin \beta \sin \gamma)$ ,  $(\cos \beta \cos \gamma)$  in  $(\sin \alpha)$ , pri čemer je zapisana vedno le prva k stranici  $BC$  pripadajoča koordinata in sledita ostali dve, če na prvo izvršimo dvakrat zaporedoma ciklično permutacijo  $(\alpha\beta\gamma)$ .

V obsežni teoriji trikotnika in njegovih lastnosti se pa število simetričnih točk veča in potreba po sistematični obdelavi teh točk postaja vedno očitnejša. Prispevek k temu je pričujoče delo.

Množica  $M$  vseh simetričnih točk ima namreč osnovno lastnost, da v njej eksistirajo razne baze iz po treh posebnih simetričnih točk, s katerimi se dajo linearno izraziti koordinate poljubne simetrične točke. Iz tega pa sledi sledeča poostrena, pa tudi skrčena definicija simetrične točke:

*Točka ravnine danega trikotnika je simetrična točka, če so njene koordinate  $x_1, x_2, x_3$  cele racionalne funkcije sinusov in kosinusov z določenim sicer poljubnim, racionalnim številom  $k$  pomnoženega odgovarjajočega kota in prav take, toda simetrične funkcije obeh ostalih kotov:*

$$\begin{aligned}x_1 = f(k\alpha; k\beta, k\gamma) = f(k\alpha; k\gamma, k\beta), \quad x_2 = f(k\beta; k\gamma, k\alpha), \\x_3 = f(k\gamma; k\alpha, k\beta)\end{aligned}$$

*in če so koeficienti v  $f$  števila določenega racionalnega obsega.*

Ves račun baz se da vključiti v teorijo addicijskih, multiplikacijskih in divizijskih teoremov trigonometričnih funkcij za

<sup>1</sup> G. Berkham-W. Fr. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. — Enzycl. d. math. Wiss. zv. III., 1., 2., str. 1184 sl.

trojico poljubnih kotov  $\alpha, \beta, \gamma$ . Ti koti so pa notranji koti trikotnika v ravnini z metričnim tenzorjem  $\Sigma (u_1^2 - 2u_2 u_3 \cos \alpha)$  in s tem je omenjeni račun del splošne trigonometrije.<sup>2</sup> Ta račun dosedaj, kolikor mi je znano, ni bil izdelan niti v specialni euklidični, še manj pa v splošni trigonometriji.

Kar velja za simetrične točke, velja dualno tudi za simetrične premice.

### I. Liha in soda baza.

1. Vzemimo si tri poljubne kote  $\alpha, \beta, \gamma$ , katerih vsota  $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$  je torej tudi poljubno število. Iz sinusov in kosinusov teh kotov si tvorimo simetrični količini:

$$(1) \quad s = II \sin \alpha, \quad c = II \cos \alpha,$$

kjer pomeni znak  $II$  produkt kakor poznje  $\Sigma$  vsoto vseh izrazov, ki jih dobimo, če na zapisani izraz izvršimo vse permutacije cikla  $(\alpha\beta\gamma)$ .

S pomočjo  $s$  in  $c$  ter  $\sin \lambda$  in  $\cos \lambda$  že lahko izračunamo nekatere posebne vsote. Lahek račun dá, ker je  $\beta + \gamma = \lambda - \alpha$ :

$$\begin{aligned} & \Sigma \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma = \\ & = \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha (\cos \beta \sin \gamma + \cos \gamma \sin \beta) - \\ & = \cos \alpha [\cos \beta \cos \gamma - \cos (\beta + \gamma)] + \sin \alpha \sin (\beta + \gamma) = \\ & = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Torej:

$$(2) \quad \Sigma \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma = c - \cos \lambda$$

in podobno

$$(3) \quad \Sigma \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = s + \sin \lambda.$$

Namesto  $s$  in  $c$  pa bomo uporabljali tudi še naslednji količini:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma &= c \sin \lambda - s \cos \lambda \\ \zeta &= -c \cos \lambda - s \sin \lambda, \end{aligned}$$

s čimer bomo lahko dali marsikateri formuli enostavnejšo obliko.

Ker je n. pr.

$$\begin{aligned} c - \cos \lambda &= \\ &= \Sigma \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma = \Sigma \cos \alpha [\cos \beta \cos \gamma - \cos (\beta + \gamma)] \\ &= 3c - \cos \lambda \Sigma \cos^2 \alpha - \sin \lambda \Sigma \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

in podobno za (3), najdemo od tod z uporabo (4):

<sup>2</sup> c. d. str. 1274.

$$(5) \quad \begin{aligned} \Sigma \cos^2 a &= 2 - \cos^2 \lambda - 2\zeta, \\ \Sigma \cos a \sin a &= -\sin \lambda \cos \lambda + 2\sigma, \\ \Sigma \sin^2 a &= 1 + \cos \lambda + 2\zeta. \end{aligned}$$

Končno hočemo s črtico zaznamovati količine, ki se našajo na polovične kote:

$$s' = \Pi \sin \frac{a}{2}, \quad c' = \Pi \cos \frac{a}{2}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{2}, \dots$$

Preprost račun dá:

$$(6) \quad s = 8s'c', \quad c = (2c' - \cos \lambda')^2 - (2s' + \sin \lambda')^2.$$

2. Prvo bazo množice  $M$  tvorimo iz simetričnih točk:

$$(7) \quad (\cos a), \quad (\sin a), \quad (\cos \beta \cos \gamma).$$

S tem se naravno izloči iz  $M$  podmnožica  $M_1$  tistih točk, za katere velja:

$$(8) \quad (x) = p(\cos a) + q(\sin a) + r(\cos \beta \cos \gamma),$$

kjer so  $p, q, r$  cele racionalne funkcije količin  $s, c, \sin \lambda$  in  $\cos \lambda$

Determinanta koordinat točk (7) je:

$$\frac{1}{2}f = |\cos a, \sin a, \cos \beta \cos \gamma|.$$

Njena inverzna je:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} (\cos \lambda \cos^2 a + \sin \lambda \cos a \sin a) \sin(\beta - \gamma), \\ (\sin \lambda \cos^2 a - \cos \lambda \cos a \sin a) \sin(\beta - \gamma), \\ -\sin(\beta - \gamma) \end{vmatrix}.$$

Od tod dobimo po lahkem računu:

$$(10) \quad \frac{1}{2}f = -\Sigma \cos \beta \cos \gamma \sin(\beta - \gamma) = \Pi \sin(\beta - \gamma).$$

Iz oblike (9) pa sledi sedaj nova baza:

$$(11) \quad (\cos^2 a), \quad (\cos a \sin a), \quad (\sin^2 a),$$

ki določa podmnožico  $M_2$  tistih simetričnih točk, za katere velja:

$$(12) \quad (x) = p(\cos^2 a) + q(\cos a \sin a) + r(\sin^2 a)$$

kot zgoraj pri (8).

Ako nadomestimo  $a$  z  $a_k = k a, \dots$  ter  $s$  in  $c$  po (1) s  $s_k$  in  $c_k$ , kjer je  $k$  racionalno število, dobimo novo bazo:

$$(\cos a_k), \quad (\sin a_k), \quad (\cos \beta_k \cos \gamma_k),$$

in ustrezno podmnožico  $M_k$ .

Bazo (7) hočem imenovati *liho baza*, baza (11) pa *sodo baza*. Iz poznejših računov bo namreč sledilo, da se dajo točke

$(\sin^{2n-1} a)$ ;  $(\sin^{2n-2} a \cos a)$ , ... izraziti s prvo, točke  $(\sin^{2n} a)$ ,  $(\sin^{2n-1} a \cos a)$ , ... pa z drugo bazo.

3. Baza

$$(13) \quad (\cos a), (\sin a), (1)$$

je soda baza polovičnih kotov:

$$(14) \quad \begin{aligned} (\cos a) &= \left(\cos^2 \frac{a}{2}\right) - \left(\sin^2 \frac{a}{2}\right) \\ (\sin a) &= 2\left(\cos \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2}\right) \\ (1) &= \left(\cos^2 \frac{a}{2}\right) + \left(\sin^2 \frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

V tej bazi si hočemo izraziti obe zgoraj vpeljani bazi. Da izrazimo liho bazo s (13), si najprej izračunamo koeficiente točke:

$$(\sin \beta \sin \gamma) = p(\cos a) + q(\sin a) + r(1).$$

Ker je determinanta koordinat točk (13):

$$f' = 4\Pi \sin \frac{\beta - \gamma}{2},$$

je n. pr.:

$$\begin{aligned} f'p &= \Sigma \sin \beta \sin \gamma (\sin \beta - \sin \gamma) = \\ &= \sin \beta \sin \gamma (\sin \beta - \sin \gamma) + \sin \gamma \sin a (\sin \gamma - \sin a) + \\ &\quad + \sin a \sin \beta (\sin a - \sin \beta) = \\ &= \sin \beta \sin \gamma (\sin \beta - \sin \gamma) - \sin a (\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma) + \\ &\quad + \sin^2 a (\sin \beta - \sin \gamma) = \\ &= -\Pi (\sin \beta - \sin \gamma) = -8\Pi \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \Pi \sin \frac{\beta - \gamma}{2}. \end{aligned}$$

Torej je z uporabo (2), (3) in (4):

$$p = -2\Pi \cos(\beta + \gamma) = -2(c' \cos \lambda' + s' \sin \lambda') = 2\xi'.$$

Nekoliko več računa je potrebno za določitev  $q$ -a:

$$\begin{aligned} f'q &= -\Sigma \sin \beta \sin \gamma (\cos \beta - \cos \gamma) = \\ &= -\sin \beta \sin \gamma (\cos \beta - \cos \gamma) - \sin \gamma \sin a (\cos \gamma - \cos a) - \\ &\quad - \sin a \sin \beta (\cos a - \cos \beta) = \\ &= -\sin \beta \sin \gamma (\cos \beta - \cos \gamma) + \sin a (\sin \beta \cos \beta - \sin \gamma \cos \gamma) - \\ &\quad - \sin a \cos a (\sin \beta - \sin \gamma) = \\ &= 2 \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \left[ \sin \beta \sin \gamma \sin \frac{\beta + \gamma}{2} + \sin a \cos(\beta + \gamma) \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \sin a \cos a \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin(\beta' - \gamma') [4 \sin \beta' \sin \gamma' \cos \beta' \cos \gamma' (\sin \lambda' \cos \alpha' - \cos \lambda' \sin \alpha') + \\
&\quad + 2 \sin \alpha' \cos \alpha' (\cos \beta' \cos \gamma' + \sin \beta' \sin \gamma') \cdot \\
&\quad \cdot (\cos 2\lambda' \cos 2\alpha' + \sin 2\lambda' \sin 2\alpha') - \\
&\quad - 2 \sin \alpha' \cos \alpha' \cos 2\alpha' (\cos \beta' \cos \gamma' - \sin \beta' \sin \gamma')] = \\
&= 4 \sin(\beta' - \gamma') [2 c' \sin \lambda' \sin \beta' \sin \gamma' - 2 s' \cos \lambda' \cos \beta' \cos \gamma' + \\
&\quad + (c' \sin \alpha' + s' \cos \alpha') (\cos 2\lambda' \cos 2\alpha' + \sin 2\lambda' \sin 2\alpha') - \\
&\quad - \cos 2\alpha' (c' \sin \alpha' - s' \cos \alpha')] = \\
&= 8 \sin(\beta' - \gamma') [c' \sin \lambda' (\sin \beta' \sin \gamma' - \sin \lambda' \sin \alpha' \cos 2\alpha' + \\
&\quad + \cos \lambda' \sin \alpha' \sin 2\alpha') - \\
&- s' \cos \lambda' (\cos \beta' \cos \gamma' - \cos \lambda' \cos \alpha' \cos 2\alpha' - \sin \lambda' \cos \alpha' \sin 2\alpha')].
\end{aligned}$$

V koeficientu, n. pr. pri  $c' \sin \lambda'$  transformiramo dalje:

$$\begin{aligned}
\sin \beta' \sin \gamma' &= \sin \beta' \sin \gamma' (\cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha') = \cos^2 \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' + \\
&\quad + \sin^2 \alpha' [\cos \beta' \cos \gamma' - \cos(\beta' + \gamma')] = \cos^2 \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' + \\
&\quad + \sin^2 \alpha' \cos \beta \cos \gamma' - \sin^2 \alpha' (\cos \lambda' \cos \alpha' + \sin \lambda' \sin \alpha'),
\end{aligned}$$

ter najdemo tako:

$$q = -2(c' \sin \lambda' - s' \cos \lambda') = -2\sigma'.$$

Tedaj je:

$$(\sin \beta \sin \gamma) = 2\zeta' (\cos \alpha) - 2\sigma' (\sin \alpha) + r \quad (1)$$

in je:

$$\begin{aligned}
r &= \sin \beta' \sin \gamma' - 2\zeta' \cos \alpha + 2\sigma' \sin \alpha = \\
&= 4 \sin \beta' \sin \gamma' \cos \beta' \cos \gamma' (\cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha') + \\
+ 2 \cos 2\alpha' (c' \cos \lambda' + s' \sin \lambda') + 2 \sin 2\alpha' (c' \sin \lambda' - s' \cos \lambda') &= \\
= 2s' [2 \sin \alpha' (\cos \lambda' \cos \alpha' + \sin \lambda' \sin \alpha' + \sin \beta' \sin \gamma') + \\
&\quad + \sin \lambda' \cos 2\alpha' - \cos \lambda' \sin 2\alpha'] + \\
+ 2c' [2 \cos \alpha' (\cos \beta' \cos \gamma' - \cos \lambda' \cos \alpha' - \sin \lambda' \sin \alpha') + \\
&\quad + \cos \lambda' \cos 2\alpha' + \sin \lambda' \sin 2\alpha'].
\end{aligned}$$

Torej je:

$$\begin{aligned}
r &= 4s'^2 + 4c'^2 + 2(s' \sin \lambda' - c' \cos \lambda') = \\
&= 4\sigma'^2 + 4\zeta'^2 - 2(\sigma' \sin 2\lambda' - \zeta' \cos 2\lambda')
\end{aligned}$$

in

$$(15) \quad (\sin \beta \sin \gamma) = 2\zeta' (\cos \alpha) - 2\sigma' (\sin \alpha) + \\ + [4(\sigma'^2 + \zeta'^2) - 2(\sigma' \sin 2\lambda' - \zeta' \cos 2\lambda')] \quad (1).$$

Za liho bazo je torej:

$$(16) \quad (\cos \beta \cos \gamma) = (2\zeta' + \cos \lambda') (\cos \alpha) + (-2\sigma' + \sin \lambda') (\sin \alpha) + \\ + [4(\sigma'^2 + \zeta'^2) - 2(\sigma' \sin 2\lambda' - \zeta' \cos 2\lambda')] \quad (1).$$

Z istimi metodami se določijo koeficienti v izrazih za sodo bazo:

$$\begin{aligned} (\cos^2 a) &= -2\xi'(\cos a) + (-2\sigma' + \sin 2\lambda')(\sin a) + \\ &\quad + [(1 - 2(\sigma' \sin 2\lambda' - \xi' \cos 2\lambda'))] \quad (1) \\ (\cos a \sin a) &= 2\sigma'(\cos a) - (2\xi' + \cos 2\lambda')(\sin a) + 2\xi' \quad (1) \\ (\sin^2 a) &= 2\xi'(\cos a) + (2\sigma' - \sin 2\lambda')(\sin a) + \\ &\quad + 2(\sigma' \sin 2\lambda' - \xi' \cos 2\lambda') \quad (1). \end{aligned}$$

4. Sedaj pa že lahko delno dokažemo, da je vsaka točka iz  $M$  že vsebovana v določeni podmnožici  $M_l$ , kjer je  $l$  primerno racionalno število. V resnici je n. pr. prva koordinata poljubne simetrične točke izrazljiva v  $\sin a_k$  in  $\cos a_k$  ter simetrična funkcija v  $\beta_k$  in  $\gamma_k$ , torej izrazljiva s  $\sin \beta_k + \sin \gamma_k$ ,  $\cos \beta_k + \cos \gamma_k$ ,  $\sin \beta_k \sin \gamma_k$  in  $\cos \beta_k \cos \gamma_k$ . Z večkratno vpeljavo polovičnih kotov pa lahko dosežemo, da je prva koordinata homogena funkcija v  $\sin a_l$  in  $\cos a_l$  samih.

Tako je n. pr. v:

$$\sin \beta_k + \sin \gamma_k = 2 \sin(\beta'_k + \gamma'_k) \cos(\beta'_k - \gamma'_k)$$

drugi faktor enak  $\sin(\lambda' - \alpha'_k)$ , medtem ko je tretji vsota produktov  $\cos \beta'_k \cos \gamma'_k$  in  $\sin \beta'_k \sin \gamma'_k$ , katere s pomočjo (15) in (16) izrazimo v  $\cos \alpha'_k$  in  $\sin \alpha'_k$ . Istočasno nadomestimo s pomočjo (6)  $s_k$  in  $c_k$  s  $s'_k$  in  $c'_k$ . Prva koordinata poljubne simetrične točke iz  $M$  se da torej zapisati v obliki:

$$x_1 = P \cos a_l + Q \sin a_l + R,$$

kjer so  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  polinomi iste sode stopnje v  $\cos a_l$  in  $\sin a_l$ , katerih koeficienti zavisijo še od  $s_l$  in  $c_l$ .

Če je  $R = 0$  oziroma  $P = Q = 0$ , smo že na cilju. Če pa to ni, tedaj s še enkratno vpeljavo polovičnih kotov in z uporabo (14) dosežemo zahtevano homogenost. Stavek bo v celoti dokazan, če pokažemo, da se poljubna točka oblike  $(\cos^m a)$  ali  $(\sin^m a)$  da izraziti s sodo oziroma liho bazo.

## II. Redukcijske formule.

5. Točke tretje stopnje  $(\cos^3 a)$ ,  $(\cos^2 a \sin a)$ ,  $(\cos a \sin^2 a)$  in  $(\sin^3 a)$  hočemo izraziti z liho bazo in prav tako točke četrte stopnje s sodo bazo. V ta namen si zapišemo navedene točke v obliki:

$$(18) \begin{aligned} \cos^3 \alpha &= (1-p_0) (\cos \alpha) + q_0 (\sin \alpha) + r_0 (\cos \beta \cos \gamma) \\ \cos^2 \alpha \sin \alpha &= p_1 (\cos \alpha) + q_1 (\sin \alpha) + r_1 (\cos \beta \cos \gamma) \\ \cos \alpha \sin^2 \alpha &= p_0 (\cos \alpha) - q_0 (\sin \alpha) - r_0 (\cos \beta \cos \gamma) \\ \sin^3 \alpha &= -p_1 (\cos \alpha) + (1-q_1) (\sin \alpha) - r_1 (\cos \beta \cos \gamma) \end{aligned}$$

Preprost je račun za  $r_0$  in  $r_1$ . Iz (9) in (10) in tretje enačbe v (18) sledi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} f r_0 &= \Sigma \cos \alpha \sin^2 \alpha \sin (\beta - \gamma) = \\ &= \cos \alpha \sin^2 \alpha \sin (\beta - \gamma) + \cos \beta \sin^2 \beta (\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha) + \\ &\quad + \cos \gamma \sin^2 \gamma (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \\ &= \cos \alpha \sin^2 \alpha \sin (\beta - \gamma) + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma (\sin \beta \cos \beta - \sin \gamma \cos \gamma) - \\ &\quad - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma (\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma) = \\ &= \sin (\beta - \gamma) [\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos (\beta + \gamma) - \\ &\quad - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin (\beta + \gamma)] = \\ &= \sin (\beta - \gamma) [\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma (\cos \lambda \cos \alpha + \sin \lambda \sin \alpha) - \\ &\quad - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma (\sin \lambda \cos \alpha - \cos \lambda \sin \alpha)] = \\ &= \sin (\beta - \gamma) [\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos \lambda (\cos^2 \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma) - \\ &\quad - \sin \lambda \sin \alpha \cos \alpha (\cos \lambda \cos \alpha + \sin \lambda \sin \alpha)] = \\ &= -\cos \lambda \cdot II \sin (\beta - \gamma). \end{aligned}$$

Torej je:

$$r_0 = -\cos \lambda$$

in podobno:

$$r_1 = -\sin \lambda.$$

Iz (18) sledita za  $\cos^3 \alpha \sin \alpha$  dva izraza, ki morata biti enaka:

$$\begin{aligned} (1-p_0) \cos \alpha \sin \alpha + q_0 \sin^2 \alpha + r_0 \sin \alpha [\cos (\beta + \gamma) + \sin \beta \sin \gamma] &= \\ = p_1 \cos^2 \alpha + q_1 \cos \alpha \sin \alpha + r_1 c. \end{aligned}$$

Primerjava koeficientov da takoj:

$$\begin{aligned} p_1 - c \sin \lambda - s \cos \lambda &= \sigma \\ q_0 &= -\sigma + \sin \lambda \cos \lambda. \end{aligned}$$

Račun za  $\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$  pa da:

$$\begin{aligned} p_1 \cos \alpha \sin \alpha + q_1 \sin^2 \alpha + r_1 \sin \alpha [\cos (\beta + \gamma) + \sin \beta \sin \gamma] &= \\ = p_0 \cos^2 \alpha - q_0 \cos \alpha \sin \alpha - r_0 c, \end{aligned}$$

iz česar sledi:

$$\begin{aligned} p_0 &= -c \cos \lambda - s \sin \lambda = \zeta \\ q_1 &= -\zeta + \sin^2 \lambda. \end{aligned}$$

Ako pišemo še

$$\mathbf{O} = (\cos a), \quad \mathbf{L} = (\sin a), \quad \mathbf{V} = (\cos \beta \cos \gamma),$$

dobijo iskane formule sledečo obliko:

$$(19) \quad \begin{aligned} (\cos^3 a) &= (1 - \zeta) \mathbf{O} - (\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) \mathbf{L} - \cos \lambda \mathbf{V} \\ (\cos^2 a \sin a) &= \sigma \mathbf{O} + (-\zeta + \sin^2 \lambda) \mathbf{L} - \sin \lambda \mathbf{V} \\ (\cos a \sin^2 a) &= \zeta \mathbf{O} + (\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) \mathbf{L} + \cos \lambda \mathbf{V} \\ (\sin^3 a) &= -\sigma \mathbf{O} + (\zeta + \cos^2 \lambda) \mathbf{L} + \sin \lambda \mathbf{V}. \end{aligned}$$

6. Skoraj brez računa sledijo sedaj linearni izrazi za točke 4. stopnje. Ako zaznamujemo

$$\mathbf{T}_0 = (\cos^2 a), \quad \mathbf{T}_1 = (\cos a \sin a), \quad \mathbf{T}_2 = (\sin^2 a).$$

dobimo:

$$(20) \quad \begin{aligned} (\cos^4 a) &= (1 + s \sin \lambda) \mathbf{T}_0 + (\sin \lambda \cos \lambda - \sigma) \mathbf{T}_1 + c \cos \lambda \mathbf{T}_2 \\ (\cos^3 a \sin a) &= \\ &= -s \cos \lambda \mathbf{T}_0 + (\sin^2 \lambda - \zeta) \mathbf{T}_1 - c \sin \lambda \mathbf{T}_2 \\ (\cos^2 a \sin^2 a) &= \\ &= -s \sin \lambda \mathbf{T}_0 - (\sin \lambda \cos \lambda - \sigma) \mathbf{T}_1 + c \cos \lambda \mathbf{T}_2 \\ (\cos a \sin^3 a) &= s \cos \lambda \mathbf{T}_0 + (\cos^2 \lambda + \zeta) \mathbf{T}_1 + c \sin \lambda \mathbf{T}_2 \\ (\sin^4 a) &= s \sin \lambda \mathbf{T}_0 + (\sin \lambda \cos \lambda - \sigma) \mathbf{T}_1 + (1 - c \cos \lambda) \mathbf{T}_2, \end{aligned}$$

Iz navedenih formul se lahko izpišejo formule za posebna primera  $\lambda = \pi$  in  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ . Prvi da formule za kote navadnega trikotnika, drugi pa za njegove polovične kote.

### III. Rekurentne formule koeficientov

$$v (\sin^{2n-1} a) \text{ in } (\cos^{2n-1} a).$$

7. Iz navedenih formul pa že sledi dokaz, da se dasta točki poljubnih stopenj  $(\sin^m a)$  in  $(\cos^m a)$  izraziti s sodo oziroma liho bazo. Stavek velja za  $m = 3$  in  $4$  in s pomočjo (19) in (20) ter sklepa od  $m$  na  $m + 2$  za poljubne stopnje.

V tej analizi pa gremo lahko še korak dalje. Koeficienti v izrazih za  $(\sin^m a)$  in  $(\cos^m a)$  so zelo preprosto zgrajeni in se dajo izraziti s pomočjo ene same cele racionalne funkcije v  $\zeta, \sigma, \cos \lambda$  in  $\sin \lambda$ , ki zadošča rekurentni enačbi, katero vsaj

v posebnih primerih  $\lambda = \pi$  in  $\frac{\pi}{2}$  lahko popolnoma rešimo. S tem dobimo zaporedji polinomov, ki bi jih lahko imenovali trigonometrične polinome, ako ne bi bil ta izraz že uporabljen pri multiplikacijskih formulah trigonometričnih funkcij. Zategadelj bi primerno imenoval nove polinome *trikotničkove polinome*.

8. V računu koeficientov za  $(\cos^m a)$  in  $(\sin^m a)$  se pa lahko omejimo na  $m = 2n - 1$ , ker slede iz teh oni za  $m = 2n$ , če pomnožimo ustrezajoče koordinate s  $\cos a$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  oziroma  $\sin a$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \gamma$ . Iskane formule je pa treba poiskati samo za eno izmed obeh točk. Substitucija:

$$(21) \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - a, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

transformira namreč en sistem formul v drugi. Pri tem je:

$$(22) \quad \lambda_1 = \frac{\pi - \lambda}{2} = \lambda, \quad \sigma_1 = \sigma, \quad \zeta_1 = -\zeta.$$

V posebnem preide  $\lambda = \pi$  v  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  in obratno.

9. Točko  $(\sin^{2n-1} a)$  si zapišemo v obliki:

$$(\sin^{2n-1} a) = p_n (\cos a) + q_n (\sin a) + r_n (\cos \beta \cos \gamma).$$

Potem je po (19):

$$\begin{aligned} & (\sin^{2n+1} a) = \\ & = p_n [\zeta (\cos a) + (\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) (\sin a) + \cos \lambda (\cos \beta \cos \gamma)] + \\ & + q_n [-\sigma (\cos a) + (\zeta + \cos^2 \lambda) (\sin a) + \sin \lambda (\cos \beta \cos \gamma)] + \\ & + r_n [-c (\cos a) + (\cos \beta \cos \gamma)]. \end{aligned}$$

Torej je, ker je  $c = \sigma \sin \lambda - \zeta \cos \lambda$ ,

$$(23) \quad \begin{aligned} p_{n+1} &= \zeta (p_n + r_n \cos \lambda) - \sigma (q_n + r_n \sin \lambda) \\ q_{n+1} &= (\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) p_n + (\zeta + \cos^2 \lambda) q_n \\ r_{n+1} &= \cos \lambda (p_n + r_n \cos \lambda) + \sin \lambda (q_n + r_n \sin \lambda). \end{aligned}$$

Iz prve in zadnje pa sledi takoj:

$$(24) \quad \begin{aligned} p_{n+1} + r_{n+1} \cos \lambda &= \\ &= (\zeta + \cos^2 \lambda) (p_n + r_n \cos \lambda) - (\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) (q_n + r_n \sin \lambda). \end{aligned}$$

Začetne vrednosti koeficientov  $p$ ,  $q$ ,  $r$  so pa očitno:

$$\begin{aligned} p_1 &= \hat{0}, & q_1 &= i, & r_1 &= 0 \\ p_0 &= -\sigma, & q_0 &= \zeta + \cos^2 \lambda, & r_0 &= \sin \lambda. \end{aligned}$$

Potem pa je:

$$p_1 + r_1 \cos \lambda = 0, \quad p_2 + r_2 \cos \lambda = -(\sigma - \sin \lambda \cos \lambda),$$

kar z rekurentno enačbo (24) kaže, da so vsi  $p_n + r_n \cos \lambda$  deljivi s  $\sigma - \sin \lambda \cos \lambda$  in da torej lahko zapišemo:

$$(25) \quad p_n + r_n \cos \lambda = -(\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) l_n.$$

Iz (25) in (23) sledi sedaj:

$$(26) \quad q_n + r_n \sin \lambda = l_{n+1} - (\zeta + \cos^2 \lambda) l_n$$

in iz zadnje enačbe (23) potem:

$$(27) \quad r_n = l_n \sin \lambda - (\zeta \sin \lambda + \sigma \cos \lambda) l_{n-1}.$$

Enačbi (25) in (26) dasta še:

$$(28) \quad \begin{aligned} p_n &= -\sigma l_n + \cos \lambda (\zeta \sin \lambda + \sigma \cos \lambda) l_{n-1} \\ q_n &= l_{n+1} - (1 + \zeta) l_n + \sin \lambda (\zeta \sin \lambda + \sigma \cos \lambda) l_{n-1}. \end{aligned}$$

Ako vstavimo te vrednosti v srednjo enačbo (23), dobimo za tvorno funkcijo  $l_n$  sledečo rekurentno enačbo:

$$(29) \quad \begin{aligned} &l_{n+2} - (2\zeta + 1 + \cos^2 \lambda) l_{n+1} + \\ &+ (\sigma^2 + \zeta^2 + 2\zeta + \cos^2 \lambda) l_n - (\zeta \sin \lambda + \sigma \cos \lambda)^2 l_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Začetne vrednosti za  $l_n$  so:

$$(30) \quad \begin{aligned} l_0 &= 0, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 2\zeta + (1 + \cos^2 \lambda), \\ l_4 &= [3\zeta^2 + 2\zeta(1 + 2\cos^2 \lambda) + (1 + \cos^2 \lambda + \cos^4 \lambda)] - \sigma^2, \dots \end{aligned}$$

Transformacija (22) da za tvorno funkcijo  $l_n$  točke  $(\cos^{2n-i} a)$  rekurentno enačbo:

$$(31) \quad \begin{aligned} &l_{n+2} - (1 + \sin^2 \lambda - 2\zeta) l_{n+1} + \\ &+ (\sigma^2 + \zeta^2 - 2\zeta + \sin \lambda) l_n - (\zeta \cos \lambda - \sigma \sin \lambda)^2 l_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

#### IV. Trikotnikovi polinomi

10. Enačbi (29) in (31) hočemo rešiti za  $\lambda = \pi$ . Rešitve nam dajo potem koeficiente v formulah za  $(\sin^{2n-1} a)$  in  $(\cos^{2n-1} \frac{a}{2})$  oziroma za  $(\cos^{2n-1} a)$  in  $(\sin^{2n-1} \frac{a}{2})$ . Iz (29) dobimo, ker je  $\zeta = c$ ,  $\sigma = s$ ,

$$l_{n+2} - 2(1+c)l_{n+1} + [s^2 + (1+c)^2]l_n - s^2 l_{n-1} = 0$$

z začetnimi vrednostmi:

$$l_0 = 0, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 2(1+c), \quad l_4 = 3(1+c)^2 - s^2.$$

Iz tega sledi, da je  $l_n$  funkcija v  $s^2$  in  $g = 1 + c$ , ki zadošča naslednji preprostejši enačbi:

$$(32) \quad l_{n+2} - 2gl_{n+1} + (s^2 + g^2)l_n - s^2l_{n-1} = 0.$$

Za  $l_n$  vzamemo torej sledečo obliko:

$$(33) \quad l_n = \sum_0^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \lambda_i^{(n)} s^{2i},$$

kar nam da:

$$(34) \quad \lambda_0^{(n+2)} - 2g\lambda_0^{(n+1)} + g^2\lambda_0^{(n)} = 0$$

$$(35) \quad \lambda_i^{(n+2)} - 2g\lambda_i^{(n+1)} + g^2\lambda_i^{(n)} + \lambda_{i-1}^{(n)} - \lambda_{i-2}^{(n-1)} = 0.$$

Iz (34) sledi takoj:

$$(36) \quad \lambda_0^{(n)} = (n-1)g^{n-2}, \quad n \geq 1.$$

Iz (35) pa lahko izračunamo  $\lambda_i^{(n)}$ , če poznamo  $\lambda_{i-1}^{(n)}$ . Tako si določimo  $\lambda_1^{(n)}$ ,  $\lambda_2^{(n)}$  ter pridemo do splošne formule:

$$(37) \quad \lambda_i^{(n)} = (-1)^i g^{n-3i-2} \sum_0^i \binom{n-1-k}{2i+1} \binom{i}{k} (-1)^k g^{i-k}, \quad n \geq i+1.$$

To dokažemo najhitreje, če vstavimo  $\lambda_i^{(n)}$  iz (37) v (35). Ako opustimo še skupni faktor  $(-1)^i g^{n-3i}$  lahko zapišemo tako dobljeni izraz v obliki:

$$\begin{aligned} & \sum_0^i \binom{i}{k} (-1)^k g^{i-k} \left[ \binom{n+1-k}{2i+1} - 2 \binom{n-k}{2i+1} + \binom{n-1-k}{2i+1} \right] - \\ & - \sum_0^{i-1} \binom{n-1-k}{2i-1} \binom{i-1}{k} (-1)^k g^{i-k} + \sum_0^{i-1} \binom{n-2-k}{2i-1} \binom{i-1}{k} (-1)^k g^{i-1-k}, \end{aligned}$$

oziroma če izračunamo oglati oklepaj:

$$\begin{aligned} & \sum_0^i \binom{n-1-k}{2i-1} \binom{i}{k} (-1)^k g^{i-k} - \sum_0^{i-1} \binom{n-1-k}{2i-1} \binom{i-1}{k} (-1)^k g^{i-k} - \\ & - \sum_1^i \binom{n-1-k}{2i-1} \binom{i-1}{k-1} (-1)^k g^{i-k}. \end{aligned}$$

Zadnji izraz je pa očitno nič.

11. Isti račun hočemo sedaj izvršiti za enačbo (31). Za  $\lambda = \pi$ ,  $g = c$  dobimo rekurentno enačbo:

$$(38) \quad l_{n+2} - (1+2g)l_{n+1} + (s^2 + g^2 + 2g)l_n - g^2l_{n-1} = 0$$

z začetnimi vrednostmi:

$$l_0 = 0, l_1 = 0, l_2 = 1, l_3 = 1 + 2g, l_4 = (1 + 2g + 3g^2) - s^2, \dots$$

Ako pišemo zopet:

$$(39) \quad l_n = \sum_0^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \lambda_i^{(n)} s^{2i},$$

dobimo kot zgoraj za  $\lambda_i^{(n)}$  rekurentni enačbi:

$$(40) \quad \lambda_0^{(n+2)} - (1 + 2g)\lambda_0^{(n+1)} + (g^2 + 2g)\lambda_0^{(n)} - g^2\lambda_0^{(n-1)} = 0$$

$$(41) \quad \lambda_0^{(n+2)} - (1 + 2g)\lambda_i^{(n+1)} + (g^2 + 2g)\lambda_i^{(n)} - g^2\lambda_i^{(n-1)} + \lambda_{i-1}^{(n)} = 0$$

Rešitev enačbe (40) je:

$$(42) \quad \lambda_0^{(n)} = \sum_0^{n-2} (k+1)g^k.$$

S pomočjo (41) si zopet izračunamo  $\lambda_1^{(n)}$ ,  $\lambda_2^{(n)}$  ter najdemo tako splošno obliko:

$$(43) \quad \lambda_i^{(n)} = (-1)^i \sum_0^{n-2-2i} \binom{n-2-i-k}{i} \binom{k+2i+1}{2i+1} g^k.$$

Za dokaz si najprej izračunamo izraz:

$$\begin{aligned} & \lambda_i^{(n+2)} - 2g\lambda_i^{(n+1)} + g^2\lambda_i^{(n)} = \\ & = (-1)^i \left[ \sum_0^{n-2i} \binom{n-i-k}{i} \binom{n+2i+1}{2i+1} g^k - 2 \sum_1^{n-2i} \binom{n-i-k}{i} \binom{k+2i}{2i+1} g^k + \right. \\ & \quad \left. + \sum_2^{n-2i} \binom{n-i-k}{i} \binom{k+2i-1}{2i+1} g^k \right], \end{aligned}$$

za katerega najdemo:

$$(-1)^i \sum_0^{n-2i} \binom{n-i-k}{i} \binom{k+2i-1}{2i-1} g^k.$$

Ako vstavimo to vrednost v enačbo (41) in opustimo skupni faktor  $(-1)^i$ , najdemo takoj:

$$\begin{aligned} & \sum_0^{n-2i} \binom{n-i-k}{i} \binom{k+2i-1}{2i-1} g^k - \sum_0^{n-2i-1} \binom{n-i-k-1}{i} \binom{k+2i-1}{2i-1} g^k - \\ & \quad - \sum_0^{n-2i} \binom{n-i-k-1}{i-1} \binom{k+2i-1}{2i-1} g^k. \end{aligned}$$

Zadnji izraz je pa očitno enak nič.

## II.

### Posebne vrste trikotnikov

#### A. Enakokrakemu nasprotni trikotnik

Med trikotniki imajo poseben pomen enakokraki trikotniki, za katere je količina

$$(1) \quad f = 4\Pi \sin(\beta - \gamma)$$

enaka nič. Kvadrat  $f^2$  se da izraziti s

$$(2) \quad s = \Pi \sin a, \quad c \Pi \cos a.$$

Ako vpeljemo:

$$(3) \quad d = 1 - 8c$$

$$(4) \quad e = 8s^2 + 8c^2 - 20c - 1$$

dobimo karakteristično enačbo:

$$(5) \quad f^2 + e^2 = d.$$

Novе vrste trikotnikov nastanejo, ako namesto  $f = 0$  zahtevamo, da so izpolnjeni drugi preprosti pogoji:  $e = 0$ ,  $e = f$  itd.

Račun relacije (5) je izvršen splošno za poljuben neeuklidični trikotnik, temu sledi njeno tolmačenje v euklidičnem primeru ter študij geometrijskega pomena količine  $e$ . Kolikor mi je znano, količina  $e$  in relacija (5) do sedaj v literaturi nista omenjeni.

1. Ako so  $\alpha, \beta, \gamma$  trije poljubni koti z vsoto  $\lambda$ , je:<sup>1</sup>

$$f = 4 \begin{vmatrix} \cos \alpha, \sin \alpha, \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \beta, \sin \beta, \cos \gamma \cos \alpha \\ \cos \gamma, \sin \gamma, \cos \alpha \cos \beta \end{vmatrix}$$

Potem je:

$$f^2 = 16 \begin{vmatrix} 2 - \cos^2 \lambda & +2(s \sin \lambda + c \cos \lambda), \\ -\sin \lambda \cos \lambda + 2(c \sin \lambda - s \cos \lambda), & 3c, \\ -\sin \lambda \cos \lambda + 2(c \sin \lambda - s \cos \lambda), & 3c \\ 1 + \cos^2 \lambda & -2(s \sin \lambda + c \cos \lambda), & s + \sin \lambda \\ s + \sin \lambda, & c^2 + (s + \sin \lambda)^2 + 2c \cos \lambda \end{vmatrix}.$$

<sup>1</sup> Glej moje delo »Simetrične točke trikotnika«, str. 45.

Iz tega dobimo:

$$\begin{aligned}
 f^2 = & -64(s^2 + c^2)^2 - 192s^3 \sin \lambda - 320s^2 c \cos \lambda + \\
 & + 320sc^2 \sin \lambda + 192c^3 \cos \lambda + \\
 & + 16s^2(1 - 13 \sin^2 \lambda) - 352sc \sin \lambda \cos \lambda + \\
 & + 16c^2(1 - 13 \cos^2 \lambda) + \\
 & + 32s \sin \lambda(1 - 3 \sin^2 \lambda) - 32c \cos \lambda(1 - 3 \cos^2 \lambda) + \\
 & + 16 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda.
 \end{aligned}$$

Če vpeljemo

$$(6) \quad e = 8(s^2 + c^2) - 20(s \sin \lambda - c \cos \lambda) - 1$$

$$(7) \quad d = 1 - 8(s \sin \lambda - c \cos \lambda),$$

dobimo postopoma:

$$\begin{aligned}
 f^2 + e^2 = & 1 + 16 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda + 24[s \sin \lambda(3 - 4 \sin^2 \lambda) - \\
 & - c \cos \lambda(3 - 4 \cos^2 \lambda)] + \\
 (8) \quad & + 192(s^2 \sin \lambda - 6sc \sin \lambda \cos \lambda + c^2 \cos^2 \lambda) - \\
 & - 512(s^3 \sin \lambda - c^3 \cos \lambda), \\
 f^2 + e^2 - d^2 = & 4 \sin 2\lambda [\sin 2\lambda + 12(s \cos \lambda - c \sin \lambda) - \\
 & - 96sc - 64(s^3 \cos \lambda + 3s^2 c \sin \lambda - 3sc^2 \cos \lambda - c^3 \sin \lambda)].
 \end{aligned}$$

Ako vpeljemo še kote  $\frac{\lambda}{3}$ , se da oglati oklepaj razstaviti v produkt treh faktorjev ter dobimo sledeči karakteristični rezultat:

$$(9) \quad d^2 - f^2 - e^2 = 16 \sin 2\lambda \prod \left[ \sin \frac{2(\lambda + 2k\pi)}{3} + 4 \left( s \cos \frac{\lambda + 2k\pi}{3} + c \sin \frac{\lambda + 2k\pi}{3} \right) \right],$$

kjer gre  $\Pi$  čez  $k = 0, 1$  in  $2$ .

Iz te formule sta razvidna specialna primera  $\lambda = \pi$  in  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ . V naslednjem se hočemo omejiti na primer  $\lambda = \pi$ , ki nam da uvodoma navedene enačbe (3), (4) in (5).

2. Da dobimo tolmačenje relacije (5) in geometrijski pomen količine  $e$ , si zapišemo  $e$  v obliki:

$$(10) \quad \begin{aligned}
 e = & 9 \Sigma \cos^2 \beta \cos^2 \gamma - \Sigma \sin^2 \beta \sin^2 \gamma = \\
 = & \Sigma (2 \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) (4 \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha).
 \end{aligned}$$

Točka  $(2 \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha)$  je neskončna točka Eulerjeve premice  $[\sin \alpha \cos \alpha \sin(\beta - \gamma)]$ . Ako je  $e = 0$  sta Eulerjeva premica in premica  $(4 \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha)$  vzporedni. Če pišemo (5) v obliki:

$$(11) \quad f = \sqrt{d^3} \cos \varphi, \quad e = \sqrt{d^3} \sin \varphi,$$

tedaj moremo pričakovati, da bo  $\varphi$  kot med premicama  $(u_1) = [\sin a \cos a \sin(\beta - \gamma)]$  in  $(v_1) = (4 \cos \beta \cos \gamma + \cos a)$ . V resnici sledi to, ako izračunamo kot dveh premic  $(u_1)$  in  $(v_1)$  po formuli:

$$(12) \quad \cos \varphi = \frac{\Sigma(u_1 v_1)}{\sqrt{\Sigma(u_1^2) \cdot \Sigma(v_1^2)}},$$

kjer je

$$\begin{aligned} \Sigma(u_1 v_1) &= \Sigma[u_1 v_1 - (u_2 v_2 + v_2 u_3) \cos a] = \\ &= \Sigma u_1 (v_1 - v_2 \cos \gamma - v_3 \cos \beta). \end{aligned}$$

Lahek račun da:

$$\Sigma(u_1^2) = ds^2, \quad \Sigma(v_1^2) = d^2, \quad \Sigma(u_1 v_1) = -fs.$$

Enakokrakemu trikotniku z  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  je nekako nasproten trikotnik z  $\varphi = 0$ . Kot zgled takega trikotnika vzemimo, da je tudi še pravokoten. Potem je  $c = 0$  in iz (4) je  $s = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \sin a \cos a$  ali  $\sin 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  in  $a = \frac{\pi}{8} = 22^\circ 30'$ .

Drugo posebno vrsto trikotnikov dobimo, če je  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Potem je  $f = e$  oziroma  $2e^2 = d^3$ . Ako je tak trikotnik tudi še pravokoten, najdemo na zgornji način  $\sin 2a = \frac{1}{2} \sqrt{3}$  in  $a = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ .

3. Drugo tolmačenje za  $e$  dobimo, če pišemo  $e$  v obliki:

$$e = 8 \Sigma \sin^2 \beta \sin^2 \gamma - 18 \Sigma \sin^2 a + 27.$$

Ako vpeljemo stranice trikotnika  $a = 2r \sin a, \dots$ , kjer je  $r$  radij trikotniku očrtanega kroga, dobimo takoj:

$$2er^4 = \Sigma b^2 c^2 - 9r^2 \Sigma a^2 + 54r^4.$$

Če je še  $\Sigma a^2 = 3\sigma^2$  in  $\Sigma v_a^2 = 3\tau^2$ , kjer sta  $\sigma$  in  $\tau$  srednja kvadratična stranica in višina, je dalje:

$$3\tau^2 = \Sigma \frac{a^2 v_a^2}{a^2} = \frac{\Sigma p^2}{a^2 b^2 c^2} \Sigma b^2 c^2$$

in

$$\Sigma b^2 c^2 = 12\tau^2 r^2.$$

Torej je:

$$(13) \quad \frac{2}{27} er^2 = \left(r\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\tau\right)^2 - \sigma^2.$$

Ako si narišemo trikotnik s stranicami  $r\sqrt{2}$ ,  $\frac{2}{3}\tau$ ,  $\sigma$  in oklepata prvi dve kot  $\theta$ , je

$$(14) \quad e = 18\sqrt{2} \frac{\tau}{r} \cos \theta.$$

Ako je  $e = 0$ , je omenjeni trikotnik pravokoten in je:

$$(15) \quad \sigma^2 = \left(\frac{2}{3}\tau\right)^2 + (r\sqrt{2})^2.$$

### B. O sorodnih trikotnikih

Dva trikotnika sta podobna, če imata isto obliko, sicer pa poljubno velikost. V navadni rabi izraza »podoben« je pa s tem pojmom združena stopnja, ker često govorimo o večji ali manjši podobnosti: osebi  $A$  in  $B$  sta n. pr. *zelo podobni* ali samo *podobni* in končno *malo podobni*. Pri podobnih trikotnikih je podobnost maksimalna, ker to že zahteva enakost oblike. V tej zvezi pa se hočemo vprašati, kdaj sta dva trikotnika tudi manj podobna. Ali n. pr. lahko govorimo o nekakšni podobnosti dveh enakokrakih trikotnikov ali dveh pravokotnih trikotnikov. Podroben študij tega vprašanja, ki ga podam v tem odstavku, da trdilen odgovor za enakokrake in nikalnega za pravokotne trikotnike. Tako dobljeno popolnoma določeno manjšo podobnost hočem imenovati *sorodnost*.

1. Podlaga te raziskave je Kiepertova<sup>2</sup> konstrukcija k danemu trikotniku prirejenih trikotnikov. Nad vsako stranico osnovnega trikotnika  $ABC$  si narišemo navznoter ali navzven podobne enakokrake trikotnike  $A_1BC$  in  $A_2BC$ ;  $B_1CA$  in  $B_2CA$  ter  $C_1AB$  in  $C_2AB$ . Trikotnika  $A_1B_1C_1$  ali  $A_2B_2C_2$  sta Kiepertova trikotnika. Trikotnika  $A_iB_iC_i$ ,  $i = 1, 2$  in  $ABC$  imajo skupno težišče  $T$ , iz česar sledi sledeča konstrukcija teh trikotnikov: V simetrali stranice  $BC$  si izberemo točko  $A'$ , jo zvezemo s težiščem  $T$  ter zveznico podaljšamo za  $\frac{1}{2}AT = TA'$ . Skozi  $A'$  načrtamo daljico  $B_1C_1$ , tako da ležita  $B_1$  in  $C_1$  na ustrežajočih simetralah stranic  $CA$  in  $AB$  in da  $A'$  razpolavlja  $B_1C_1$ .

Ako je  $\varepsilon$  kot ob osnovnici podobnih enakokrakih trikotnikov in je  $\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda$ , so trikotniške koordinate ogljišč Kiepertovega trikotnika:

<sup>2</sup> G. Berkham-W. Fr. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. — Enzycl. d. math. Wiss. zv. III., 1. 2., str. 1269.

$$(1) \quad \begin{aligned} A_1 &: \quad \frac{a}{2} \lambda, & \frac{a}{2} (\sin \gamma - \lambda \cos \gamma), & \frac{a}{2} (\sin \beta - \lambda \cos \beta), \\ B_1 &: \frac{b}{2} (\sin \gamma - \lambda \cos \gamma), & \frac{b}{2} \lambda, & \frac{b}{2} (\sin \alpha - \lambda \cos \alpha), \\ C_1 &: \frac{c}{2} (\sin \beta - \lambda \cos \beta), & \frac{c}{2} (\sin \alpha - \lambda \cos \alpha), & \frac{c}{2} \lambda. \end{aligned}$$

Napisane koordinate so, kakor se lahko prepričamo, obenem distance poedinih točk od posameznih stranic osnovnega trikotnika. Iz (1) se lahko ugotove zgoraj navedene lastnosti Kieperovih trikotnikov.

2. Dolžino  $a_1$  stranice  $B_1C_1$  dobimo najhitreje, če uporabimo za hip pravokotni koordinatni sistem  $O\xi\eta$ , ki leži v ravnini trikotnika  $ABC$ , tako da pade  $O$  v točko  $B$  in  $O\xi$  v  $BC$ . Potem so koordinate točk  $B_1$  in  $C_1$ :

$$\xi_1 = \frac{b}{2 \sin \beta} (\sin \alpha - \lambda \cos \alpha) + \frac{b}{2} (\sin \gamma - \lambda \cos \gamma) \cot \beta = \\ = r[(\sin \alpha + \cos \beta \sin \gamma) - \lambda \sin \beta \sin \gamma],$$

$$\eta_1 = r \sin \beta (\sin \gamma - \lambda \cos \gamma),$$

$$\xi_2 = r(\cos \beta \sin \gamma + \lambda \sin \beta \sin \gamma), \quad \eta_2 = r \sin \gamma (\sin \beta - \lambda \cos \beta),$$

kjer je  $r$  radij trikotniku  $ABC$  očrtanega kroga. Lahek račun da:

$$a_1^2 = r^2[(1 - 3\lambda^2) \sin^2 \alpha - 4s\lambda + 4(1 + c)\lambda^2].$$

Ako vpeljemo še Brocardov kot  $\omega$ :

$$\cot \omega = \frac{1+c}{s},$$

dobimo:

$$(2) \quad a_1^2 = \frac{1}{4}(1 - 3\lambda^2)a^2 + 2p\lambda(\lambda \cot \omega - 1),$$

kjer je  $p = 2r^2 s$  ploščina pravokotnega trikotnika. Iz zadnje enačbe sledi tudi:

$$(3) \quad \Sigma a_1^2 = \frac{1}{4}(1 - 3\lambda^2)\Sigma a^2 + 6p\lambda(\lambda \cot \omega - 1).$$

V vsakem trikotniku pa je:

$$(4) \quad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 4p \cot \omega \\ -a^2 + b^2 + c^2 &= 4p \cot \alpha. \end{aligned}$$

Od tod pa že sledi:

$$(5) \quad \frac{\cot \alpha_1}{\cot \omega_1} = \frac{(1 - 3\lambda^2) \cot \alpha + 2\lambda(\lambda \cot \omega - 1)}{(1 + 3\lambda^2) \cot \omega - 6\lambda}.$$

Lahek račun da ploščino  $p_1$  trikotnika  $A_1B_1C_1$ . Ker je

$$p_1 = A_1B_1C_1 = OB_1C_1 + OC_1A_1 + OA_1B_1,$$

kjer je  $O$  središče trikotniku  $ABC$  očrtanega kroga, zadošča, če izračunamo ploščino  $OB_1C_1$ :

$$\begin{aligned} OB_1C_1 &= \frac{1}{2} \overline{OB_1} \cdot \overline{OC_1} \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left( r \cos \beta - \lambda \frac{b}{2} \right) \left( r \cos \gamma - \lambda \frac{c}{2} \right) \sin \alpha = \\ &= \frac{n}{4} \left[ \cotg \beta \cos \gamma - \lambda (\cotg \beta + \cotg \gamma) + \lambda^2 \right]. \end{aligned}$$

Torej je:

$$(6) \quad p_1 = \frac{n}{4} (1 - 2\lambda \cotg \omega + 3\lambda^2).$$

Sedaj pa lahko razcepimo (5) v dve enačbi:

$$(7) \quad \cotg \alpha_1 = \frac{(1 - 3\lambda^2) \cotg \alpha + 2\lambda (\lambda \cotg \omega - 1)}{(1 + 3\lambda^2) - 2\lambda \cotg \omega},$$

in

$$(8) \quad \cotg \omega_1 = \frac{(1 + 3\lambda^2) \cotg \omega - 6\lambda}{-2\lambda \cotg \omega + (1 + 3\lambda^2)}.$$

3. Analitična diskusija transformacij (7) in (8) da za  $\lambda \cotg \omega - 1 = 0$  prvi Brocardov trikotnik in za

$$(1 + 3\lambda^2) - 2\lambda \cotg \omega = 0$$

obe Steinerjevi osi. Nas pa tu bolj zanima prvotna enačba (2). Iz nje sledi očitno:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_1^2 & a^2 & 1 \\ b_1^2 & b^2 & 1 \\ c_1^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

kar nam da iskano definicijo sorodnosti dveh trikotnikov: *Dva trikotnika sta sorodna, ako je determinanta (9) enaka nič.*

Iz (9) sledi najprej, da sta dva trikotnika, ki sta podobna, tudi sorodna. Dalje, da sta dva poljubna enakokraka trikotnika sorodna. Končno si oglejmo še pogoj, kdaj sta dva pravokotna trikotnika sorodna. Iz (9) dobimo, če vstavimo  $c^2 = a^2 + b^2$ ,  $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$ , da je  $a^2 b_1^2 - b^2 a_1^2 = 0$ , t. j. oba trikotnika sta podobna. Iz (9) končno še sledi, da je poljuben trikotnik soroden enakostraničnemu trikotniku, kar znova pokaže osrednjo izjemnost enakostraničnega trikotnika.

4. Substitucija (8) je izprijena, če je  $1 - 3\lambda^2 = 0$ . Iz (2) sledi potem, da sta ustrezajoča Kiepertova trikotnika enakostranična. Ker je  $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \operatorname{tg} 30^\circ$ , nastane sledeča že znana slika: Ako narišemo nad vsako stranico danega trikotnika navzven ali navznoter enakokrake trikotnike s kotom  $\varepsilon = 30^\circ$ ,

tvorijo vrhovi teh trikotnikov dva enakostranična trikotnika  $A_1B_1C_1$  in  $A_2B_2C_2$ . Iz (2) sledi za stranici  $a_1$  in  $a_2$  trikotnika  $A_1B_1C_1$  in  $A_2B_2C_2$ :

$$(10) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{3}p(\cotg \omega - \sqrt{3}), \\ a_2 &= \frac{2}{3}p(\cotg \omega + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Razmerje stranic:

$$(11) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sqrt{\cotg \omega - \sqrt{3}}}{\sqrt{\cotg \omega + \sqrt{3}}}$$

zavisi samo od Brocardovega kota prvotnega trikotnika. Od tod pa sledi sledeča konstrukcija *istobrocardovskih trikotnikov*:

Mislimo si dva poljubna enakostranična trikotnika  $A_1B_1C_1$  in  $A_2B_2C_2$ , tako da sovpadeta težišči ter vrtimo en trikotnik okoli skupnega težišča. Trikotniki, ki jih tvorijo simetrale daljic  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  in  $C_1C_2$ , imajo isti Brocardov kot.

5. Iz gornje konstrukcije istobrocardovskih trikotnikov pa sledi, da pripada kotu, za katerega je en enakostranični trikotnik zavrtjen proti drugemu, poseben pomen. Da tega določimo, si iz (8) izračunamo vrednost  $\cotg^2 \omega_1 - 3$ :

$$\cotg^2 \omega_1 - 3 = \frac{(1 - 3\lambda^2)(\cotg^2 \omega - 3)}{[1 + 3\lambda^2 - 2\lambda \cotg \omega]^2}.$$

S primernim predznakom je torej:

$$(12) \quad \sqrt{\cotg^2 \omega_1 - 3} = \frac{(1 - 3\lambda^2) \sqrt{\cotg^2 \omega - 3}}{(1 + 3\lambda^2) - 2\lambda \cotg \omega}$$

Po drugi strani si izračunamo iz (7) in (8) vrednost  $3 \cotg a_1 - \cotg \omega_1$ :

$$3 \cotg a_1 - \cotg \omega_1 = \frac{(1 - 3\lambda^2)(3 \cotg a - \cotg \omega)}{(1 + 3\lambda^2) - 2\lambda \cotg \omega}.$$

Ako delimo zadnjo enačbo še z (12), dobimo končno:

$$(13) \quad \frac{3 \cotg a_1 - \cotg \omega_1}{2 \sqrt{\cotg^2 \omega_1 - 3}} = \pm \frac{3 \cotg a - \cotg \omega}{2 \sqrt{\cotg^2 \omega - 3}} = \pm e_1, \dots$$

Predznak, ki je v vseh treh enačbah isti, je pozitiven za  $\lambda = 0$ , in se spremeni vsakokrat, ko gre  $\lambda$  skozi koren enačbe  $1 - 3\lambda^2 = 0$ , t. j. kadar postane Kiepertov trikotnik enakostraničen. Pomen količin  $e_i$  dobimo, če poiščemo enačbo, kateri te zadoščajo. Iz (13) sledi

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = \frac{3}{4}.$$

Ce pišemo še  $e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3$ , je iskana enačba:

$$4x^3 - 3x - g_3 = 0.$$

Ako vzamemo  $g_3$  v obliki:

$$g_3 = \cos 3\psi,$$

so

$$(14) \quad e_1 = \cos \psi, \quad e_2 = \cos\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right), \quad e_3 = \cos\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Lahek račun da, da je  $\psi$  kot med  $TA_1$  in  $TA_2$ . V resnici je

$$TA_1 = \frac{a_1}{\sqrt{3}}, \quad TA_2 = \frac{a_2}{\sqrt{3}}, \quad A_1 A_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad a^2 = 2p(\cotg \omega - \cotg a)$$

in je torej  $\psi$  kot med  $TA_1$  in  $TA_2$ :

$$\cos \psi = \frac{TA_1^2 + TA_2^2 - A_1 A_2^2}{2 TA_1 \cdot TA_2} = \frac{3 \cotg a - \cotg \omega}{2 \sqrt{\cotg^2 \omega - 3}}$$

Ako imenujemo  $\psi$  *zavrtni kot* danega trikotnika, sledi iz (13):

*Dva trikotnika sta sorodna, ako sta pripadajoča zavrtna kota enaka ali suplementarna.*

Enačbo (13) moremo zapisati tudi v sledeči karakteristični obliki:

$$\begin{aligned} \cotg a &= \frac{1}{3} \left[ \cotg \omega + 2 \sqrt{\cotg^2 \omega - 3} \cos \psi \right] \\ \cotg \beta &= \frac{1}{3} \left[ \cotg \omega + 2 \sqrt{\cotg^2 \omega - 3} \cos\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ \cotg \gamma &= \frac{1}{3} \left[ \cotg \omega + 2 \sqrt{\cotg^2 \omega - 3} \cos\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

6. Iz gornjega pa sledijo nove neenačbe za stranice in višine danega trikotnika. Kot  $\psi$  iz enačb (14) je, ker ga lahko dobimo z geometrično konstrukcijo, pri realnih trikotnikih realen, potem pa morajo biti  $e_i$  absolutno manjši od 1. Kvadrat količine  $e_1$  je torej manjši ali enak 1 ali

$$(3 \cotg a - \cotg \omega)^2 \leq 4(\cotg^2 \omega - 3)$$

oziroma

$$(\cotg \omega + 3 \cotg a)(\cotg \omega - \cotg a) \geq 4.$$

Ako izrazimo z uporabo (4)  $\cotg a$  in  $\cotg \omega$  s stranicami danega trikotnika, je dalje

$$a^2 [2(b^2 + c^2) - a^2] \geq 16p^2$$

ali, ker je  $2p = av_a$ ,

$$(16) \quad 2(b^2 + c^2) \geq a^2 + (2v_a)^2.$$

Torej:

*V vsakem trikotniku je dvojna vsota kvadratov dveh stranic večja ali enaka vsoti kvadratov tretje stranice in dvojne pripadajoče višine.*

Iz enakosti (16) sledi nazaj  $e_1^2 = 1$  oziroma  $\varphi = 0$  ali  $\pi$ , v danem trikotniku je  $b = c$ .

Vsota enačb (16), zapisanih za vse tri kombinacije stranic, pa da dalje:

$$3 \sum a^2 \geq 4 \sum v_a^2.$$

Ako uporabimo srednjo kvadratično stranico in višino:

$$3\sigma^2 = \sum a^2, \quad 3\tau^2 = \sum v_a^2,$$

dobimo pa:

$$\tau \leq \frac{\sigma\sqrt{3}}{2},$$

*t. j. srednja kvadratična višina poljubnega trikotnika je manjša ali enaka višini enakostraničnega trikotnika, čigar stranica je srednja kvadratična stranica.*

## Résumé

### Contributions à la géométrie du triangle

#### I

#### Points triangulaires symétriques

On appelle les *points remarquables* d'un triangle aussi points symétriques<sup>1</sup> parce que les coordonnées triangulaires de tels points passent l'une à l'autre par une permutation cyclique des sommets. Dans le développement de la géométrie du triangle le nombre de ces points va toujours en croissant et par là aussi la nécessité d'un traitement systématique. Cette étude est une contribution à ce problème.

L'ensemble  $M$  de tous les points symétriques possède la propriété fondamentale d'admettre des systèmes de base de trois points particuliers dont les autres dépendent linéairement. Cela nous donne la définition suivante du point symétrique, définition plus précise et plus restreinte à la fois, :

*Un point dans le plan d'un triangle s'appelle point symétrique de ce triangle si ses coordonnées  $x_1:x_2:x_3$  sont fonctions rationnelles entières des sinus et cosinus des angles correspondants multipliés par un nombre rationnel  $k$  et si elles sont aussi des telles fonctions, mais symétriques par rapport aux deux angles restants:*

$$\begin{aligned} x_1 = f(k\alpha; k\beta, k\gamma) = f(k\alpha; k\gamma, k\beta), \quad x_2 = f(k\beta; k\gamma, k\alpha), \\ x_3 = f(k\gamma; k\alpha, k\beta). \end{aligned}$$

Les coefficients de la fonction  $f$  peuvent être des nombres d'un domaine de rationalité déterminé.

Le calcul des systèmes de base appartient à la théorie des théorèmes d'addition, multiplication et division des fonctions trigonométriques pour un triple d'angles  $\alpha, \beta, \gamma$  arbitraire.

Mais, on peut regarder ces angles comme angles intérieurs d'un triangle dans le plan du tenseur  $\Sigma (u_1^2 - 2u_2u_3 \cos \alpha)$ . Ainsi, la théorie développée dans cette étude, est une partie de la trigonométrie générale<sup>2</sup> et ne se rencontre guère dans la littéra-

<sup>1</sup> G. Berkham — W. Fr. Meyer: Neuere Dreiecks geometrie. — Enzycl. d. math. Wiss. III. 1.2 — p. 1184.

<sup>2</sup> V. Fo. cite p. 1274.

ture jusqu'à présent pas même pour le cas spécial des triangles euclidiens.

Il va sans dire qu'on peut traiter de la même manière les droites remarquables ou symétriques.

### I. Base paire et base impaire

1. Pour trois angles quelconques  $\alpha, \beta, \gamma$  avec  $\alpha + \beta + \gamma = \lambda$  on forme les expressions connues:

$$s = H \sin \alpha, \quad c = H \cos \alpha,$$

où le signe  $H$  signifie le produit, comme plus bas  $\Sigma$  la somme de toutes les expressions qu'on obtient si l'on soumet l'expression après le signe à toutes les permutations du cycle  $(\alpha \beta \gamma)$ .

A l'aide de  $s, c, \cos \lambda$  et  $\sin \lambda$  on peut de suite calculer quelques expressions simples. On obtient:

$$(2) \quad \begin{aligned} \Sigma \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma &= c - \cos \lambda, \\ \Sigma \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma &= s + \sin \lambda. \end{aligned}$$

Pour simplifier quelques formules nous avons encore besoin de deux expressions suivantes:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sigma &= c \sin \lambda - s \cos \lambda \\ \xi &= -c \cos \lambda - s \sin \lambda. \end{aligned}$$

De (2) il s'ensuit après:

$$(4) \quad \begin{aligned} \Sigma \cos^2 \alpha &= 2 - \cos^2 \lambda - 2\xi, \\ \Sigma \cos \alpha \sin \alpha &= -\sin \lambda \cos \lambda + 2\sigma, \\ \Sigma \sin^2 \alpha &= 1 + \cos^2 \lambda + 2\xi. \end{aligned}$$

2. Nous formons la première base de l'ensemble  $M$  de tous les points symétriques avec les points:

$$(5) \quad (\cos \alpha), \quad (\sin \alpha), \quad (\cos \beta \cos \gamma).$$

Par rapport à cette base on extrait de  $M$  le sousensemble  $M_1$  de ceux points pour lesquels les coefficients dans l'expression suivante:

$$(x) = p(\cos \alpha) + q(\sin \alpha) + r(\cos \beta \cos \gamma)$$

sont fonctions rationnelles entières de  $s, c, \cos \lambda$  et  $\sin \lambda$ .

Les déterminant formé des coordonnées (5), écrit d'une manière claire, est:

$$(6) \quad \frac{1}{4}f = |\cos \alpha, \quad \sin \alpha, \quad \cos \beta \cos \gamma| = H \sin(\beta - \gamma).$$

Son déterminant inverse est:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} (\cos \lambda \cos^2 a + \sin \lambda \cos a \sin a) \sin(\beta - \gamma), \\ (\sin \lambda \cos^2 a - \cos \lambda \cos a \sin a) \sin(\beta - \gamma), -\sin(\beta - \gamma) \end{vmatrix}.$$

De (7) nous obtenons sans peine la nouvelle base:

$$(8) \quad (\cos^2 a), (\cos a \sin a), (\sin^2 a),$$

qui détermine, comme plus haut, le sousensemble  $M_2$  de ceux points de  $M$  pour lesquels les coefficients de l'expression:

$$(x) = p(\cos^2 a) + q(\cos a \sin a) + r(\sin^2 a)$$

sont de même entiers rationnels en  $s$ ,  $c$ ,  $\cos \lambda$  et  $\sin \lambda$ .

Si nous écrivons  $\alpha_k = k a$ , . . .  $\lambda_k = k \lambda$  et si nous définissons  $s_k$  et  $c_k$  selon (1), où  $k$  signifie un nombre rationnel donné, nous obtenons la base:

$$(\cos a_k), (\sin a_k), (\cos \beta_k \cos \gamma_k),$$

à laquelle correspond le sousensemble  $M_k$ .

J'appelle (5) *la base impaire*, celle de (8) *la base paire*. Car il s'ensuivra des calculs ultérieurs que les points de la forme

$$(\cos^{2n-1} a), (\cos^{2n-2} a \sin a), \dots$$

appartiennent au sousensemble  $M_1$ , tandis que les points

$$(\cos^{2n} a), (\cos^{2n-1} a \sin a), \dots$$

appartiennent à  $M_2$ .

Maintenant nous pouvons déterminer plus précisément la structure de  $M$ . Nous démontrons *que chaque point de  $M$  est contenu dans un  $M_l$  déterminé où  $l$  est un nombre rationnel convenablement choisi*. Nous réduisons la démonstration de la proposition donnée à celle de la proposition suivante, qui est plus simple: *Les points de la forme  $(\cos^m a)$  ou  $(\sin^m a)$  appartiennent au sousensemble  $M_1$  ou  $M_2$  selon que le nombre entier  $m$  est pair ou impair*.

## II. Formules de réduction

Nous pouvons représenter les points du 3<sup>ème</sup> ordre  $(\cos^3 a)$ ,  $(\cos^2 a \sin a)$ ,  $(\cos a \sin^2 a)$  et  $(\sin^3 a)$  par la base impaire et semblablement, les points du 4<sup>ème</sup> ordre par la base paire:

$$(9) \quad \begin{aligned} (\cos^3 a) &= (1 - \zeta) \mathbf{O} - (\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) \mathbf{L} - \cos \lambda \mathbf{V} \\ (\cos^2 a \sin a) &= \sigma \mathbf{O} + (-\zeta + \sin^2 \lambda) \mathbf{L} - \sin \lambda \mathbf{V} \\ (\cos a \sin^2 a) &= \zeta \mathbf{O} + (\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) \mathbf{L} + \cos \lambda \mathbf{V} \\ (\sin^3 a) &= -\sigma \mathbf{O} + (\zeta + \cos^2 \lambda) \mathbf{L} + \sin \lambda \mathbf{V}. \end{aligned}$$

où nous avons mis:

$$\mathbf{O} = (\cos a), \quad \mathbf{L} = (\sin a), \quad \mathbf{V} = (\cos \beta \cos \gamma).$$

Il s'en ensuivent presque sans calcul les expressions des points du 4<sup>ème</sup> ordre:

$$(10) \quad \begin{aligned} (\cos^4 a) &= (1 + s \sin \lambda) \mathbf{T}_0 + (\sin \lambda \cos \lambda - \sigma) \mathbf{T}_1 + c \cos \lambda \mathbf{T}_2 \\ (\cos^3 a \sin a) &= \\ &= -s \cos \lambda \mathbf{T}_0 + (\sin^2 \lambda - \zeta) \mathbf{T}_1 - c \sin \lambda \mathbf{T}_2 \\ (\cos^2 a \sin^2 a) &= \\ &= -s \sin \lambda \mathbf{T}_0 - (\sin \lambda \cos \lambda - \sigma) \mathbf{T}_1 + c \cos \lambda \mathbf{T}_2 \\ (\cos a \sin^3 a) &= s \cos \lambda \mathbf{T}_0 + (\cos^2 \lambda + \zeta) \mathbf{T}_1 + c \sin \lambda \mathbf{T}_2 \\ (\sin^4 a) &= s \sin \lambda \mathbf{T}_0 + (\sin \lambda \cos \lambda - \sigma) \mathbf{T}_1 + (1 - c \cos \lambda) \mathbf{T}_2, \end{aligned}$$

où signifient

$$\mathbf{T}_0 = (\cos^2 a), \quad \mathbf{T}_1 = (\cos a \sin a), \quad \mathbf{T}_2 = (\sin^2 a).$$

De ces formules s'ensuivent naturellement les expressions pour les deux cas spéciaux  $\lambda = \pi$  et  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ . Dans le premier cas nous obtenons les formules de réduction pour les angles d'un triangle euclidien, dans le second celles pour ses demi-angles.

### III. Formules récurrentes pour les coefficients des représentations de $(\sin^{2n-1} a)$ et $(\cos^{2n-1} a)$ .

Il est facile de déduire des formules citées la démonstration de la proposition que les points de la forme  $(\cos^n a)$  où  $(\sin^n a)$  appartiennent aux sousensembles  $M_1$  ou  $M_2$ . La proposition est vraie évidemment pour  $m = 1, 3$  et  $m = 2, 4$  et par (9) et (10) et par la conclusion de  $m$  à  $m + 2$  pour degrés arbitraires.

Dans cette analyse nous voulons faire encore un pas en avant. Les coefficients des représentations de  $(\cos^m a)$  et  $(\sin^m a)$  sont formés d'une façon simple et on peut les exprimer

par une seule fonction de  $\zeta$ ,  $\sigma$ ,  $\cos \lambda$  et  $\sin \lambda$ . Cette fonction satisfait à une équation récurrente, que l'on peut résoudre complètement au moins dans les cas spéciaux  $\lambda = \pi$  et  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi il s'en ensuivent deux suites de polynômes nouveaux que j'appelle les *polynômes triangulaires*.

Dans le calcul des coefficients de  $(\cos^m a)$  et  $(\sin^m a)$  nous nous pouvons borner à  $m = 2n - 1$ ; il suffit de même de déterminer le système de formules cherché pour un seul de deux points. La substitution:

$$(11) \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

transforme l'un de deux systèmes dans l'autre. On a:

$$(12) \quad \lambda_1 = \frac{3\pi}{2} - \lambda, \quad \sigma_1 = \sigma, \quad \zeta_1 = -\zeta.$$

Les deux cas spéciaux  $\lambda = \pi$  et  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  se correspondent mutuellement.

Ecrivons le point  $(\sin^{2n-1} a)$  dans la forme:

$$(\sin^{2n-1} a) = p_n (\cos a) + q_n (\sin a) + r_n (\cos \beta \cos \gamma).$$

Pour les coefficients  $p_n$ ,  $q_n$ ,  $r_n$  nous obtenons les formules récurrentes suivantes:

$$(13) \quad \begin{aligned} p_{n+1} &= \zeta (p_n + r_n \cos \lambda) - \sigma (q_n + r_n \sin \lambda) \\ q_{n+1} &= (\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) p_n + (\zeta + \cos^2 \lambda) q_n \\ r_{n+1} &= \cos \lambda (p_n + r_n \cos \lambda) + \sin \lambda (q_n + r_n \sin \lambda). \end{aligned}$$

Si nous écrivons:

$$p_n + r_n \cos \lambda = -(\sigma - \sin \lambda \cos \lambda) l_n,$$

nous obtenons:

$$(14) \quad \begin{aligned} r_n &= l_n \sin \lambda - (\zeta \sin \lambda + \sigma \cos \lambda) l_{n-1} \\ p_n &= -\sigma l_n + \cos \lambda (\zeta \sin \lambda + \sigma \cos \lambda) l_{n-1} \\ q_n &= l_{n+1} - (1 + \zeta) l_n + \sin \lambda (\zeta \sin \lambda + \sigma \cos \lambda) l_{n-1}. \end{aligned}$$

En substituant les dernières valeurs dans la deuxième équation de (13) nous obtenons, pour la fonction génératrice  $l_n$ , l'équation récurrente suivante:

$$(15) \quad \begin{aligned} & l_{n+2} - (2\zeta + 1 + \cos^2 \lambda) l_{n+1} + \\ & + (\sigma^2 + \zeta^2 + 2\zeta + \cos^2 \lambda) l_n - (\zeta \sin \lambda + \sigma \cos \lambda)^2 l_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Les valeurs initiales de  $l_n$  sont:

$$(16) \quad \begin{aligned} l_0 &= 0, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 2\zeta + (1 + \cos^2 \lambda), \\ l_4 &= [3\zeta^2 + 2\zeta(1 + 2\cos^2 \lambda) + (1 + \cos^2 \lambda + \cos^4 \lambda)] - \sigma^2, \dots \end{aligned}$$

La transformation (11) donne pour la fonction génératrice des coefficients de  $(\cos^{2n-1} \alpha)$  l'équation récurrente:

$$(17) \quad \begin{aligned} l_{n+2} - (1 + \sin^2 \lambda - 2\zeta) l_{n+1} + \\ + (\sigma^2 + \zeta^2 - 2\zeta + \sin^2 \lambda) l_n - (\zeta \cos \lambda - \sigma \sin \lambda)^2 l_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

#### IV. Polynomes triangulaires

Résolvons les équations (15) et (17) pour  $\lambda = \pi$ . A cause de  $\zeta = c$ ,  $\sigma = s$  il s'ensuit de (15):

$$l_{n+2} - 2(1+c)l_{n+1} + [s^2 + (1+c)^2]l_n - s^2 l_{n-1} = 0$$

avec les valeurs initiales:

$$l_0 = 0, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 2(1+c), \quad l_4 = 3(1+c)^2 - s^2.$$

Donc, la fonction  $l_n$  dépend seulement de  $g = 1+c$  et  $s^2$ .

Nous lui donnons la forme:

$$(18) \quad l_n = \sum_0^{\left[ \frac{n-2}{2} \right]} \lambda_i^{(n)} s^{2i},$$

qui conduit à l'expression suivante des  $\lambda$ :

$$(19) \quad \lambda_i^{(n)} = (-1)^i g^{n-2i-2} \sum_0^i \binom{n-1-k}{2i+1} \binom{i}{k} (-1)^k g^{i-k}, \quad n \geq i+1.$$

Nous répétons le même calcul pour l'équation (17) où nous mettons  $\lambda = \pi$ .

Si nous écrivons encore:

$$(20) \quad l_n = \sum_0^{\left[ \frac{n-2}{2} \right]} \lambda_i^{(n)} s^{2i},$$

nous trouvons pour  $\lambda_i^{(n)}$  les expressions suivantes:

$$(21) \quad \lambda_i^{(n)} = (-1)^i \sum_0^{n-2-2i} \binom{n-2-i-k}{i} \binom{k+2i+1}{2i+1} g^k.$$

## II.

### Nouvelles espèces particulières de triangles

#### A. L'opposé du triangle isoscèle

Il y a une espèce particulière de triangles, à savoir les triangles isoscèles pour lesquels la quantité:

$$(1) \quad f = 4H \sin(\alpha - \gamma)$$

disparaît. On peut calculer le carré  $f^2$  par les expressions connues:

$$(2) \quad s = H \sin \alpha, \quad c = H \cos \alpha.$$

En mettant:

$$(3) \quad d = 1 - 8c$$

$$(4) \quad e = 8s^2 + 8c^2 - 20c - 1,$$

nous obtenons la relation remarquable:

$$(5) \quad e^2 + f^2 = d^3.$$

Il résultent de-là des espèces nouvelles de triangles si, au lieu de  $f = 0$ , nous demandons d'autres conditions simples:  $e = 0$ ,  $e = f$  etc.

Je fais d'abord le calcul de (5) pour un triangle non euclidien général, mais en me bornant, pour l'interprétation géométrique de la relation obtenue et de la quantité nouvelle  $e$ , au cas euclidien. Cet examen, en son entier, n'est pas encore, à mon su, connu dans la littérature relative d'aujourd'hui.

1. Si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont trois angles quelconques ayant la somme  $\lambda$  et si nous mettons:<sup>1</sup>

$$(6) \quad d = 1 - 8(s \sin \lambda - c \cos \lambda),$$

$$(7) \quad e = 8(s^2 + c^2) - 20(s \sin \lambda - c \cos \lambda) - 1,$$

nous obtenons:

$$(8) \quad \begin{aligned} & d^3 - f^2 - e^2 = \\ & = 16 \sin 2\lambda \prod \left[ \sin \frac{2(\lambda + 2k\pi)}{3} + 4 \left( s \cos \frac{\lambda + 2k\pi}{3} + c \sin \frac{\lambda + 2k\pi}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

Dans  $II$  le nombre  $k$  prend les valeurs, 0, 1, 2.

<sup>1</sup> V. mon étude »Points symétriques triangulaires« p. 65.

Cette formule nous montre la position tout à fait exceptionnelle des deux cas spéciaux  $\lambda = \pi$  et  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ . Dans ce qui suit je me borne au cas  $\lambda = \pi$  qui conduit aux relations (3), (4) et (5) mentionnées dans l'introduction. Pour obtenir l'interprétation géométrique de la relation (5) et de la grandeur  $e$  écrivons  $e$  dans la forme:

$$(9) \quad e = 9 \sum \cos^2 \beta \cos^2 \gamma - \sum \sin^2 \beta \sin^2 \gamma = \\ = \sum (2 \cos \beta \cos \gamma - \cos a) (4 \cos \beta \cos \gamma + \cos a).$$

Si l'on met

$$(11) \quad f = \sqrt{d^3} \cos \varphi, \quad e = \sqrt{d^3} \sin \varphi,$$

$\varphi$  est l'angle entre la droite d'Euler et la droite  $(4 \cos \beta \cos \gamma + \cos a)$ .

Comme l'opposé d'un triangle isocèle avec  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  serait à considérer le triangle avec  $\varphi = 0$ . Supposons pour l'exemple d'un tel triangle qu'il est encore rectangulaire. Alors  $e = 0$  et il s'ensuit de (4):  $s = \sin a \cos a = \frac{1}{4} \sqrt{2}$  ou  $a = \frac{\pi}{8} = 22^\circ 30'$ .

Nous obtenons une autre nouvelle espèce de triangles en supposant  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Alors  $e = f$  resp.  $2e = d$ . Si un tel triangle est aussi rectangulaire nous trouvons comme plus haut que  $a = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ .

3. Nous obtenons une autre interprétation de  $e$  en mettant  $e$  dans la forme:

$$e = 8 \sum \sin^2 \beta \sin^2 \gamma - 18 \sum \sin^2 a + 27.$$

Il s'en ensuit immédiatement:

$$2er^4 = \sum b^2 c^2 - 9r^2 \sum a^2 + 54r^4.$$

Si  $\sum a^2 = 3\sigma^2$  et  $\sum v_a^2 = 3\tau^2$  où nous pouvons  $\sigma$  et  $\tau$  appeler le *côte quadratique moyen*, resp. la *hauteur quadratique moyenne*, nous avons:

$$\frac{2}{27} er^2 = (r\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2}{3}\tau\right)^2 - \sigma^2.$$

Pour  $e = 0$  le triangle avec les côtés  $r\sqrt{2}$ ,  $\frac{2}{3}\tau$ ,  $\sigma$  est rectangulaire.

### B. Triangles quasi-semblables

Deux triangles sont semblables s'ils ont la même forme et, d'ailleurs, une grandeur quelconque. La similitude de deux triangles est la plus grande possible parce qu'elle exige toujours une égalité de la forme.

Demandons, à ce rapport, quand y a-t-il aussi une similitude moindre entre deux triangles. Est-ce que, p. e., deux triangles isocèles ou rectangulaires aussi sont semblables d'une certaine manière? L'examen de cette question fait dans cette section nous donne une réponse affirmative pour les triangles isocèles mais une réponse négative pour les triangles rectangulaires. J'appelle deux triangles semblables de cette manière nouvelle *quasi-semblables*.

1. Cet examen est fondé sur la construction de Kiepert<sup>2</sup> de triangles adjoints au triangle donné. Dessinons sur chaque côté du triangle fondamental  $ABC$ , à l'intérieur ou à l'extérieur, les triangles semblables  $A_1BC$  ou  $A_2BC$  etc. Les deux triangles  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  sont triangles de Kiepert dont la propriété la plus importante est qu'ils ont le même centre de gravité comme le triangle fondamental.

Si  $\varepsilon$  est l'angle de base commun aux trois triangles semblables et si nous posons  $\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda$ , les coordonnées de tous les sommets du triangle de Kiepert  $A_1B_1C_1$  ont les valeurs suivantes:

$$(1) \begin{aligned} A_1: & \quad \frac{a}{2}\lambda, & \quad \frac{a}{2}(\sin \gamma - \lambda \cos \gamma), & \quad \frac{a}{2}(\sin \beta - \lambda \cos \beta), \\ B_1: & \quad \frac{b}{2}(\sin \gamma - \lambda \cos \gamma), & \quad \frac{b}{2}\lambda, & \quad \frac{b}{2}(\sin \alpha - \lambda \cos \alpha), \\ C_1: & \quad \frac{c}{2}(\sin \beta - \lambda \cos \beta), & \quad \frac{c}{2}(\sin \alpha - \lambda \cos \alpha), & \quad \frac{c}{2}\lambda. \end{aligned}$$

2. Nous obtenons la longueur  $a_1$  du côté  $B_1C_1$  d'une façon le plus simple, si nous employons, en passant, d'un système de coordonnées rectangulaire.

Un calcul simple donne:

$$(2) \quad a_1^2 = \frac{1}{4}(1 - 3\lambda^2)a^2 + 2p\lambda(\lambda \cot \omega - 1),$$

où  $p = 2r^2s$  est l'aire, et  $\omega$  l'angle de Brocard du triangle  $ABC$ .

<sup>2</sup> G. Berkham — W. Fr. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie, Enzycl. d. math. Wiss. vol. III., 1.2., p. 1269.

De même nous obtenons par un calcul simple l'aire  $p_1$  du triangle  $A_1 B_1 C_1$ :

$$p_1 = \frac{p}{4} (1 - 2\lambda \cotg \omega + 3\lambda^2).$$

Au moyen de cette dernière équation nous obtenons la relation suivante:

$$(3) \quad \cotg a_1 = \frac{(1 - 3\lambda^2) \cotg a + 2\lambda(\lambda \cotg \omega - 1)}{(1 + 3\lambda^2) - 2\lambda \cotg \omega}.$$

De (2) il s'ensuit évidemment

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_1^2 & a^2 & 1 \\ b_1^2 & b^2 & 1 \\ c_1^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne la définition suivante de la quasi-semblabilité de deux triangles:

Deux triangles sont quasi-semblables si le déterminant (4) disparaît.

3. La transformation (3) dégénère si  $1 - 3\lambda^2 = 0$ . Nous voyons par (2) que les triangles correspondants de Kiepert sont équilatéraux. De (2) nous obtenons le quotient des côtés  $a_1$  et  $a_2$  de  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$ :

$$(5) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sqrt{\cotg \omega - \sqrt{3}}}{\sqrt{\cotg \omega + \sqrt{3}}}.$$

Ceci nous donne la construction suivante de triangles isobrocardiques:

Si l'on tourne deux triangles équilatéraux  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  ayant le même centre de gravité  $T$ , les symétrales des droites  $A_1 A_2$ ,  $B_1 B_2$  et  $C_1 C_2$  forment des triangles ayant le même angle de Brocard.

4. De cette construction de triangles isobrocardiques il s'ensuit que l'angle pour lequel un triangle équilatéral est tourné contre l'autre a une signification particulière. Pour la découvrir, nous calculons de (3) les valeurs de  $\cotg^2 \omega_1 - 3$  et  $3 \cotg a_1 - \cotg \omega_1$ .

Ainsi nous trouvons:

$$(6) \quad \frac{3 \cotg a_1 - \cotg \omega_1}{2\sqrt{\cotg^2 \omega_1 - 3}} = \pm \frac{3 \cotg a - \cotg \omega}{2\sqrt{\cotg^2 \omega - 3}} = \pm e_1, \dots$$

Le signe qui reste le même dans les trois équations, est positif pour  $\lambda = 0$  et il change toujours quand  $\lambda$  passe par une racine de  $1 - 3\lambda^2 = 0$ .

Nous trouvons l'interprétation géométrique des nouvelles grandeurs  $e_i$  en cherchant l'équation dont elles sont les racines.

Il s'ensuit de (6)

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = \frac{3}{4}.$$

Si on a encore  $e_1 e_2 e_3 = \cos 3\psi$  l'équation cherchée est:

$$4x^3 - 3x - \cos 3\psi = 0$$

d'où suit:

$$(7) \quad e_1 = \cos \psi, \quad e_2 = \cos \left( \psi + \frac{2\pi}{3} \right), \quad e_3 = \cos \left( \psi + \frac{4\pi}{3} \right).$$

Un calcul simple montre que  $\psi$  est l'angle entre  $TA_1$  et  $TA_2$ .

Si l'on prend  $\psi$  comme *angle de rotation* du triangle donné il s'ensuit de (6):

*Deux triangles sont quasi-semblables si les angles de rotation correspondants sont égaux ou supplémentaires.*

Nous pouvons écrire l'équation (6) aussi dans la forme caractéristique suivante:

$$(8) \quad \begin{aligned} \cotg a &= \frac{1}{3} \left[ \cotg \omega + 2\sqrt{\cotg^2 \omega - 3 \cos \psi} \right] \\ \cotg \beta &= \frac{1}{3} \left[ \cotg \omega + 2\sqrt{\cotg^2 \omega - 3 \cos \left( \psi + \frac{2\pi}{3} \right)} \right] \\ \cotg \gamma &= \frac{1}{3} \left[ \cotg \omega + 2\sqrt{\cotg^2 \omega - 3 \cos \left( \psi + \frac{4\pi}{3} \right)} \right]. \end{aligned}$$

5. De ce que nous avons développé ci-haut nous pouvons déduire de nouvelles inéquations pour les côtés et hauteurs d'un triangle donné. Pour des triangles réels l'angle  $\psi$  est réel, le carré  $e_1^2$  est donc plus petit que 1 ou égal à 1. Cela donne:

$$(\cotg \omega + 3 \cotg a) (\cotg \omega - \cotg a) \geq 4.$$

En exprimant  $\cotg a$  et  $\cotg \omega$  par les côtés du triangle donné, nous obtenons:

$$(9) \quad 2(b^2 + c^2) \geq a^2 + (2v_a)^2.$$

Donc:

*Pour chaque triangle la somme double des carrés de deux côtés est majeure ou égale à la somme des carrés du troisième côté et la double hauteur correspondante.*

Le signe d'égalité valant pour (9) il s'ensuit, au retour,  $e_1^2 = 1$  resp.  $\psi = 0$  ou  $\pi$  et pour le triangle donné  $b = a$ .

La somme des équations (9) écrite pour les trois combinaisons des côtés du triangle donne:

$$3 \Sigma a^2 \geq 4 \Sigma v_a^2.$$

Si l'on introduit le côté quadratique moyenne, resp. la hauteur quadratique moyenne

$$3\sigma^2 = \Sigma a^2, \quad 3\tau^2 = \Sigma v_a^2,$$

on obtient:

$$\tau \leq \frac{\sigma\sqrt{3}}{2}$$

c'est à dire: *la hauteur quadratique moyenne est inférieure ou égale à la hauteur d'un triangle équilatéral dont le côté est égal au côté quadratique moyen.*



4

ANTON PETERLIN

KLOBČIČASTI MODEL NITASTE MOLEKULE

RAZPRAVE III  
AKADEMIJA ZNANOSTI IN UMETNOSTI V LJUBLJANI  
MATEMATIČNO-PRIRODOSLOVNI RAZRED — MATEMATIČNI ODSEK

SPREJETO NA SEJI DNE 10. JULIJA 1944

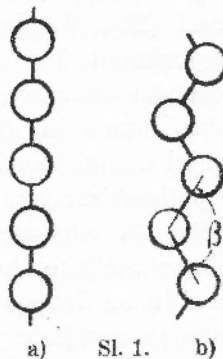
## Klobčičasti model nitaste molekule

## 1. Uvod

Normalna nerazvejena nitasta velemolekula je sestavljena iz zelo velikega števila  $P$  popolnoma enakih osnovnih gradnikov, ki so vezani z glavnimi valencami drug na drugega v takem redu, kot so nabrane jagode na vrvi. Sorazmerno velika trdnost glavnovalenčne vezave je vedla sprva do predstave, da je celotna tvorba toga, ravna palica. Taka palica je zelo vitka, saj znaša njena debelina le kakih 5 Å, toliko, kot je debel nizkomolekulni

osnovni gradnik z molekulsko maso okrog 100, dolžina pa doseže zaradi velike polimerizacijske stopnje  $P$  že nadmolekulske razsežnosti do 1000 Å in še več (sl. 1 a, b). V raztopini nastopajo zaradi neurejenega toplotnega gibanja molekul topila velike sile in upogibni momenti na raztopljeno velemolekulo. Zlasti upogibni momenti so pri tako dolgi molekuli tako veliki, da znatno presegajo upogibno trdnost, ki jo moremo pripisovati glavnovalenčni vezavi.

Molekula je previtka, da bi mogla ostati iztegnjena kot toga palica. Poleg tega je v splošnem valenčni kot  $\beta$  različen od  $180^\circ$  (sl. 1 b). V takem primeru je važna vrtljivost sosedov okoli valenčne vezi. Pri enostavnih vezeh — in samo za take gre — je vrtljivost prav znatna, čeprav ni vedno popolna v tem smislu, da bi bile vse lege enako dosegljive. Večinoma imamo nekaj — dve, tri ali tudi več — odlikovanih leg, ki so ločene po sorazmerno nizkih potencialnih hribih, katerih višina ni bistveno večja od  $kT$ . Pri sobni temperaturi torej nimamo neoviranega vrtenja okoli vezi, marveč samo nihanje okoli prednostne lege. Na vsakih nekaj 100 nihajev pa si zaradi toplotnega kolebanja nabere delec toliko energije, da preskoči preko potencialnega hriba v sosedno prednostno smer. Tako spremenita soseda svojo lego približno milijonkrat na sekundo, kar se



Sl. 1. b)

praktično ne razlikuje prav mnogo od razmer pri popolnoma prosti vrtljivosti, kjer bi imeli nekako 200 milijonov vrtljajev na sekundo. Pozabiti pa seveda ne smemo, da je vsak gradnik vezan na ostalo molekulo po dveh vezeh. S tem so možnosti vrtenja zanj znatno omejene iz čisto geometrijskih vzrokov, preskoki iz ene prednostne lege v drugo so mnogo manj pogosti in nastopijo le pri ugodni razporedbi sosedov. Če to upoštevamo pri molekuli na sl. 1 b, vidimo takoj, da more obstajati naslikana razporedba le trenutek, ker nam zaradi vrtljivosti okoli valenčnih vezi preide takoj v prostorsko tvorbo, ki neprestano spreminja svojo obliko. Molekula je vse prej kakor toga.

Iz zgoraj napisanega se nam zdi predstava toge, iztegnjene velemolekule kaj neverjetna, vse prej bi si jo mogli predstavljati kot mehko, bolj ali manj sklobčeno nit, ki neprestano spreminja svojo obliko, kot to lepo kažejo *Stuartovi* modelski poskusi [21]. Vendar more med obema modeloma odločiti le eksperiment. Pri razredčenih raztopinah, ki edine dopuščajo teoretsko obdelavo, moremo meriti depolarizacijo ravsute svetlobe, lomno in dielektrično število, električni, magnetni ter strujni dvojni lom in židkost, vse v odvisnosti od koncentracije in polimerizacijske stopnje velemolekul, temperature in vrste topila. Za odgovor na stavljeno vprašanje je važen le vpliv polimerizacijske stopnje  $P$ , kakor sem to ugotovil že v kratkem poročilu na drugem mestu [12], kjer sem tudi omenil nekatere bistvene rezultate pričujoče razprave. Tu se je pokazalo tole: Depolarizacija ravsute svetlobe z rastočim  $P$  pada, čeprav nenatančnost meritev ne dopušča, da bi ugotovili podrobno zakonitost. Svojski strujni dvojni lom raste premosorazmerno s  $P$ , sprememba prednostne smeri dvojnega loma pa s  $P^2$  [15]. Lastna židkost raste premosorazmerno s  $P$  (*Staudingerjevo* pravilo). Prav zelo dolge velemolekule pa kažejo počasnejši porast navedenih efektov. S tem vprašanjem se v nadaljnjem ne bom ukvarjal (glej opombo 8!).

Model *toge* molekule, ki jo nadomestim pri računu s togim valjem oziroma elipsoidom, nam da popolnoma drugačne rezultate. Depolarizacija ravsute svetlobe<sup>1</sup> se bliža z rastočim  $P$  neki mejni vrednosti, ki jo praktično doseže že pri razmerju

<sup>1</sup> Enostavni račun velja samo za dolžine, ki so znatno manjše kot 500 Å. Glej (15)!

dolžine proti debelini kakor 30 : 1, to se pravi, pri pravih nitastih velemolekulah je depolarizacija neodvisna od polimerizacijske stopnje [3]. Orientacijski del dielektričnega števila raste s  $P^2$ , prav isto velja za dipolni del svojskega električnega in magnetnega dvojnega loma, medtem ko je premikalni del sorazmeren s  $P$  [14]. Svojski strujni dvojni lom in sprememba prednostne smeri dvojnega loma rasteta s  $P^3$  [7, 13], lastna židkost pa je sorazmerna  $P$ - [2, 7]. Kot vidimo, so razlike med poskusom in teorijo tako velike, da jih ni mogoče odpraviti z dodatnimi hipotezami. Molekule prav gotovo niso toge.<sup>2</sup>

Teorija *gibke* molekule pa je dokaj bolj zamotana kot teorija toge palice oz. elipsoida. Eksaktna obdelava problema je sploh nemogoča. Zato se je treba ozreti po smiselnih poenostavitvah. Prve poskuse v tem smislu je napravil *Kuhn*. Prevzel je statistične rezultate *de Haas-Lorentzove* [4] za verjetno obliko tvorbe, ki sestoji iz večjega števila neodvisnih, enakovrednih členov, in jih uporabil za določitev najverjetnejše oblike nitaste molekule [6]. Na tem modelu slone vse nadaljnje raziskave, tako tudi ta razprava. Ker so tudi največje nitaste molekule še vedno tako majhne, da so v splošnem vplivi vnanjih sil vsaj v nekem končnem območju zelo majhni v primeri z jakostjo neurejenega toplotnega gibanja, smem v tem obsegu smatrati, da se oblika molekule zaradi vnanjega polja ne spremeni, verjetnostna razdelitev ostane torej nespremenjena. V povprečju se tedaj popiše gibanje nitaste molekule prav tako, kot bi bile vse možne oblike toge. S to predstavo se je posrečilo *Hugginsu* [5] razložiti *Staudingerjevo* pravilo linearne odvisnosti lastne židkosti od polimerizacijske stopnje  $P$ . Izračunani sorazmernik, ki naj se ujema z eksperimentalno dobljeno vrednostjo, nima seveda prav nobene realne podlage. V računu nastopa namreč toliko samovoljnih privzetkov, da moremo s primerno izbero le-teh doseči skoraj vsako poljubno številčno vrednost, ki si jo želimo.

<sup>2</sup> Proti temu zaključku bi bil možen ugovor, da kontinuumski način obdelave ni primeren za nitaste velemolekule, ker so vendar njihove prečne razsežnosti enake velikosti kot pri molekulah topila. Vsa izkustva pri drugih ekstrapolacijah te vrste nam pa povedo, da so v takih primerih izračunani številčni razmerniki sicer v splošnem bolj ali manj napačni, toda dobi se pravilni potek efektov. V našem primeru nam gre pa tako samo za slednjega. S tem bi izgubil *Staudingerjev* ugovor zoper dokaze o netogosti makromolekul svojo glavno oporo.

Model togega klobčiča je mogoče porabiti za vse tri zgoraj omenjene vrste umetnega dvojnega loma, če se povsod omejim na linearno območje. V naslednjem hočem določiti potek za to značilnih količin v odvisnosti od  $P$ .<sup>3</sup> Prav isto velja za dielektrično polarizacijo zaradi usmeritve, kjer smem tudi smatrati molekulo za togo, dokler se še ne menim za nasičenostne pojave. Jasno je seveda, da dá togi model pravilne rezultate pri pojavih, kjer sploh ni vnanjega polja, ki bi vplivalo usmerjalno na molekulo, to je pri refrakciji, premikalnem delu polarizacije in pri razsipanju svetlobe.

Ker nimamo pri poskusih nikoli pred seboj strogo enotne raztopine z enim samim  $P$ , marveč vedno polidisperzno suspenzijo, kjer nastopajo krajše in daljše molekule, ki se zgrinjajo v bolj ali manj širokem pasu okrog neke srednje vrednosti  $P_0$ , bom v posebnem poglavju tudi pokazal, kako to spremeni posamezne efekte in v njih nastopajoča povprečja  $\bar{P}$ .

V sledečem hočem pokazati predvsem vpliv polimerizacijske stopnje na potek zgoraj omenjenih efektov. Številčni razmerniki, ki pri tem nastopajo, se mi zdijo dokaj manj važni zlasti zato, ker nastopajo v računu mnogi, precej samovoljni molekulski parametri, ki jih iz predstav v velikem ni mogoče dovolj natančno določiti. Zato si jih moremo seveda vedno izbrati tako, da dosežemo kolikor hočemo dobro skladanje s poskusom, kar gotovo nima prav nobene vrednosti, nasprotno zavaja prepogosto v napačne sklepe eksperimentatorja, ki vidi v splošnem le končne obrazce in se ne meni mnogo za privzetke, ki so bili potrebni pri izpeljavi.<sup>4</sup> Zato bom računal povsod le

<sup>3</sup> Kakor hitro se zanimamo za nasičenostne pojave, ki so posebno izraziti pri strujnem dvojnem lomu in pri podajni židkosti, moramo upoštevati popačitev molekule v zunanem polju sil. Vpliv polja ni več zanemarljivo majhen v primeri z Brownovim gibanjem. *Kuhn* [8] je precej tvegano poenostavil ta problem in prišel tako do rešitev za strujni dvojni lom in za lastno židkost, ki kažejo pravilno odvisnost efektov od  $P$  in vsaj v glavnih potezah pravilen potek dvojnega loma z rastočo ureditvijo molekul. Njegovi privzetki so pa v toliki meri samovoljni in tako malo utemeljeni, da se mi zdi nujno potrebno, ponoviti ves račun na boljše podprtih temeljih.

<sup>4</sup> V tej zvezi bi rad omenil pogosto rabljeni *Kuhnov* obrazec za lastno židkost raztopin togih paličic  $[\eta] = 2.5 + p^2/16$  [7]. Izpeljal jo je iz očitno napačne predstave, da se gibljejo delci le v strujni ravnini (ravninsko gibanje), in pri tem zahteval, da je osno razmerje delcev  $p = a_1/a_2$  zelo

tako dolgo, da se bodo dale spoznati značilne lastnosti pojava. Iz istega razloga bom računal trodimenzijsko le pri tistih efek-  
tih, kjer gre to primeroma enostavno, ne da bi trpela nazornost  
izvedbe zaradi obsežnosti računov. To uspe povsod razen pri  
strujanju, to je pri lastni židkosti in pri strujnem dvojnem lomu,  
kjer se bom omejil le na ravninski problem. Bistveni deli se  
dajo pri tem vsi določiti, odpade pa seveda vsaka možnost, priti  
na ta način do pravih številčnih faktorjev, kar je pa že tako  
precej nedosegljivo iz pravkar omenjenih vzrokov.

Izkaže se, da potrebujem za doseg nakazanega programa,  
ki pa vendar izčrpa vse, kar se da res izračunati in ne samo  
ugibati, izredno skromna matematična sredstva, vse gre skoraj  
brez računa. Problem nitaste velemolekule je torej v prvem  
približku togega klobčiča bolj nazoren in enostaven, kot bi si  
to mogli vnaprej predstavljati. Je pa to čisto v skladu z eno-  
stavnostjo opazovanih efektov, ki jih moremo po večini popisati  
z linearnimi, torej res najenostavnejšimi funkcijami.

## 2. Privzetki

Molekula sestoji iz  $P$  enakih osnovnih gradnikov. Način  
vezave dopušča precejšno vrtljivost okoli črte, ki veže nepo-  
sredna soseda. Če valenčni kot ni enak  $180^\circ$ , oz. če je pri kotu  
 $180^\circ$  vez med sosedama vsaj nekoliko gibka, potem vpliva na  
vsak gradnik le neko število bližnjih členov, medtem ko je le-ta  
praktično popolnoma neodvisen od lege in usmerjenosti ostalih,  
bolj oddaljenih delov molekule. Bodi  $\zeta/2$  število sosedov na

veliko. Togi model je sestavljen iz samih enakih krogel, ki so nanizane  
na osi tako, da je razdalja dveh sosedov enaka štirikratnemu polmeru.  
Za prostornino modela vzame valj, ki se opiše vsem kroglam, to je  
 $V = 2\pi pR^3$ . Vsi ti privzetki vplivajo bistveno na množitelj  $1/16$ . Če grem  
k edino pravilnemu prostorskemu gibanju delcev in vzamem za prostor-  
nino delca le krogle, ki model sestavljajo, to je  $V = 2\pi pR^3/3$ , dobim  $1/10$ ,  
kar je prav vrednost, ki jo je dobil *Polson* [17] pri svojih meritvah na  
proteinih. Z izbero druge razdalje med kroglami modela morem seveda  
številčno vrednost še dalje spreminjati. Pri vsem tem je pa že sam način  
kako se računa razsuta storitev  $S$  (str. 13) dokaj slabo utemeljen, saj  
vodi do popolnoma napačnega poteka podajne židkosti [11]. Še slabše je  
z *Einsteinovim* členom 2.5, ki ga dodaja *Kuhn* v svojem obrazcu samo  
zato, da more sploh popisati razmere pri okroglih delcih. Fizikalno važna  
je na obrazcu edinole kvadratna odvisnost  $[\eta]$  od osnega razmerja  $p$ , če-  
prav je po načinu računa prav za prav nedopustna ekstrapolacija do  $p = 1$ .

vsaki strani, ki še vplivajo na posamezni člen. Potem je središče odseka  $\zeta$  členov neodvisno od vseh sosednih odsekov oz. od njihovih središč. Molekula razpade tako v  $Z$  odsekov, ki so eden od drugega v svoji legi in usmerjenosti neodvisni.<sup>5</sup> Vsak odsek vsebuje po  $\zeta$  osnovnih členov

$$(1) \quad P = \zeta Z.$$

Število  $\zeta$  meri togost molekule: velik  $\zeta$  pomeni razmeroma zelo tego molekulo, majhen  $\zeta$  pa gibko.

Odsek sam spreminja venomer svojo obliko. V povprečju je pa osnosomerna nitasta tvorba dolžine  $A$ , ki ji moramo pripisovati neko optično ( $\alpha_1, \alpha_2 = \alpha_3$ ), električno ( $\beta_1, \beta_2 = \beta_3$ ) in magnetno ( $\gamma_1, \gamma_2 = \gamma_3$ ) polarizirnost,<sup>6</sup> dipolni moment  $\mu_0$  v smeri osi in hidrodinamski upornostni količnik  $\lambda$ ,<sup>7</sup> ki bodi zaradi enostavnosti neodvisen od kota, ki ga oklepa os odseka s smerjo hitrosti, to je hidrodinamsko bodi odsek izotropen kot krogla. Vsi odseki so seveda enakovredni, medsebojne vplive hočemo popolnoma zanemariti. Da se ne motijo odseki različnih molekul, moramo zahtevati, da bodi raztopina vedno tako razredčena, da so vsi pojavi premo sorazmerni številu raztopljenih molekul (linearni obseg koncentracijske odvisnosti).

Neko možno obliko molekule dobimo, če postavimo prvi odsek v izhodišče, nanj priključimo v poljubni smeri drugega in tako nadaljujemo do konca molekule. Vse možnosti so izčrpane, če damo vsakemu odseku vse smeri v prostoru.<sup>8</sup> Te na-

<sup>5</sup> Neodvisnost seveda ni popolna, ker se središči dveh sosednih odsekov ne moreta bolj oddaljiti eno od drugega kot znaša  $\zeta$ -kratna razdalja neposredno sosednjih členov. V statistični obdelavi se na to omejitev ni treba dosti ozirati.

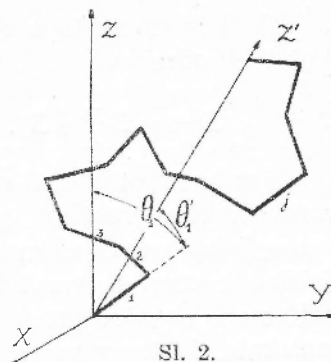
<sup>6</sup> Anizotropnost odseka more imeti še več vzrokov: *lastna* anizotropnost gradnikov in *oblikovna* anizotropnost osnosomernega, skoraj linearnega odseka. Samo z upoštevanjem obeh deležev moremo razumeti po *Singerju* in *Sadronu* [18] vpliv topila, ki v nekih primerih celo spremeni predznak dvojnega loma. V tej razpravi nas ta odvisnost ne bo zanimala in se zato ne bomo nikjer vprašali, kako je prišlo do optičnih, električnih in magnetnih lastnosti odseka.

<sup>7</sup> Količnik  $\lambda$  ima razsežnost dolžine, kar vidimo takoj iz zveze med uporomo  $\vec{P}$  in relativno hitrostjo  $\vec{v}_{rel}$  odseka:  $\vec{P} = \lambda \cdot \eta \cdot \vec{v}_{rel}$ . Pri krogli ima  $\lambda$  po *Stokesu* vrednost  $6\pi a$ , kjer pomeni  $a$  polumer krogle. Če prenesemo to na svoj odsek, dobimo za  $\lambda$  vrednost okoli  $50 \text{ \AA}$ .

<sup>8</sup> Pri tem nastopajo prekrivanja posameznih odsekov, ki pri resnični molekuli seveda niso možna. Morali bi jih izključiti, kar se računsko ne

stopajo z enako pogostnostjo, kvadrat projekcije vsakega odseka na koordinatne osi je v povprečju enak  $A^2/3$ , pri ravninskem modelu  $A^2/2$ .

Vnanje polje sil seveda odpravi enakovrednost vseh smeri, odseki se postavijo v določene prednostne smeri oz. se mude tam dalj časa kot brez polja. Na posameznem prostem odseku je ta sprememba v splošnem zelo majhna, znatna pa postane na celotni molekuli. Ker mi gre tu le za prvi približek, to je za limito, ki jo dosežejo razni efekti, če gre jakost polja proti nič, smem ureditev posameznih odsekov ne glede na ostalo molekulo kar zanemariti. Vsa sprememba v porazdelitvi nastopi le zaradi orientacije cele molekule v polju in ne od deformacije molekule, to je od ureditve neodvisnih odsekov vsakega zase. Edino tako smem razumeti fogost privzetega modela.



Sl. 2.

### 3. Statistični povprečki

Zaradi popolne neodvisnosti odsekov je povprečni kvadrat projekcije  $Z$  odsekov, to je dolžine  $h$  vse molekule, na poljubno os v prostoru enak vsoti povprečnih kvadratov projekcij posameznih odsekov. V prostorskem modelu dobimo tako  $Z \cdot A^2/3$ , v ravninskem pa  $Z \cdot A^2/2$ . Povprečni kvadrat dolžine molekule je v obeh primerih enak<sup>9</sup>

$$(2) \quad \overline{h^2} = Z \cdot A^2.$$

Za  $j$ -ti odsek bo tedaj povprečni kvadrat razdalje od izhodišča

$$\overline{r_j^2} = j \cdot A^2.$$

da dobro izvesti. Pri kratki molekuli smemo to kar zanemariti, ker so prekrivanja še redka. Čim daljša pa je molekula, tem manj je tako zanemarjanje dopustno. Zaradi porabe prostora je treba torej take molekule znatno bolj raztegniti, kot kaže zgornji, enostavni model. Pri tem so osrednji deli tako gosto zasedeni z odseki, da le-ti niso več niti prosti niti neodvisni eden od drugega. Molekula izgubi tam svoje linearne lastnosti.

<sup>9</sup> *Kuhn* [7] opazuje pri strujanju samo ravninsko gibanje molekule namesto prostorskega, kar seveda bistveno vpliva na številčno vrednost razmernikov  $K_1$  (24),  $K_2$  (33) in  $K_3$  (34) (gl. opombo 4 str. 3!). Da bi to napako izravnal, vzame kot povprečni kvadrat dolžine molekule le njeno ravninsko projekcijo  $2Z A^2/3$ .

V sledečem nastopa večkrat povprečje vsote kvadratov razdalj vseh odsekov

$$(3) \quad \overline{\sum_{j=1}^Z r_j^2} = \sum_j \overline{r_j^2} = \sum_j A^2 = \frac{Z \cdot (Z+1)}{2} \cdot A^2 \approx \frac{1}{2} Z^2 \cdot A^2.$$

Ker bom potreboval natančnejšo sliko o obliki molekule le v ravninskem problemu pri strujanju, si hočem tudi samo pri tem ogledati porazdelitev odsekov. Vse molekule, ki imajo isto dolžino  $h$ , moremo razdeliti v več skupin tako, da se dajo vse oblike ene skupine prevesti ena v drugo s samim vrtenjem cele molekule. Odlikujmo eno izmed njih in navežimo nanjo posebno pomožno sooredje  $x', y'$  tako, da leži začetek molekule v izhodišču, konec pa na osi  $x'$ . Vsak odsek ima v tem pomožnem sooredju koordinate  $x'_j, y'_j$  in smer  $\varphi'_j$ . Vse molekule te skupine nastanejo sedaj s samim vrtenjem pomožnega sooredja, označuje jih torej kot  $\Phi$ , ki določa lego pomožnega sooredja v ravnini. V zunanjem polju sil preneha po našem privzetku toge molekule enakomerna porazdelitev pomožnega sooredja v ravnini, kar upoštevam s posebno razdelitveno funkcijo  $F(\Phi)$ , ne spremeni se pa niti oblika molekule, to je lega odseka  $x'_j, y'_j$  in njegova smer  $\varphi'_j$ , niti pogostnost posameznih skupin molekulskih oblik. Za vsako skupino dobim v splošnem drugo razdelitveno funkcijo  $F$ , ki mi dovoljuje izračunati potrebne povprečke za to skupino. Kot številčni količniki nastopajo v teh povprečkih količine, ki so odvisne edinole od oblike molekule. Ko iščem tedaj povprečje po vseh skupinah, moram upoštevati prav spremembo količnikov s spremembo oblike, to je s spremembo koordinat  $x'_j, y'_j, \varphi'_j$ . Pri tem si bom problem toliko poenostavil, da smatram smer odseka za popolnoma neodvisno od lege, kar gotovo ni čisto pravilno, čeprav je v skladu z zahtevo po popolni neodvisnosti odsekov. Pri dani dolžini molekule  $h$  je razdelitev kotov  $\varphi'_j$  omejena z dodatnim pogojem

$$(4) \quad \sum_j \cos \varphi'_j = \frac{h}{A}, \quad \sum_j \sin \varphi'_j = 0,$$

kar mi da za razdelitveno funkcijo  $g(\varphi')$ , podobno kot pri *Kuhnu* in *Grünu* [9], ki računata v prostoru, za vse odseke enako

$$(5) \quad g(\varphi') = \frac{\frac{2h}{eZ \cdot A} \cdot \cos \varphi'}{2\pi J_0\left(\frac{2h}{ZA}\right)},$$

kjer pomeni  $J_0$  Besselovo funkcijo ničelnega reda in  $i$  imaginarno enoto. Dobimo od tod za povprečji, ki nastopata v  $I$  (32) pri svojski Maxwellovi stalnici, za dani  $h$

$$(6) \quad \sum_j \overline{\cos^2 \varphi_j'} - \frac{Z}{2} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{ZA^2} + \dots, \quad \sum_j \overline{\sin \varphi_j' \cos \varphi_j'} = 0.$$

Z upoštevanjem vseh dolžin  $h$  dobimo zaradi (2) za prvi izraz vrednost  $1/4$ . Važno je zame samo to, da je vrednost konstanta, neodvisna od  $Z$ . Številčna vrednost stalnice je seveda brez posebnega pomena.

Vsaki skupini ustreza pri ravninskem problemu zrcalno enaka, ki jo moram smatrati za novo skupino, ker se v ravnini ne da prevesti ena v drugo. Za tak par  $x', y', \varphi'$  in  $x'', y'', \varphi''$  velja

$$x_j' = x_j'', \quad y_j' = -y_j'', \quad \varphi_j' = -\varphi_j'',$$

v povprečju torej odpadejo vse funkcije, ki so lihe v  $y'$  oz.  $\varphi'$ .

#### 4. Depolarizacija razzsute svetlobe.

Na obliko in velikost molekule moremo sklepati iz depolarizacijske stopnje svetlobe, razzsute pravokotno na smer vpadajočega žarka. Naj vпада linearно polarizirana svetloba v smeri pozitivne osi  $y$ , njen električni vektor  $\vec{E}$  bodi vzporejen osi  $z$ , jakost svetlobe bodi  $J_0$ . V  $i$ -tem odseku se inducira moment  $\vec{p}_j$ , ki ima v lastnem soledju odseka komponente

$$a_1 \cdot \mathcal{E} \cdot \cos \vartheta_j, \quad a_2 \cdot \mathcal{E} \cdot \sin \vartheta_j, \quad 0.$$

Projekcije na osi  $x, y, z$

$$(a_1 - a_2) \cdot \mathcal{E} \cdot \sin \vartheta_j \cos \vartheta_j \cos \varphi_j, \quad (a_1 - a_2) \cdot \mathcal{E} \cdot \sin \vartheta_j \cos \vartheta_j \sin \varphi_j, \\ \mathcal{E} (a_1 \cos^2 \vartheta_j + a_2 \sin^2 \vartheta_j)$$

dajo obenem amplitudo razzsute svetlobe, ki prihaja od odseka. Če smem sedaj smatrati vso molekulo za tako majhno, da ima vpadajoče svetlobno valovanje v vseh odsekih isto fazo in se tudi faze razzsute svetlobe med seboj ujemajo, potem dobim pravilno jakost razzsute svetlobe za posamezno molekulo, če seštejem amplitude valovanj, ki prihajajo od posameznih odsekov. Odseki razzsipajo svetlobo koherentno. Potreben in zadosten pogoj za to je, da so vse razsežnosti  $a$  molekule majhne v primeri z valovno dolžino

$$a \ll \frac{\lambda}{2\pi n} \sim 500 \text{ \AA}.$$

Pri tem sem vzel za  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ,  $n = 1.3$  (voda), kar odgovarja na splošno razmeram pri opazovanju razešute svetlobe na koloidnih raztopinah. Iztegnjena nitasta melokula v večini primerov ne zadošča zgornjemu pogoju, saj imamo že pri  $P = 100$  in dolžini osnovnega gradnika  $5 \text{ \AA}$  za dolžino molekule  $500 \text{ \AA}$ . Sklobčena molekula pa je znatno krajša. Pri  $\zeta = 4$  znaša povprečna dolžina  $100 \text{ \AA}$ , kvazistatična obdelava optičnega polja je še dopustna. Z rastočim  $P$  pridemo seveda tudi tu končno do prevelikih molekul, kjer je treba upoštevati fazne razlike med odseki, to se pravi seštevati je treba tam jakosti in ne amplitud. V danem zgledu bi nastopil ta primer pri  $P = 2000$ , ko je povprečna dolžina že  $= 450 \text{ \AA}$ .

Amplituda, ki jo da vsa molekula v smeri  $y$  oz.  $z$ , to je prav v obeh polarizacijskih smereh pri opazovanju v osi  $x$  razešute svetlobe, je po zgornjem sorazmerna izrazoma

$$(a_1 - a_2) \sum_j \sin \vartheta_j \cos \vartheta_j \sin \varphi_j \quad \text{v smeri } y,$$

$$\sum_j (a_1 \cos^2 \vartheta_j + a_2 \sin^2 \vartheta_j) \quad \text{v smeri } z,$$

jakost razešute svetlobe pa

$$I_y = \frac{128 \pi^6}{3 \lambda^4} \cdot I_0 \cdot (a_1 - a_2)^2 \left( \sum_j \sin \vartheta_j \cos \vartheta_j \sin \varphi_j \right)^2,$$

$$I_z = \frac{128 \pi^6}{3 \lambda^4} \cdot I_0 \left( \sum_j [a_1 \cos^2 \vartheta_j + a_2 \sin^2 \vartheta_j] \right)^2$$

za osno obliko in lego molekule, ki jo določajo koti  $\vartheta_j$  in  $\varphi_j$ . Potrebujem povprečje za vse možne molekule, ki nastopajo, če dam vsakemu odseku neodvisno od drugih vse smeri v prostoru. Pri računanju povprečja mi pri  $J_y$  odpadejo vsi mešani členi in ostanejo samo čisto kvadratni, ki jih je prav toliko kot odsekov, to je  $Z$ . V  $J_z$  pa ostane vseh  $4Z^2$  členov. Dobim tako

$$I_y = \frac{128 \pi^6}{3 \lambda^4} \cdot I_0 \cdot (a_1 - a_2)^2 \frac{Z}{15},$$

$$I_z = \frac{128 \pi^6}{3 \lambda^4} \cdot I_0 \left[ (a_1 + 2a_2)^2 \frac{Z^2}{9} + (a_1 - a_2)^2 \frac{4Z}{15} \right].$$

Razmerje med obema jakostima da depolarizacijsko stopnjo  $\Delta'$  razešute svetlobe

$$(7) \quad \Delta' = \frac{I_y}{I_z} = \frac{(a_1 - a_2)^2 \frac{Z}{15}}{(a_1 + 2a_2)^2 \frac{Z^2}{9} + (a_1 - a_2)^2 \frac{4Z}{15}} = \frac{3\delta^2}{10 + 12\delta^2}$$

z okrajšavo

$$(8) \quad \delta^2 = \frac{2(a_1 - a_2)^2}{Z(a_1 + 2a_2)^2},$$

ki predstavlja optično anizotropnost molekule. Slednja je samo  $Z$ -ti del optične anizotropnosti posameznega odseka, za katerega je po *Debyu* [1] značilna količina  $\delta_0^2$

$$\delta_0^2 = \frac{(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2}{(a_1 + a_2 + a_3)^2} = \frac{2(a_1 - a_2)^2}{(a_1 + 2a_2)^2}$$

Zveza

$$(8a) \quad \delta^2 = \frac{1}{Z} \cdot \delta_0^2 = \frac{\zeta}{P} \cdot \delta_0^2$$

pove, da pada nitasti molekuli anizotropnost obratno sorazmerno s polimerizacijo  $P$ .

Poleg  $\Delta'$  pri polariziranem vpadajočem žarku nastopa v meritvah še  $\Delta$  pri nepolarizirani prvotni svetlobi. Vrednost tega količnika dobimo takoj, če upoštevamo, da se da nepolariziran žarek sestaviti iz dveh nekoherentnih, pravokotno eden na drugem polariziranih žarkov. Zato je tudi razsuta svetloba obeh žarkov nekoherentna, seštevajo se jakosti in ne amplitude. Za žarek, ki niha vzporedno z osjo  $z$ , imamo vrednosti  $J_y$  in  $J_z$  že zgoraj. Drugi žarek z  $\vec{E}$  v smeri  $x$  pa da po naših privzetkih v obe smeri  $y$  in  $z$  enako jakost razsute svetlobe  $J_x$ . Imamo tako za depolarizacijsko stopnjo pri naravni vpadajoči svetlobi

$$(9) \quad \Delta = \frac{2I_y}{I_y + I_z} = \frac{2\Delta'}{1 + \Delta'} = \frac{6\delta^2}{10 + 15\delta^2}$$

Ker je v razredčenih raztopinah nitastih molekul  $\Delta$  in  $\Delta'$  zelo majhen, komaj nekaj odstotkov, smemo brez velike napake zgornje izraze poenostaviti v

$$(10) \quad \Delta = 2\Delta' \quad \Delta = \frac{3}{5} \delta^2, \quad \Delta' = \frac{5}{10} \delta^2.$$

Veljavnost prve zveze je naravnost merilo za to, da je molekula res tako majhna, da je kvazistatična obdelava svetlobnega polja dopustna. Iz zadnjih dveh pa sledi, da velja tudi za depolarizacijo  $\Delta$  in  $\Delta'$ , da padata obratno sorazmerno s polimerizacijsko stopnjo  $P$ .

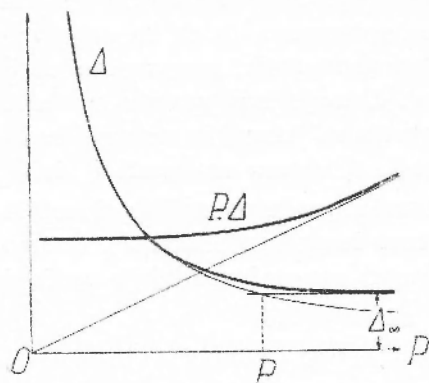
V zelo veliki molekuli, kjer so razsežnosti enakega velikostnega reda kot valovna dolžina svetlobe ali še večje, so pa fazne razlike med odseki odločilnega pomena. Ker ni med njimi

nobene povezanosti, moramo smatrati za nekoherentno svetlobo, ki prihaja od dveh dovolj oddaljenih odsekov, seštevati moramo tedaj jakosti in ne amplitud. Bodi  $Z_\infty$  število odsekov, pri katerem se uveljavi nesovisnost razsute svetlobe. Po tem sestoji molekula iz  $Z/Z_\infty$  delov, ki sipljejo svetlobo tako, kot bi ostalih delov ne bilo. Depolarizacija je v tem primeru

$$(11) \quad \Delta' = \frac{\frac{Z}{Z_\infty} \cdot I_{y\infty}}{\frac{Z}{Z_\infty} \cdot I_{z\infty}} = \frac{I_{y\infty}}{I_{z\infty}} = \Delta_\infty,$$

to je enaka depolarizaciji  $Z_\infty$  odsekov, neodvisno od molekulske dolžine. Zaradi končnih faznih razlik je pa tudi  $J_{y\infty}$  različen od  $J_{x\infty}$ , enostavna zveza  $\Delta = 2\Delta'$  ne velja več, kar moremo torej smatrati kot znak za preveliko razsežnost delcev. Ker raste tudi  $J_x$  sorazmerno z  $Z/Z_\infty$ , gre tudi  $\Delta$  prav tako kot  $\Delta'$  proti

neki stalni mejni vrednosti. To mejno stanje se doseže seveda z zveznim preходом iz zgornjega za majhne delce.



Slika 3.

Splošni potek depolarizacije razsute svetlobe bo tedaj pri nitastih velemolekulah nekako tak. Pri razmeroma majhnem  $P$  pada  $\Delta$  obratno sorazmerno s  $P$ , potem pa postane padanje počasnejše in se bliža neki mejni vrednosti, ki ustreza onemu  $P_\infty$ ,

pri katerem prevlada nesovisnost sipanja svetlobe. Produkt  $P \cdot \Delta$  oz.  $M \cdot \Delta$  je torej pri majhnem  $P$  oz.  $M$  konstanten in začne rasti šele v bližini  $P = P_\infty$ , dokler ne preide v premico  $P \cdot \Delta_\infty$  oz.  $M \cdot \Delta_\infty$ .

	$100 \Delta$	$100 \Delta'$	$200 \Delta'$	$M$	$M \cdot \Delta$	$M \cdot \Delta'$
Metilna celuloza	1,5	0,27	0,54	18 500	278	50
	1,4	0,41	0,82	46 000	645	188
	0,53	0,14	0,28	98 000	518	137
Nitroceluloza	3,0	1,5	3,0	17 400	52,2	26,1
	3,0	1,1	2,2	24 200	72,6	26,6
	2,0	0,58	1,2	65 200	130	37,7

To se prav lepo ujema s tem, kar je meril Lotmar [10] na razredčenih raztopinah metilne celuloze in nitroceluloze. Iz raz-

predelnice vidimo, da pada depolarizacija pri nepolarizirani ( $\Delta$ ) in pri polarizirani ( $\Delta'$ ) vpadajoči svetlobi z rastočo molekulsko maso  $M$ . Vendar produkt  $M \cdot \Delta$  oz.  $M \cdot \Delta'$  ni več stalen, kar bi kazalo na to, da so delci že tako veliki, da statično gledanje na optično polje ni več dopustno. Do istega sklepa pridemo, če primerjamo  $\Delta$  in  $\Delta'$ , ki ne ustrezata pogoju (10), kot je razvidno iz stolpca, kjer imamo vpisan  $200 \Delta'$ , ki bi se moral ujemati z vrednostmi  $100 \Delta$ . Pri primerjavi poskusnih vrednosti s teoretskimi zaključki je treba upoštevati tudi motnje, ki nastopijo zaradi prašnosti raztopin. Prahu pri raztopinah velemolekul ni več mogoče popolnoma odstraniti, ker jih ne moremo precejati skozi dovolj gosta sito. Zato so raztopine deloma prežidke, deloma pa zadrži sito že raztopljene velemolekule same. Zato merimo vedno poleg svetlobe, ki jo razsujejo velemolekule, tudi ono, ki jo razsipajo delci prahu. Od tod pridejo velika kolebanja izmerkov pri zaporednih raztopinah, ki zabrišejo potek efekta tako zelo, da je težko reči, ali je pri navedenih celulozah  $\Delta$  že dosegel svojo mejno vrednost  $\Delta_\infty$  ali smo še v območju, kjer je  $M \cdot \Delta$  konstanten. Najbolj verjetno je, da smo prav v prehodu med tema skrajnostima. Kot nadaljnjo možnost razlage velikega kolebanja izmerkov bi mogli pritegniti polidisperznost raztopin, ki je gotovo pri posameznih frakcijah različna. Glej v tej zvezi izvajanja v devetem poglavju! Vendar se mi zdi zelo neverjetno, da bi bila polidisperznost pri delnih raztopinah tako zelo različna, da bi mogla razložiti veliki skok pri drugi metilni staničnini z  $M = 46\,000$ .

Značilne so tudi meritve razsute svetlobe na normalnih parafinih, ki so v marsičem podobni nitastim velemolekulam [20]. Depolarizacijska stopnja do heksana raste, potem pa pada, vendar počasneje, kot zahteva enačba (8a). To si moremo razložiti tako, da je tudi pri najdaljšem merjenem parafinu, pri dodekanu, število členov še premajhno za naše privzetke, to se pravi, odsekov je premalo za statistično obdelavo. Sklepati morem, da je  $\xi$  velikostnega reda 6–10, ker se doseže  $\delta_0^2$  že pri šestih ogljikih v verigi. Posebno obvezen ta zaključek seveda ni že zato, ker ga dobimo iz meritev na čistih parafinih in ne na razredčenih raztopinah. Vse izmerke moti vzajemno vplivanje molekul.

## 5. Lom in dielektričnost

Refrakcija razredčene raztopine je enaka vsoti iz refrakcije topila in topljenca. Če so molekulske prostornine enostavno seštevne, potem imamo

$$(12) \quad \frac{n_r^2 - 1}{n_r^2 + 2} - \frac{n_t^2 - 1}{n_t^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} c \left( \frac{a}{V} - \frac{a_t}{V_t} \right),$$

kjer pomenita  $n_r$  in  $n_t$  lomno število raztopine in topila,  $V$  in  $V_t$  molekulski prostornini, to je prostornini, ki jih imata v povprečju na razpolago molekula topljenca oz. topila,  $a$  in  $a_t$  povprečni optični polarizirnosti obeh in  $c$  prostorninsko koncentracijo. Zaradi popolne neodvisnosti odsekov dobimo takoj

$$(13) \quad a = Z \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

Ker raste tudi prostornina  $V$  velemolekule premo sorazmerno z  $Z$

$$(14) \quad V = Z \cdot V_0,$$

je izraz  $a/V$  in s tem delež velemolekule na refrakciji tekočine neodvisen od polimerizacijske stopnje  $P$  oz. molekulske mase  $M$ .

Prav podobne so razmere pri polarizaciji raztopine. Enačbi (12) ustrežajočo prepisem v obliko

$$(15) \quad \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} - (1 - c) \frac{\epsilon_t - 1}{\epsilon_t + 2} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{c}{V} \left( \beta + \frac{\mu^2}{3kT} \right),$$

kjer pomenita  $\epsilon_r$  in  $\epsilon_t$  dielektrični števili raztopine in topila,  $\beta$  povprečno elektrostatično polarizirnost molekule in  $\mu^2$  povprečni kvadrat njenega dipolnega momenta. Prvi člen v oklepaju da premikalni del, drugi pa usmerjenostni del polarizacije. Za premikalni del dobim prav tako kot za refrakcijo sorazmernost z  $Z$

$$(16) \quad \beta = Z \frac{\beta_1 + 2\beta_2}{3},$$

ta del polarizacije  $\beta/V$  je neodvisen od  $P$  oz.  $M$ . Za usmerjenostni del pa potrebujem razdelitev molekul v zunanem polju  $\vec{E}$ , ki naj bo vzporedno osi  $z$ . Na molekulo vpliva pri enakosmernosti okolice notranje polje

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_t + 2}{3} \cdot \vec{E}.$$

Potencialna energija molekule sestoji iz premikalnega dela  $u_1$  in dipolnega  $u_2$

$$u_1 = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \sum_j (\beta_1 \cos^2 \vartheta_j + \beta_2 \sin^2 \vartheta_j),$$

$$u_2 = -\mu_0 \mathcal{F} \sum_j \cos \vartheta_j$$

ter vodi do razdelitvene funkcije

$$(17) \quad F = C \cdot e^{-\frac{u_1 + u_2}{kT}} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^Z \left\{ 1 + \frac{\mu_0 \mathcal{F}}{kT} \sum_j \cos \vartheta_j + \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{F}^2}{2kT} \left[ \beta_1 \left( \sum_j \cos^2 \vartheta_j - \frac{Z}{3} \right) + \beta_2 \left( \sum_j \sin^2 \vartheta_j - \frac{2Z}{3} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\mu_0^2 \mathcal{F}^2}{2k^2 T^2} \left[ \left( \sum_j \cos \vartheta_j \right)^2 - \frac{Z}{3} \right] + \dots \right\},$$

v kateri so upoštevane že vse oblike molekule, saj nastopajo vsi odseki popolnoma enakovredno samo s svojo smerjo. Napisanih je le toliko členov, kot jih potrebujem za usmerjenostno polarizacijo (linearni člen) in za električni dvojni lom (oba kvadratna člena).

Za povprečni moment molekule zaradi usmeritve dobim

$$\bar{p} = \mu_0 \int \sum_j \cos \vartheta_j \cdot F \cdot d\Omega, \quad d\Omega = \Pi \sin \vartheta_j d\vartheta_j d\varphi_j.$$

Ker me zanima samo prvi približek, saj se ne menim za nasičenostne pojave, ostane le linearni člen v  $F$ , ki da

$$(18) \quad p = \frac{\mu_0^2 \mathcal{F}}{kT} \cdot \overline{\sum \cos^2 \vartheta_j} = \frac{Z \mu_0^2}{3kT} \cdot \mathcal{F},$$

to se pravi, velemolekula se vede tako, kot bi imela v povprečju lastni moment  $\mu = \mu_0 \sqrt{Z}$ . Količnik  $\mu^2/V$  je torej neodvisen od  $Z$ . Velemolekula ima tedaj v raztopini stalno polarizacijo ne glede na svojo polimerizacijsko stopnjo  $P$ .

## 6. Električni in magnetni dvojni lom

Pri nedvolomnem topilu, s kakršnim v splošnem vedno delamo, definiramo svojsko električno dvolomnost topljenca (svojska Kerrova stalnica) po Peterlinu in Stuartu [14]

$$(19) \quad \bar{K}_{sv} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta n}{\epsilon \cdot n \cdot \mathcal{E}^2} \right) = \frac{(\epsilon + 2)^2 (n^2 + 2)^2}{3} \frac{2\pi \bar{\Delta a}}{V \mathcal{F}^2}.$$

Količini  $n$  in  $\epsilon$  sta lomno in dielektrično število raztopine, ki se v limiti ujemata z vrednostima topila samega. Izraz  $\bar{\Delta a}$  pa pomeni v polju  $\mathcal{E}$  nastopajočo razliko med povprečno optično

polarizirnostjo delca v smeri zunanjega elektrostatičnega polja  $\bar{E}$ , to je  $\bar{a}_{\parallel}$ , in v pravokotni smeri  $\bar{a}_{\perp}$

$$\bar{\Delta a} = \bar{a}_{\parallel} - \bar{a}_{\perp} = (\bar{\Delta a})_1 + (\bar{\Delta a})_2,$$

kjer meri  $(\bar{\Delta a})_1$  premikalni del,  $(\bar{\Delta a})_2$  pa dipolni del dvojnega loma.

Za vsako molekulo velja

$$a_{\parallel} = \sum_j (a_1 \cos^2 \vartheta_j + a_2 \sin^2 \vartheta_j) = Z \cdot a_2 + (a_1 - a_2) \sum_j \cos^2 \vartheta_j,$$

$$a_{\perp} = \sum_j [a_1 \sin^2 \vartheta_j \cos^2 \varphi_j + a_2 (\sin^2 \vartheta_j \sin^2 \varphi_j + \cos^2 \vartheta_j)] = \\ = Z \cdot a_2 + (a_1 - a_2) \sum_j \sin^2 \vartheta_j \cos^2 \varphi_j,$$

$$\Delta a = (a_1 - a_2) \sum_j (\cos^2 \vartheta_j - \sin^2 \vartheta_j \cos^2 \varphi_j).$$

Potrebujem povprečje po vseh legah odsekov

$$\bar{\Delta a} = (a_1 - a_2) \int \sum_j (\cos^2 \vartheta_j - \sin^2 \vartheta_j \cos^2 \varphi_j) \cdot F \cdot d\Omega.$$

V prvem približku, ki mi popolnoma zadostuje, ker mi ne gre za nasičenostne pojave, ostaneta v  $F$  samo oba kvadratna člena, ki mi dasta

$$(\bar{\Delta a})_1 = \frac{F^2}{2kT} \cdot Z \cdot \frac{2(a_1 - a_2)(\beta_1 - \beta_2)}{15}$$

$$(\bar{\Delta a})_2 = \frac{F^2}{2k^2T^2} \cdot Z \cdot \frac{2(a_1 - a_2) \cdot \mu_0^2}{15}.$$

Povprečna optična dvolomnost molekule raste premo sorazmerno z  $Z$ , to je s  $P$  oz.  $M$ . Ker pa velja isto za molekulsko prostornino  $V$ , je svojski električni dvojni lom neodvisen od polimerizacijske stopnje

$$(20) \quad K_{sv} = \left(\frac{\varepsilon + 2}{3}\right)^2 \left(\frac{n^2 + 2}{3n}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{V_0} (\Theta_1 + \Theta_2),$$

kjer pomenita  $\Theta_1$  in  $\Theta_2$  premikalni in dipolni del dvolomnosti posameznega odseka

$$\Theta_1 = \frac{(a_1 - a_2)(\beta_1 - \beta_2)}{15kT}, \quad \Theta_2 = \frac{2(a_1 - a_2)\mu_0^2}{15k^2T^2}.$$

Električni dvojni lom torej nikakor ni primerno sredstvo za raziskavanje raztopin nitastih velemolekul, vsaj ne v linearnem koncentracijskem območju. To območje je namreč tem ožje, čim večja je polimerizacijska stopnja, tako da pada z rastočim  $P$  tudi absolutna vrednost dvojnega loma  $\Delta n$ , ker pada pri sicer stalnem  $K_{sv}$  koncentracija  $c$ . Praktično ima pa opazovanje *Kerro-*

*vega* efekta svoje težave tudi v tem, da ni mogoče takih raztopin nikoli toliko osnažiti, da bi ne nastopile znatne motnje zaradi prevelike prevodnosti, kar seveda sploh onemogoča natančne meritve.

Električni dvojni lom na normalnih parafinih [20] sicer raste, toda vedno počasneje z rastočim številom ogljikovih atomov tako, da moremo pričakovati, da doseže kmalu neko stalno mejno vrednost. Najdaljši merjenec, triakontan, je že zelo blizu tej limiti. Izgleda, da je potek dvojnega loma precej tak, kot ga moramo pričakovati po zgornji teoriji, ki velja seveda samo za razredčene raztopine in ne za čiste tekočine, v katerih nastopajo prav znatne motnje zaradi vzajemnega vplivanja dotikajočih se molekul. Slednje se pozna med drugim tudi v tem, da dobimo čisto različno optično anizotropnost molekule, če jo izračunamo prvič naravnost iz depolarizacije ravsute svetlobe in drugič iz Kerrove stalnice. Iz poteka dvojnega loma morem sklepati podobno kot iz depolarizacije ravsute svetlobe, da so merjene molekule še zelo kratke za statistično obdelavo, ki zahteva veliko število neodvisnih odsekov.

Magnetni dvojni lom se v teoretski obdelavi ne razlikuje prav nič od električnega, zamenjati moramo le električne polarizirnosti  $\beta$  z magnetnimi  $\gamma$  in električni dipolni moment  $\mu_0$  z magnetnim  $\mu_m$ . Ker je na drugi strani permeabilnost praktično enaka  $l$ , velja za svojsko *Cotton-Moutonovo* stalnico nitaste velemolekule

$$(21) \quad C_{sv} = \left( \frac{n^2 + 2}{3n} \right)^2 \frac{\mu}{V_0} (\Theta_1 + \Theta_2)$$

z okrajšavama

$$\Theta_1 = \frac{2(a_1 - a_2)(\gamma_1 - \gamma_2)}{15kT}, \quad \Theta_2 = \frac{2(a_1 - a_2)\mu_m^2}{15k^2T^2}$$

Tudi magnetni dvojni lom ne kaže nobene odvisnosti od polimerizacijske stopnje  $P$  oz. molekulske mase  $M$ . Kar se tiče praktične strani meritve, so pa razmere pri njem v toliko ugodnejše, ker ni v magnetnem polju nikakih motenj zaradi prevodnosti in z njo združene jouske toplote.

## 7. Lastna židkost

Raztopina ima v splošnem večjo židkost  $\eta_r$  kot topilo  $\eta_t$  samo, če se ne oziramo na razmere pri posebno majhnih raztopljenih molekulah, kjer se včasih razmere tudi obrnejo. Pove-

čavo židkosti si razlagamo z dodatnim trošenjem energije v strujanju zaradi motenj, ki jih povzročajo raztopljeni delci kot tujei v topilu. Kubni centimeter raztopine porabi v linearnem strujnem polju na sekundo  $\eta q^2$  mehanske energije, kjer pomeni  $q$  hitrostni strmec, ki je v linearnem polju povsod enak. Porabljena mehanska energija se pretvori vsa v toploto. Ako imamo v  $\text{cm}^3$  raztopljenih  $N$  delcev, ki se med seboj prav nič ne motijo in katerih vsak porabi storitev  $S$ , potem velja

$$\eta_r q^2 = \eta_t q^2 + N\bar{S}.$$

Od tod dobimo z upoštevanjem zveze  $c = NV$  relativno židkost kot razmerje židkosti raztopine in topila

$$\eta_{rel} = \frac{\eta_r}{\eta_t} = 1 + \frac{N\bar{S}}{\eta_t q^2} = 1 + c \frac{\bar{S}}{V \cdot \eta_t \cdot q^2} = 1 + c[\eta],$$

kjer pomeni  $[\eta]$  po *Philippoffu* [16] lastno židkost topljenca. Ker nastopa v sledečem samo židkost topila  $\eta_t$ , jo bom odslej pisal kar brez indeksa  $t$  tako, da imam

$$(22) \quad [\eta] = \frac{\bar{S}}{V \cdot \eta \cdot q^2} \quad {}^{10}$$

Trošeno storitev  $\bar{S}$  morem nazorno izračunati le pri ravninskem gibanju nitaste molekule. Številčni faktorji bodo zato sicer napačni, toda odvisnost od  $P$  oz.  $Z$  se s to poenostavitvijo nič ne spremeni. V linearnem ravninskem strujanju je hitrost tekočine

$$\vec{v}_s = (0, qx).$$

Molekulo postavim tako, da leži njen začetek v soodrednem izhodišču. Zaradi strujanja se molekula kotali v tekočini. Njeno vrtenje  $\omega$  in vzporedno premikanje  $\vec{v}_o$  sta taki, da ji dela stru-

<sup>10</sup> V splošnem moram upoštevati, da izpodrivajo raztopljeni delci tudi nekaj tekočine tako, da se glasi zgornja zveza pravilno

$$\eta_r q^2 = (1 - c)\eta_t q^2 + N\bar{S}$$

Od tod dobim

$$\eta_{rel} = 1 + c \left( \frac{\bar{S}}{V \cdot \eta_t \cdot q^2} - 1 \right)$$

$$[\eta] = \frac{\bar{S}}{V \cdot \eta_t \cdot q^2} - 1.$$

Le če je prvi člen znatno večji kot 1, smem 1 izpustiti. Pri velemolekulah je ta pogoj vedno izpolnjen

janje kar najmanjšo silo. Ker smemo vse prostorske sile v primeri s površinskimi zanemariti, odpadejo vsi vztrajnostni odpori. Za ravnotežje molekule moram zahtevati, da se uniči tako rezultanta vseh vnanjih sil kot tudi rezultanta vseh momentov teh sil

$$\sum_j \vec{P}_j = 0, \quad \sum_j \mathcal{M}_j = 0.$$

Sile na odseke nastopajo zaradi različne hitrosti strujanja  $\vec{v}_s$  in hitrosti odseka  $\vec{v}_j$

$$\vec{v}_{j,rel} = \vec{v}_s - \vec{v}_j.$$

Po naših privzetkih je hidrodinamski odpor neodvisen od smeri odseka

$$\vec{P}_j = \lambda \cdot \eta \cdot \vec{v}_{j,rel}.$$

Imam tako oba pogoja

$$\sum_j \vec{v}_{j,rel} = 0, \quad \sum_j \vec{r}_j \times \vec{v}_{j,rel} = 0,$$

ki jima ustrezem z nastavkom za hitrost odseka

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_j = (v_{0x} - \omega y_j, v_{0y} + \omega x_j).$$

Stalnice  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  in  $\omega$  imajo vrednosti

$$(23) \quad \begin{aligned} v_{0x} &= \frac{\omega}{Z} \sum_j y_j = q \frac{\left[ \sum x_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum x_j)^2 \right] \cdot \frac{1}{Z} \sum y_j}{[r^2]} = q \cdot \frac{[x^2] \cdot \sum y_j}{Z \cdot [r^2]}, \\ v_{0y} &= \frac{a - \omega}{Z} \sum_j x_j = q \frac{\left[ \sum y_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum y_j)^2 \right] \cdot \frac{1}{Z} \sum x_j}{[r^2]} = q \cdot \frac{[y^2] \cdot \sum x_j}{Z \cdot [r^2]}, \\ \omega &= q \cdot \frac{\sum x_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum x_j)^2}{[r^2]} = q \cdot \frac{[x^2]}{[r^2]} \end{aligned}$$

z okrajšavo

$$\begin{aligned} [x^2] &= \sum x_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum x_j)^2, \quad [y^2] = \sum y_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum y_j)^2, \\ [r^2] &= [x^2] + [y^2] = [r'^2]. \end{aligned}$$

Slednja vrednost je neodvisno od posebne lege molekule v ravnini enaka za vse molekule iste skupine.

Storitev, ki jo troši molekula v strujanju, je enaka storitvi vseh sil  $\vec{P}_j^{21}$

$$S = \sum_j \vec{P}_j \cdot \vec{v}_{j,rel} = \lambda \cdot \eta \sum_j \vec{v}_{j,rel}^2 = \lambda \cdot \eta q^2 \frac{[x^2] \cdot [y^2]}{[r^2]}.$$

Potrebujem povprečje storitve  $S$  za vsako molekulsko skupino posebej in potem še povprečje po vseh oblikah molekul. Zato je treba prepisati zgornji izraz v lastno soredje  $x'$ ,  $y'$  in določiti razdelitveno funkcijo  $F(\Phi)$  za lastno soredje. V primeru totalnega *Brownovega* gibanja, ki me edini zanima, so vse smeri lastnega soredja enako verjetne. Treba mi je torej svojo molekulo enakomerno vrteti okoli izhodišča in poiskati povprečno storitev. Dobim tako za vsako molekulsko obliko izraz

$$S = \lambda \cdot \eta q^2 \left( \frac{1}{8} [r^2] + \frac{1}{2} \frac{[x'^2] \cdot [y'^2]}{[r^2]} - \frac{1}{2} \frac{[x'y']^2}{[r^2]} \right).$$

z okrajšavo

$$[x'y'] = \sum x'_j y'_j - \frac{1}{Z} \sum x'_j \sum y'_j.$$

Povprečni  $\bar{S}$  dobim, če grem po vseh možnih oblikah molekule. Eksaktna tvorba povprečka je skoro neizvedljiva, ker se spreminja tudi imenovalec od oblike do oblike. *Huggins* [5] si je pomagal tako, da je nadomestil v drugem členu<sup>12</sup> povprečje količnika s količnikom povprečnih vrednosti, pri čemer je nadomestil tudi v števcu povprečje produkta s produktom povprečnih množilcev. Zato pa išče povprečje v prostoru namesto v ravnini, kot bi morali pričakovati po tem, da se zanima samo za ravninsko gibanje molekule v strujanju. Iz vseh teh razlogov je seveda številčna vrednost njegovih koeficientov za  $[\eta]$  prav brez vsake veljave, ker ni verjetno, da bi se take samovoljnosti po naključju med seboj prav izravnale.

Za moje namene iskanje natančnega povprečja niti ni potrebno, ker morem iz enačbe za  $S$  brez težav razbrati splošni

<sup>11</sup> Uporabljeni način računanja trošene storitve je sicer zelo enostaven, toda prav gotovo ni čisto pravilen, saj vodi do napačnega poteka podajne židkosti (strukturne viskoznosti) pri podolgovatih delcih in ustreza le pri ploščicah [11].

<sup>12</sup> Pri njegovi dokaj bolj primitivni obdelavi tretji člen sploh odpade, ker se ozira samo na take molekulske oblike, ki imajo somernostno središče. V to postavi izhodišče soredja. Zato je pri njem  $\vec{v}_i = 0$ . Na ta način izpusti seveda večino oblik, ker nesomerne oblike po svojem številu znatno presega jo somerne oblike.

potek  $[\eta]$  s polimerizacijsko stopnjo. Vsi trije členi v oglatem oklepaju so velikostnega reda  $\Sigma r_j^2$ . Povprečje te vsote je po (3) enako  $Z^2 A^2/2$ . Ker nastopa v izrazu za lastno židkost še  $V = Z \cdot V_0$ , je lastna židkost premo sorazmerna polimerizacijski stopnji  $P$ , kakor to zahteva *Staudingerjevo* pravilo,

$$(24) \quad [\eta] = B \cdot \frac{\lambda A^2}{V_0} \cdot Z = B \cdot \frac{\lambda A^2}{V_0 \zeta} \cdot P = K_1 \cdot P,$$

oziroma

$$[\eta] = [\eta]_0 \cdot Z,$$

kjer pomeni  $[\eta]_0$  donos posameznega odseka k lastni židkosti. Stalnica  $B$  je za vse nitaste velemolekule in topila ista, saj zavisi samo od tvorbe povprečja. Ulomek  $\lambda A^2/V_0 \zeta$  vsebuje vse količine, ki so za tisto vrsto molekul in topilo značilne. Enostaven premislek nam pove, da je od  $\zeta$  skoraj neodvisen. Vse tri količine  $\lambda$ ,  $A^2$  in  $V_0$  so v prvem približku sorazmerne  $\zeta$  tako, da ta v ulomku izpade, ostanejo le še količine, ki se nanašajo na osnovni gradnik sam. Togost celotne molekule se pozna le v tem, da je  $A^2/\zeta$ , to je na osnovni gradnik reducirani povprečni kvadrat dolžine odseka tem večji, čim bolj toga je molekula.

Oglejmo si še zvezo s *Staudingerjevim* pravilom

$$\frac{\eta_{sv}}{c_{gr}} = K_m \cdot M^{13}$$

kjer pomeni  $c_{gr}$  tisto koncentracijo, pri kateri se nahaja v 1000 cm<sup>3</sup> raztopine toliko topljenca, kot pove molekulska masa  $M_{gr}$  osnovnega gradnika. Z upoštevanjem gostote topljenca  $\rho$  velja

$$c_{gr} = \frac{1000 \rho}{M_{gr}} \cdot c.$$

Stalnica  $K_m$  je pri vseh res nitastih, nerazvejenih velemolekulah precej enaka, suče se v mejah od 1 do  $18 \cdot 10^{-4}$ . Iz  $[\eta]$  dobimo za  $K_m$  izraz

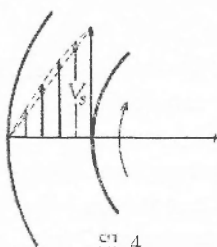
$$(25) \quad K_m = 10^3 \frac{[\eta]}{\rho \cdot P} = 10^{-3} B \cdot \frac{\lambda A^2}{v_0 \zeta \rho} = 10^{-3} \frac{K_1}{\rho},$$

na katerem se takoj vidi, da se ne spremeni znatno, vsaj ne za cel velikostni red, pri prehodu od ene snovi do druge.

<sup>13</sup> Svojska židkost je enaka za 1 zmanjšani relativni židkosti  $\eta_{sv} = \eta_{rel} - 1 = c \cdot [\eta]$ .

## 8. Strujni dvojni lom.

V linearnem strujnem polju se posamezni delci vrtijo z neenakomerno hitrostjo. V onih smereh, kjer je hitrost vrtenja najmanjša, se delci kopičijo, v smereh največje hitrosti pa je njihovo število najmanjše. Tekočina postane tako v vsaki točki neenakolika, anizotropnost pa je po vsej tekočini enaka. Linear-  
no strujanje se nam razvije med dvema vzporednima, ravnima stenama, katerih ena miruje, druga pa se premika enakomerno in vzporedno sama v sebi. Praktično uresničimo to premikanje z dvema skoraj enakima, istoosnima valjema, od katerih eden miruje, drugi pa se enakomerno vrti (*Coutteova* aparatura). Strujno polje med valjema je tem bolj linearno, čim manjša je razdalja valjev v primeri s polmerom notranjega valja. Hitrost tekočine na mirujočem valju je nič in doseže največjo vrednost na vrtečem se valju (sl. 4).



Anizotropnost tekočine se kaže tudi v optičnem oziru, strujoča tekočina postane dvolomna. Pri opazovanju v smeri največje oz. najmanjše gostote delcev. Obe oklepata pri nastopu efekta,  $q \rightarrow 0$ , kot  $45^\circ$  s smerjo strujanja.

Razdelitev delcev v ravnini strujanja dobimo iz difuzijske enačbe. Delci se neenakomerno vrtijo s kotno hitrostjo  $\omega = \Phi$ , njih urejeni tok je podan s

$$\Phi \cdot F,$$

kjer pomeni  $F$  gostoto delcev v smeri  $\Phi$ . Temu urejenemu toku se pa nadlaga neurejeno *Brownovo* gibanje, ki skuša vse razlike v razdelitvi delcev izbrisati. Tudi to povzroča tok delcev, ki je usmerjen z mesta večje gostote delcev na kraje z manjšo gostoto

$$-D \cdot \frac{\delta F}{\delta \Phi}.$$

Sorazmernik  $D$  je rotacijsko difuzijska stalnica delcev. V vsak smerni element  $d\Phi$  vstopajo delci in zopet izstopajo zaradi obeh tokov. Prebitek vstopajočih nad izstopajočimi da porast števila delcev v odseku. V stanovitnem ravnotežju pa ostane gostota delcev povsod neizpremenjena

$$\frac{\delta}{\delta \Phi} \left( \Phi F - D \frac{\delta F}{\delta \Phi} \right) = 0,$$

kar pove, da je tok delcev za vsak  $\Phi$  enak. Ker je tedaj  $F$  samo še funkcija kota  $\Phi$ , smem pisati totalne odvode

$$(26) \quad \Phi \cdot F - D \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\Phi^2} = \text{konst.} = \frac{q}{4\pi\epsilon}$$

Tej enačbi zadošča razdelitvena funkcija  $F(\Phi)$ .

V našem primeru ima vsaka molekulska oblika svojo enačbo te vrste s posebnim  $\Phi$  in  $D$ . Kotno hitrost  $\omega$  iz enačbe (23) prepišem v odlikovano soredje molekule  $x', y'$ . Z uvedbo okrajšav

$$\beta_0 = \frac{[x'^2] - [y'^2]}{[r'^2]} = \frac{\beta}{[r'^2]},$$

$$\gamma_0 = \frac{[x'y']}{[r'^2]} = \frac{\gamma}{[r'^2]},$$

se piše kotna hitrost kot funkcija lege odlikovanega soredja

$$(27) \quad \omega = \dot{\Phi} = \frac{q}{2} (1 + \beta_0 \cos 2\Phi - 2\gamma_0 \sin 2\Phi).$$

Rotacijsko difuzijska stalnica je definirana kot razmerje med  $kT$  in odpornim momentom  $\mathcal{M}$  molekule pri vrtenju s kotno hitrostjo  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ . Čisto vrtenje molekule opišemo s hitrostnim vektorjem

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_j = (v_{0x} - \omega y_j, v_{0y} + \omega x_j),$$

ki mora zadoščati pogoju

$$\sum_j \vec{v}_j = 0,$$

ki pove, da nimamo nobene translacijske komponente. Odporni moment  $i$ -tega odseka je

$$\mathcal{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \vec{r}_i \times \lambda \eta \vec{v}_i = \lambda \eta (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}),$$

za celo molekulo torej odporni moment pri  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$

$$\mathcal{M} = \frac{\sum \mathcal{M}_i}{\omega} = \lambda \cdot \eta [r^2].$$

To mi da za  $D$

$$(28) \quad D = \frac{kT}{\mathcal{M}} = \frac{kT}{\lambda \eta} \cdot \frac{1}{[r^2]}.$$

Z uvedbo okrajšave

$$(29) \quad a = \frac{\lambda \cdot \eta \cdot q}{4kT}$$

se piše difuzijska enačba

$$(30) \quad \frac{dF}{d\Phi} - 2a (\beta \cos 2\Phi - 2\gamma \sin 2\Phi) \cdot F = 2a [r^2] \left( F - \frac{1}{2\pi} \right).$$

Rešitev nastavim kot neskončno vrsto po potencah  $a$

$$(31) \quad F = F_0 + a F_1 + a^2 F_2 + \dots = \\ = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + a (\beta \sin 2\Phi + 2\gamma \cos 2\Phi) + a^2 \left( [r^2] [2\gamma \sin 2\Phi - \beta \cos 2\Phi] + \right. \right. \\ \left. \left. + b\gamma \sin 4\Phi - \frac{\beta^2 - 4\gamma^2}{4} \cos 4\Phi \right) + \dots \right].$$

Prav značilno je, da v prvem členu z  $a$ , ki je odločilen za začetni dvojni lom, ne nastopa več eksplicitno rotacijsko difuzijska stalnica  $D$ . Izraz  $a$  sam po sebi ni majhen, pač pa produkt  $a \cdot \beta$  oz.  $a \cdot \gamma$  tako, da je konvergenca vrste vsaj za majhne  $q$  zagotovljena.

Optično polje, katerega električni vektor  $\vec{E}_x$  oz. vektor izzivne poljske jakosti  $\vec{F}_x$  leži v smeri osi  $x$ , inducira v molekuli električni moment, katerega komponenti v smeri obeh osi  $x$  in  $y$  sta

$$p_x = \bar{F}_x \sum_j (a_1 \cos^2 \varphi_j + a_2 \sin^2 \varphi_j) = a_{xx} \cdot \bar{F}_x,$$

$$p_y = \bar{F}_x (a_1 - a_2) \sum_j \sin \varphi_j \cos \varphi_j = a_{yx} \cdot \bar{F}_x.$$

Prav tako dobimo pri vnanjem polju  $\vec{E}_y$  v smeri osi  $y$

$$p_x = \bar{F}_y (a_1 - a_2) \sum_j \sin \varphi_j \cos \varphi_j = a_{xy} \cdot \bar{F}_y,$$

$$p_y = \bar{F}_y \sum_j (a_1 \sin^2 \varphi_j + a_2 \cos^2 \varphi_j) = a_{yy} \cdot \bar{F}_y.$$

Izračunati moram povprečje po vseh legah molekule. Zato moram izraziti vse kotne funkcije s kotom  $\Phi$ , ki mi da smer molekule, in s koti  $\varphi'_j$ , ki se nanašajo na pomožno sooredje molekule,

$$a_{xx} = Z \cdot a_1 - (a_1 - a_2) \left[ \sum \cos^2 \varphi'_j - 2 \cos^2 \Phi \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sin \Phi \cos \Phi \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j \right],$$

$$a_{xy} = a_{yx} = (a_1 - a_2) \left[ (2 \cos^2 \Phi - 1) \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j + \right. \\ \left. + 2 \sin \Phi \cos \Phi \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) \right],$$

$$a_{yy} = Z a_2 + (a_1 - a_2) \left[ \sum \cos^2 \varphi'_j - 2 \cos^2 \Phi \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sin \Phi \cos \Phi \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j \right].$$

Povprečje po vseh legah pomožnega soredja dobim z upoštevanjem razdelitvene funkcije  $F$ , ki mi da oba izraza

$$2 \overline{\cos^2 \varphi} = 1 + a\gamma - a^2 [r^2] \frac{\beta}{2} + \dots,$$

$$2 \overline{\sin \varphi \cos \varphi} = a \left( \frac{\beta}{2} + a\gamma [r^2] + \dots \right).$$

V  $\beta$ ,  $\gamma$  in  $[r^2]$  nastopajo lastne koordinate odsekov,  $\varphi'_j$ , pa kažejo njihove lastne smeri. Ker ustreza vsaki molekulski obliki zrcalno enaka oblika, odpadejo pri tvorbi povprečja vse v  $y'_j$  oz.  $\varphi'_j$  lihe funkcije, to je  $\gamma$  in  $\sum_j \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j$  kot tudi mešani produkti  $\gamma \sum_j \cos^2 \varphi'_j$  in  $\beta \sum_j \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j$ . Dobim tako za povprečne polarizirnosti molekule vrednosti

$$\begin{aligned} \bar{a}_{xx} &= Z \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_1 - a_2) \frac{a^2}{2} \left[ \beta [r^2] \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma [r^2] \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j + \dots \right] = Z \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_1 - a_2) \frac{a^2}{2} \cdot II, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{xy} &= (a_1 - a_2) \cdot \frac{a}{2} \left[ \beta \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j + \dots \right] = (a_1 - a_2) \cdot \frac{a}{2} \cdot I, \end{aligned}$$

$$a_{yy} = Z \frac{a_1 + a_2}{2} + (a_1 - a_2) \cdot \frac{a^2}{2} \cdot II.$$

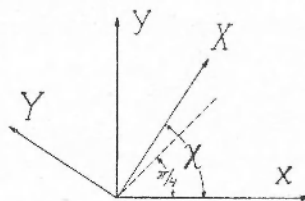
Nenapisani členi vsebujejo višje potence  $a$ , ki jih ne bom potreboval. Glavni osi polarizirnosti  $X$  in  $Y$  se ne ujemata s koordinatnima osema  $x$  in  $y$ , ker se  $\bar{a}_{xy}$  ne uniči, marveč oklepata z njima nek kot  $\chi$ . Po zakonih tenzorske transformacije dobimo za  $\text{tg } 2\chi$  in za razliko glavnih polarizirnosti  $\bar{\Delta a}$  izraza

$$(32) \quad \text{tg } 2\chi = \frac{2\bar{a}_{xy}}{\bar{a}_{xx} - \bar{a}_{yy}} = \frac{I}{a} \frac{I}{II},$$

$$\bar{\Delta a} = a_x - a_y = \sqrt{(\bar{a}_{xx} - \bar{a}_{yy})^2 + 4\bar{a}_{xy}^2} \approx (a_1 - a_2) \cdot a \cdot I,$$

ker se začne vrsta za razliko  $a_{xx} - a_{yy}$  s kvadratnim členom v  $a$ , vrsta za  $2\bar{a}_{xy}$  pa z linearnim in mi gre samo za vrednosti v limiti, če gre  $a$  proti 0 tako, da smem vse višje potence zanemariti. Z upoštevanjem razvrstitve za  $\text{tg } 2\chi$  v bližini  $\chi = \pi/4$  imam za  $\chi$

$$\chi - \frac{\pi}{4} = \frac{a}{2} \cdot \frac{II}{I},$$



Sl. 5.

to se pravi, glavni optični osi tekočine pri strujanju oklepata v začetku kot  $45^\circ$  s smerjo strujanja  $y$ , pri rastočem  $q$  se pa ta kot manjša. Hitrost odmikanja od začetne smeri je prav podana s količnikom  $II/I$ . Števec in imenovalec se razlikujeta le za faktor  $[r^2]$  tako, da bo količnik tudi prav tega velikostnega reda, kar mi da

$$(33) \quad Z - \frac{\pi}{4} = q \cdot C_1 \cdot \frac{\eta}{T} \cdot \lambda A^2 Z^2 = q \cdot C_1 \cdot \frac{\eta}{T} \cdot \frac{\lambda A^2}{\zeta^2} \cdot P^2 = q \cdot K_2 \cdot P^2.$$

Hitrost odmikanja prednostne smeri od lege  $45^\circ$  se vrši premo sorazmerno s kvadratom polimerizacijske stopnje. Stalnica  $C_1$  je za vse velemolekule in topila ista. Faktor  $\eta/T$  meri neposredno vpliv zunanjih činiteljev. Izraz  $\lambda A^2/\zeta^2$ , ki je zopet v prvem približku neodvisen od  $\zeta$ , meri posebne lastnosti dane nitaste velemolekule. Enako kot pri lastni židkosti nastopa togost  $\zeta$  le indirektno tako, kot raste  $A^2/\zeta$ , to je na osnovni gradnik reducirani povprečni kvadrat dolžine odseka.

Za svojski strujni dvojni lom oz. za svojsko *Maxwellovo* stalnico, ki je po *Peterlinu* in *Stuartu* [13] definirana kot

$$M_{sv} = \left( \frac{\Delta n}{c \cdot n \cdot \eta \cdot q} \right)_{c=0, q=0} = \left( \frac{n^2 + 2}{3n} \right)^2 \cdot \frac{2\pi}{V} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\eta q},$$

dobim iz (32) z upoštevanjem (6) izraz

$$(34) \quad \begin{aligned} M_{sv} &= \left( \frac{n^2 + 2}{3n} \right)^2 \cdot C_2 \cdot \frac{1}{T} (a_1 - a_2) \cdot \frac{\lambda A^2}{V_0} \cdot Z = \\ &= \left( \frac{n^2 + 2}{3n} \right)^2 \cdot C_2 \cdot \frac{1}{T} (a_1 - a_2) \cdot \frac{\lambda A^2}{V_0 \zeta} \cdot P = K_3 \cdot P, \end{aligned}$$

oz.

$$M_{sv} = M_{sv,0} \cdot Z,$$

kjer zopet pomeni  $M_{sv,0}$  donos posameznega odseka k dvojnemu lomu molekule. Svojski strujni dvojni lom je premo sorazmeren polimerizacijski stopnji  $P$  oz. molekulski masi  $M$ , kot to tudi kažejo meritve *Signerja* in *Grossa* [19] ter *Wisslerja* [22] na polimerno homolognih vrstah. Stalnica  $C_2$  je zopet za vse velemolekule in topila ista. Vpliv zunanjsčine in topila merita neposredno prvi in tretji faktor.  $V (a_1 - a_2)$  nastopa indirektno, toda bistveno vpliv topila, kot sem to že omenil pri privzetkih (op. 6). Izraz  $\lambda A^2/V_0 \zeta$ , ki meri posebne lastnosti nitaste molekule v tisti raztopini, se popolnoma sklada z ustrežajočim faktorjem pri lastni židkosti, kar kaže na tesno povezanost obeh pojavov. Togost celotne molekule se pozna le v tem, da sta tako  $(a_1 - a_2)$

kot tudi  $A^2/\zeta$ , to je na osnovni gradnik reducirani povprečni kvadrat dolžine, tem večja, čim bolj toga je molekula.

Iz primerjave  $[\eta]$  in  $M_{sp}$  vidimo, da se oba izraza razlikujeta v glavnem le v optičnem faktorju, ki pa je za isto topilo in isto polimerno homologno vrsto velemolekul vedno enak. Če nam gre samo za določitev polimerizacijske stopnje  $P$ , nam ne prinese opazovanje strujnega dvojnega loma nič novega, česar ne bi že dala mnogo enostavnejša meritev lastne židkosti. V obeh primerih moramo svojo določevalno metodo šele umeriti, to se pravi izvršiti eno meritev z znanim  $P$  oz.  $M$ , da dobimo velikost sorazmernikov  $K_2$  oz.  $K_3$ . Metodi sta samo relativni. Isto velja za meritev spremembe prednostne smeri s strmcem hitrosti.

### 9. Polidisperznost.

Raztopine velemolekul niso nikoli enakšne v tem smislu, da bi imeli same enake molekule z isto molekulsko maso oz. polimerizacijsko stopnjo. Vedno nastopa cela množica  $P$  oz.  $M$ . V  $cm^3$  imamo n. pr.  $N_1$  molekul z  $M_1$ ,  $N_2$  z  $M_2$  itd., oz. njihove koncentracije so  $c_1$ ,  $c_2$ , itd. Celotno število raztopljenih molekul je

$$N = N_1 + N_2 + \dots,$$

koncentracija raztopine pa

$$c = c_1 + c_2 + \dots$$

Zgoraj obravnavani efekti se spremenijo zato v tem smislu, da merimo vedno le povprečje po vseh nastopajočih  $Z$  oz.  $P$ . Glede na oblike svojih izrazov potrebujem samo povprečke  $Z$  in  $Z^2$ . Ogleдал si bom sledeče tri možnosti:

1. Nastopata le dve vrsti molekul  $M_1$  in  $M_2$  s koncentracijama  $c_1$  in  $c_2$ . Število molekul je v tem primeru

$$N_1 = \frac{c_1}{V_1} = \frac{c_1}{Z_1 \cdot V_0}, \quad N_2 = \frac{c_2}{V_2} = \frac{c_2}{Z_2 \cdot V_0}.$$

2. Molekule se kopičijo okoli neke prednostne molekulske mase  $M_0$  tako, da je porazdelitev števila molekul na posamezne mase  $M$  oz.  $Z$  podana z *Gaussovo* verjetnostno funkcijo

$$N(Z) = \frac{N}{B\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{Z-Z_0}{B}\right)^2}.$$

Zahtevam, da bodi  $B$ , ki meri polidisperznost, vedno majhen v primeri z  $Z_0$  tako, da smem raztegniti integracijsko območje od

pravih mej  $(0, \infty)$  v meje  $(-\infty, +\infty)$ . Pri  $|Z - Z_0| = B$  pade gostota delcev na  $1/e = 0.37$ , v obsegu od  $Z_0 - B$  do  $Z_0 + B$  se nahaja 84 % vseh delcev.

3. Molekule se kopičijo okoli neke prednostne molekulske mase  $M_0$  tako, da je razdelitev koncentracij podana z *Gaussovo* verjetnostno funkcijo

$$C(Z) = \frac{C}{B\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{Z-Z_0}{B}\right)^2}$$

Število molekul z  $Z$  odseki je

$$N(Z) = \frac{C(Z)}{Z \cdot V_0} = \frac{C}{B \cdot V_0 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{Z} \cdot e^{-\left(\frac{Z-Z_0}{B}\right)^2}$$

Najpogostejša molekula je krajša kot ona, ki ima največjo koncentracijo.

Refrakcija, polarizacija, električni in magnetni dvojni lom polidisperznosti nič ne občutijo, saj so ti efekti pri polimerizirani velemolekuli prav taki kot pri osnovnem gradniku oz. pri odseku iz  $\xi$  gradnikov. Drugače je pri ostalih efektih.

*Depolarizacija razzute svetlobe* se dobi kot količnik  $J$  in  $J_2$ .

$$\begin{aligned} 1. \quad \bar{Z} &= \frac{N_1 Z_1 + N_2 Z_2}{N_1 + N_2} = \frac{C}{C_1(Z_1 + C_2)Z_2} = Z_1 Z_2 \cdot \frac{C}{C_1 Z_2 + C_2 Z_1}, \\ \bar{Z}^2 &= \frac{N_1 Z_1^2 + N_2 Z_2^2}{N_1 + N_2} = \frac{C_1 Z_1 + C_2 Z_2}{C_1(Z_1 + C_2)Z_2} = Z_1 Z_2 \cdot \frac{C_1 Z_1 + C_2 Z_2}{C_1 Z_2 + C_2 Z_1}, \\ \delta^2 &= \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cdot \bar{Z}}{(\alpha_1 + 2\alpha_2)^2 \cdot Z^2} = \delta_0^2 \cdot \frac{C}{C_1 Z_1 + C_2 Z_2} = \delta_0^2 \cdot \frac{N_1 Z_1 + N_2 Z_2}{N_1 Z_1^2 + N_2 Z_2^2}. \end{aligned}$$

Povprečna optična anizotropnost ustreza anizotropnosti povprečne molekule, ki jo dobimo, če ne upoštevamo števila posameznih vrst molekul, ampak le njihove koncentracije. Število povprečnih molekul je manjše kot vsota malih in velikih molekul  $N_1 + N_2$ , velike molekule so pri depolarizaciji razzute svetlobe bolj udeležene kot ustreza njihovem številu.

$$\begin{aligned} 2. \quad \bar{Z} &= \frac{1}{B\sqrt{\pi}} \int_0^\infty Z \cdot e^{-\left(\frac{Z-Z_0}{B}\right)^2} dZ = Z_0, \\ \bar{Z}^2 &= \frac{1}{B\sqrt{\pi}} \int_0^\infty Z^2 \cdot e^{-\left(\frac{Z-Z_0}{B}\right)^2} dZ = Z_0^2 \left(1 + \frac{B^2}{2Z_0^2}\right), \\ \delta^2 &= \delta_0^2 \frac{1}{Z_0 \left(1 + \frac{B^2}{2Z_0^2}\right)}. \end{aligned}$$

Vpliv večjih molekul se pokaže v tistem smislu kot zgoraj v tem, da se optična anizotropnost zmanjša, torej tako kot bi velike molekule prevladovala.

3. Pri iskanju povprečnih vrednosti moram upoštevati, da je le razdelitvena funkcija za koncentracije normirana, ne pa tista za število posameznih molekulskih vrst. Zato imam

$$\bar{Z} = \frac{\int e^{-\left(\frac{Z-Z_0}{B}\right)^2} dZ}{\int \frac{1}{Z} e^{-\left(\frac{Z-Z_0}{B}\right)^2} dZ} = Z_0 \left(1 - \frac{B^2}{2Z_0^2} + \dots\right),$$

$$\bar{Z}^2 = Z_0^2 \left(1 - \frac{B^2}{2Z_0^2} + \dots\right)$$

in odtod

$$\delta^2 = \left(\frac{\delta_0^2}{Z_0}\right),$$

optična anizotropnost je taka, kot bi imeli samo molekule, ki nastopajo v največji koncentraciji.

*Lastna židkost* enovrstne raztopine je premo sorazmerna številu odsekov  $Z$ . Razmerje pri mnogovrstni raztopini pregledam najlaže pri svojski židkosti

$$\eta_{sv} = [\eta] \cdot c = \eta_{rel} - 1 = \sum_j c_j [\eta]_j$$

kar mi da potem

$$[\eta] = \frac{1}{c} \sum_j c_j [\eta]_j.$$

$$1. [\eta] = [\eta]_0 \cdot \frac{c_1 Z_1 + c_2 Z_2}{c} = [\eta]_0 \cdot \frac{N_1 Z_1^2 + N_2 Z_2^2}{N_1 Z_1 + N_2 Z_2}$$

$$2. [\eta] = [\eta]_0 \cdot Z_0 \left(1 + \frac{B^2}{2Z_0^2}\right),$$

$$3. [\eta] = [\eta]_0 \cdot Z_0.$$

*Strujni dvojni lom.* Za svojsko *Maxwellovo* stalnico veljajo prav enaka povprečja kot pri lastni židkosti

$$1. M_{sv} = M_{sv,0} \cdot \frac{c_1 Z_1 + c_2 Z_2}{c} = M_{sv,0} \cdot \frac{N_1 Z_1^2 + N_2 Z_2^2}{N_1 Z_1 + N_2 Z_2},$$

$$2. M_{sv} = M_{sv,0} \cdot Z_0 \left(1 + \frac{B^2}{2Z_0^2}\right),$$

$$3. M_{sv} = M_{sv,0} \cdot Z_0.$$

Sprememba prednostne smeri  $\chi$  z rastočim strmcem hitrosti raste sorazmerno s kvadratom  $P$ , kot kaže količnik iz II in I.

Stevec je v glavnem sorazmeren  $Z^4$ , imenovalce pa  $Z^2$  tako, da imam

$$\chi - \frac{\pi}{4} = q \frac{H}{I} = q \cdot K_2 \frac{\sum N_j Z_j^4}{\sum N_j Z_j^2}.$$

S tem izračunam

$$1. \chi - \frac{\pi}{4} = q K_2 \frac{c_1 Z_1^4 + c_2 Z_2^4}{c_1 Z_1^2 + c_2 Z_2^2} = q K_2 \frac{N_1 Z_1^4 + N_2 Z_2^4}{N_1 Z_1^2 + N_2 Z_2^2},$$

$$2. \chi - \frac{\pi}{4} = q K_2 \cdot Z_0^2 \frac{1 + 3 \frac{B^2}{Z_0^2}}{1 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{Z_0^2}} \approx q K_2 \cdot Z_0^2 \left(1 + \frac{5}{2} \frac{B^2}{Z_0^2}\right).$$

Pri tem sem zanemaril višje potence razmerja  $B^2/Z^2$ .

$$3. \chi - \frac{\pi}{4} = q K_2 \cdot Z_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{B^2}{Z_0^2}\right).$$

Za polidisperzno raztopino dobim torej iz meritve depolarizacije razsute svetlobe, lastne židkosti in svojske *Maxwellove* stalnice vedno isto povprečno molekulsko maso

$$\bar{M} = \bar{M}_{gr} \cdot P = M_{gr} \cdot \xi \cdot \bar{Z},$$

medtem ko mi da meritev spremembe prednostne smeri s strmecem hitrosti večje povprečje, pri čemer znaša razlika  $3 B^2/4 Z_0^2$ , če smem vzeti *Gaussovo* razdelitev za število molekul ali za njihove koncentracije po posameznih vrstah. Ker imajo različne raztopine v splošnem različno polidisperznost, to je različno razmerje  $B/Z_0$ , so razmerja določenih povprečnih molekulskih mas  $\bar{M}$  v splošnem drugačna, kot ustreza njihovim  $\bar{Z}$ . Čim večja je polidisperznost pri sicer enakem  $Z_0$ , tem večjo molekulsko maso izmerimo.

#### 10. P o v z e t e k.

Za ne preveliko nitasto velemolekulo da klobčični model pravilni potek depolarizacije razsute svetlobe, refrakcije, polarizacije, električnega dvojnega loma, strujnega dvojnega loma in lastne židkosti s polimerizacijsko stopnjo. Če se omejim pri zadnjih dveh samo na začetne vrednosti, ki nastopajo pri majhnem strmecu hitrosti, smem vzeti za obliko molekule tog klobčič, ki ga dobim, če popolnoma brez reda sestavljam odseke iz  $\xi$  osnovnih gradnikov, kjer pomeni  $\xi$  ono število gradnikov, ki je od okolice že praktično neodvisna, in upoštevam vse možne razporedbe, ki tako nastanejo. Ako pomenijo izrazi z indeksom  $n$

prispevek posameznega odseka, se glase vrednosti za velemolekulo

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \delta_0^2 \cdot \frac{\zeta}{P}, \\ [\eta] &= [\eta]_0 \cdot \frac{P}{\zeta} = K_1 \cdot P, \\ \chi - \frac{\pi}{4} &= q \cdot K_2 \cdot P^2, \\ M_{sv} &= M_{sv,0} \cdot \frac{P}{\zeta} = K_3 \cdot P.\end{aligned}$$

Številčni sorazmerniki  $\delta_0^2 \zeta$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , pri posameznih efekatih merijo svojske lastnosti tiste polimerno homologne vrste, v prvi vrsti togost molekul, ki jo označuje stalnica  $\zeta$ . Vendar pa niso razmere tako preproste, da bi mogli neposredno iz izmerkov določiti  $\zeta$  in s tem sklobčenost molekule, to je razmerje med največjo možno dolžino molekule in med njeno povprečno dolžino.

Refrakcija, polarizacija, električni in magnetni dvojni lom so pa popolnoma neodvisni od polimerizacijske stopnje oz. od molekulske mase. Prva dva efekta sta pri velemolekuli prav taka kot pri osnovnem gradniku, druga dva pa ustrezata vrednostim, ki bi jih dal odsek iz  $\zeta$  osnovnih gradnikov.

Polidisperznost vpliva na vse 3 linearne efekte v enakem smislu tako, da dajo pri meritvi vsi isto povprečno polimerizacijsko stopnjo  $\bar{P}$ . Iz kota  $\chi$  pa dobimo vedno v razmerju  $(1 + 3B^2/4Z^2)$  preveliko vrednost. Pri primerjavi dveh sicer enakih vzorcev, ki se razlikujeta le po širini polidisperznosti  $B$ , kaže bolj homogenizirana raztopina manjši povprečni  $\bar{P}$ .

## SLOVSTVO

1. P. Debye, Hdb. Radiologie VI, Leipzig 1935.
2. R. Eisenschitz, Z. phys. Chemie (A) 163, 133 (1933).
3. R. Gans, Ann. Physik 62, 331 (1920), 65, 97 (1921).
4. G. L. de Haas-Lorentz, Brownsche Bewegung, Braunschweig 1913.
5. M. L. Huggins, J. phys. Chemistry 42, 911 (1938), 43, 439 (1939),  
J. appl. Physics 10, 700 (1939).
6. W. Kuhn, Kolloid Z. 68, 2 (1934).
7. W. Kuhn, Z. phys. Chemie (A) 161, 1 (1932).
8. W. Kuhn, Helv. Chim. Acta 26, 1394 (1943).
9. W. Kuhn, in F. Grün, Kolloid Z. 101, 248 (1942).
10. W. Lotmar, Helv. Chim. Acta 21, 953 (1938).
11. A. Peterlin, Z. Physik 111, 232 (1938), Kolloid Z. 86, 230 (1939).
12. A. Peterlin, Zbornik prir. dr., Ljubljana 3, 28 (1943).
13. A. Peterlin in H. A. Stuart, Z. Physik 112, 1 (1939).
14. A. Peterlin in H. A. Stuart, Z. Physik 112, 129 (1939).
15. A. Peterlin in H. A. Stuart, Hd. u. Jb. chem. Physik 8/IB, Leipzig 1943
16. W. Philippoff, Viskosität der Kolloide, Dresden in Leipzig 1942.
17. A. Polson, Kolloid Z. 88, 51 (1939).
18. Ch. Sadron, J. phys. Radium (7) 8, 481 (1937).
19. R. Signer in H. Gross, Z. phys. Chemie (A) 165, 161 (1933).
20. H. A. Stuart, Hd. u. Jb. chem. Physik 10/III, Leipzig 1939.
21. H. A. Stuart, Naturw. 31, 123 (1943).
22. A. Wissler, Disertacija, Bern 1941.





## Random coil model of the thread-molecule

### 1. Introduction.

Thread-molecules can be imagined either as small rigid rods or soft more or less flexible threads. But various effects, — e. g. the degree of depolarisation of scattered light, the intrinsic viscosity, the double refraction of flow in dilute solutions of high polymers, — if calculated according to the first assumption, show a dependence on the degree of polymerisation wholly disagreeing with the experimental data. On the contrary, the assumption of more or less kinked, flexible thread-molecules leads to correct results as for the effects mentioned above.

Theoretical treatment of a flexible thread-molecule is by far more difficult than that of a rigid rod, and, moreover it does not give any exact solution at all. The first steps are due to *Kuhn* [6] who applied the known statistical considerations of *de Haas-Lorentz* [4] for the determination of the most probable shape of such molecules. The present investigation is based on his reasonings. A particular stress is laid on the exact exposition of all assumptions, on the justification of each step, on the precise formulation of the results obtained, to let clearly appear their essence and the limitations to their validity. Gross approximations, instead of the exact calculation of mean values and unfounded simplifications are purposely avoided as especially misleading. The experimenter, using the equations in his practical work, easily overlooks their limitations, but briefly mentioned, and sticks to numerical values that are surely uncertain.

In this paper only such effects have been considered, where the external field or the flow respectively has no influence on the statistical form of the molecule, the molecule is so to speak »rigid« as to the external field (first approximation). By the same assumption *Huggins* [5] has succeeded in deducing the viscosity rule of *Staudinger*. In the present paper the general dependence of the mentioned effects on the degree of polymerisation  $P$  has been investigated. The numerical coefficients in the equations seem far less important, since they are affected by many rather arbitrary parameters which can easily be chosen

in such a way as to obtain any desirable approximation to the experimental data.<sup>1</sup>

Therefore the calculation has been generally extended only so far as to make appear clearly the characteristic features: in the case of scattered light, refraction, polarisation, electrical double refraction the three-dimensional computation was simple. Specific viscosity and double refraction of flow have been treated for two dimensions only, because the three-dimensional computation would be too cumbersome.

The dependence on the polymerisation degree, a modest task, but nevertheless containing all that can really be calculated and not only guessed, can be computed with a very simple mathematical apparatus. The problem of the chain-like macromolecule, in the present first approximation of a »rigid« randomly kinked thread, is simpler than expected, quite conforming to the simplicity of the observed effects, the majority of which can be described by the simplest, i. e. linear, function.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> To show this, let us consider the frequently used viscosity formula of Kuhn [7] for rigid rods  $[\eta] = 2,5 + p^2/16$ . The formula has been derived on the evidently erroneous assumption of a »plane« motion of the particles, and on the further supposition of a great value of the axial ratio  $p = a_1/a_2$ . Kuhn's rigid model consists of a number of equal spheres on a straight axis, the distance between sphere centers being twice the sphere diameter. For the volume of the model he takes the volume of the circumscribed cylinder,  $V = 2\pi p \cdot R^3$ . But all these assumptions affect essentially the numerical factor  $1/16$ . By changing them, and assuming the only correct »space«-motion of the particles, and taking for the volume of the particle the volume of the spheres only,  $V = 2\pi p R^3/3$ , we get the factor  $1/10$ , in concordance with the value measured by Polson [17] on proteins. By choosing another distance of the spheres, it is possible to vary the numerical value yet further. By the way, the method of computing the dissipated power  $S$  — is rather contestable, because its consequence is a quite wrong trend of structural viscosity, at least for elongated particles [11]. Similarly the Einstein term  $2,5$  is added in Kuhn's formula only to get the expression suited also for sphere-like particles. For that case, Polson has found the numerical value  $4,0$ . Physically important in Kuhn's formula is the dependence of intrinsic viscosity upon  $p^2$ .

<sup>2</sup> See also the short notice [12], published a year ago (1943), for the most important results of the present paper concerning the part played by the dependence of the single effects on the degree of polymerisation, in solving the question whether to assume rigid rod-like or flexible thread-like particles.

Finally the influence of polydispersity on the single effects has been examined. The actual solutions of highmoleculars are never homogenous, and there are only mean values measured, which may considerably differ in accordance with the chosen kind of averaging.

## 2. Assumptions.

The molecule consists of  $P$  equal fundamental units of molecular weight  $M_{gr}$ . According to the kind of linkage, there exists a possibility of partial or complete rotation about the bond axis. If the valency angle differs from  $180^\circ$  or if the bond is somewhat flexible, a sufficiently great group of fundamental units becomes practically independent from the position and orientation of the remaining part. The molecule gets divided — so to speak — in a number  $Z$  of free independent segments of  $\zeta$  terms each,  $P = \zeta \cdot Z$ . The letter  $A$  denotes the mean length of a segment. With the rigidity of the molecule  $\zeta$  increases, and the greater is also the ratio  $A^2/\zeta$ .

In conformity with the conception of independence, we assume for each segment equal optical ( $a_1, a_2 = a_3$ ), electrical ( $\beta_1, \beta_2 = \beta_3$ ) and magnetic ( $\gamma_1, \gamma_2 = \gamma_3$ ) polarizability, the same dipole moment  $\mu_2$  in the axis of the segment, and the hydrodynamic coefficient of resistance  $\lambda^3$ .

The single segments are considered as equal and equivalent; all interactions between themselves may be neglected.

We obtain a possible form of the molecule by joining  $Z$  independent elements where their orientation remains quite arbitrary. We get the total amount of all occurring molecule-forms by prescribing to each single element equally all orientations in space. The square mean value of the projection of each segment on any fixed direction is equal to  $A^2/3$  in the space and to  $A^2/2$  in the plane.

The outer field changes this uniform distribution on all directions. This change is generally small on the single segment

<sup>3</sup> To simplify,  $\lambda$  is assumed as independent from the direction of flow,  $\vec{K} = \lambda \cdot \eta \cdot \vec{v}_{rel}$ . Strictly considered, the linear segment is surely hydrodynamically not isotropic, there is less resistance to flow in the length direction than in a transverse direction. The dimension of the coefficient  $\lambda$  is that of a length. According *Stokes*, its value for a sphere is  $6\pi a$ . This applied to our model gives  $\lambda$  about  $50 A$ .

and gets remarkable only on the molecule as a whole. As we consider the first approximation of all the effects mentioned above we may neglect the independent orientation of the single segments, i. e. the deformation of the molecule, against the orientation of the molecule as a whole. With other words, the orientation of the molecule is as if it were »rigid«.

### 3. Statistical mean values

Considering the absolute independence of the elements, the mean square of the projection of  $Z$  segments, i. e. of the molecule length, on any fixed direction is the sum of the mean squares of the projections of the  $Z$  single segments. This gives  $Z \cdot A^2/3$  in the space and  $Z \cdot A^2/2$  in the plane. Hence we have the mean square length of the molecule in both cases<sup>4</sup>

$$(2) \quad h^2 = Z \cdot A^2.$$

The square mean distance of the  $j^{\text{th}}$  element from the molecule origin is

$$r_j^2 = j \cdot A^2.$$

The mean value of the sum of the square distance of all segments from the molecule origin is

$$\bar{r}^2 = j \cdot A^2 = \frac{Z(Z+1)}{2} \cdot A^2 \approx \frac{1}{2} Z^2 A^2.$$

In the flow problem only a more precise image of the molecule is necessary. All molecules can be arranged into groups so that all forms of one group can be converted into each other by rotation only.

A form of the group may be set into a co-ordinate system  $x', y'$  so that the origin of the molecule coincides with the origin of the co-ordinates and the end with the  $x'$ -axis. In this molecule-connected system the  $j^{\text{th}}$  segment has the co-ordinates  $x'_j, y'_j$  its orientation is given by the angle  $\varphi'_j$ . By a change of orientation in the plane of the molecule-connected system indicated by the angle  $\varphi$  we obtain all the molecules of the group. The

<sup>4</sup> For the flow, *Kuhn* [7] considers the motion of the particles in the plane only and not in the space. That affects essentially the numerical coefficients  $K_1$  (24),  $K_2$  (33) and  $K_3$  (34). Cf. note 1, p. 112. To compensate this assumption, he takes as the mean square length the projection on the plane only, i. e.  $3/2 Z A^2/3$ .

outer field changes but the uniform distribution of the molecule-connected system over all directions; that is kept in view by the distribution function  $F(\phi)$  while the molecule form, i. e. the  $x'_j, y'_j, z'_j$  and their frequency remain unchanged.

With the molecule-length  $h$  kept constant, the distribution of segment angles is restricted by the accessory conditions

$$(4) \quad \sum_j \cos \varphi'_j = \frac{h}{A}, \quad \sum_j \sin \varphi'_j = 0.$$

If the segment orientation is supposed to be independent from its position  $x'_j, y'_j$  we obtain like *Kuhn* and *Grün* [9] for the space-case, the same distribution function  $g(\varphi')$  for all segments

$$(5) \quad g(\varphi') = \frac{\frac{2h}{eZ \cdot A} \cdot \cos \varphi'}{2\pi J_0\left(i \frac{2h}{ZA}\right)}.$$

$J_0$  denotes the zero *Bessel's* function and  $i$  the imaginary unity. Thus we calculate the mean values of the angle functions in the expression  $I$  (32) of the specific *Maxwell* constant to

$$(6) \quad \overline{\sum_j \cos^2 \varphi'_j} = \frac{Z}{2} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{AZ^2} + \dots, \quad \overline{\sum_j \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j} = 0.$$

Owing to (2) this gives averaged over all molecule-lengths, for the first expression the constant value  $1/4$ . The constancy only of the mean value is important, not its numerical amount.

To each group in the plane there corresponds its mirror-image group which must be considered as a new group as in the plane it cannot be converted into the first. For such a couple  $x', y', \varphi'$  and  $x'', y'', \varphi''$  we have

$$x'_j = x''_j, \quad y'_j = -y''_j, \quad \varphi'_j = -\varphi''_j,$$

Thus averaging over all groups the odd terms in  $y'$  or  $\varphi'$  resp. disappear.

#### 4. Depolarization degree of scattered light.

Linearly polarized light incident in the positive direction of the  $y$ -axis, with the electric vector parallel to the  $z$ , induces in the  $j^{\text{th}}$  segment an electric moment  $\vec{p}_j$ . Its components in the individual system of the segment are

$$a_1 \cdot \mathcal{E} \cdot \cos \vartheta_j, \quad a_2 \cdot \mathcal{E} \cdot \sin \vartheta_j, \quad 0.$$

The projections on the space-fixed axes  $x, y, z$

$$(a_1 - a_2) \cdot \mathcal{E} \cdot \sin \vartheta_j \cos \hat{\nu}_j \cos \varphi_j, \quad (a_1 - a_2) \cdot \mathcal{E} \cdot \sin \vartheta_j \cos \vartheta_j \sin \varphi_j, \\ \mathcal{E} (a_1 \cos^2 \vartheta_j + a_2 \sin^2 \vartheta_j)$$

determine also the amplitudes of the light scattered by the segment. If the molecule is so small that phase-differences of the exciting light field between the single segments as well as those of the scattered waves may be neglected, then the amplitudes of scattered light are simply added. As a necessary condition for this quasi-static treatment there must exist the inequality

$$a \ll \frac{\lambda}{2\pi n} \approx 500 \text{ \AA}$$

wherein  $a$  denotes the greatest extension of the molecule. The above valuation holds for green light and water. Generally a stretched thread-molecule does not fulfil this condition. The molecule has a length of  $500 \text{ \AA}$  already with a polymerization-degree  $P = 100$  and a length of  $a = 5 \text{ \AA}$  of the fundamental building unit. The kinked molecule is essentially shorter. For  $\xi = 4$ , corresponding to a comparatively soft thread, the mean length is  $100 \text{ \AA}$  only. The limit length of  $500 \text{ \AA}$  is realised only at  $P = 2500$ . Therefore in this case the quasi-static treatment could be allowed.

For scattering intensities in both directions of polarization  $y$  and  $z$ , when observed in the axis  $x$ , we obtain

$$I_y = \frac{128 \pi^5}{3 \lambda^4} \cdot I_0 \cdot (a_1 - a_2)^2 \left( \sum_j \sin \vartheta_j \cos \hat{\nu}_j \sin \varphi_j \right)^2, \\ I_z = \frac{128 \pi^5}{3 \lambda^4} \cdot I_0 \left( \sum_j [a_1 \cos^2 \vartheta_j + a_2 \sin^2 \vartheta_j] \right)^2,$$

$I_0$  denoting the intensity of incident light. Owing to the assumed absolute independence of the segments as to their orientation, we have

$$I_y = \frac{128 \pi^5}{3 \lambda^4} \cdot I_0 \cdot (a_1 - a_2)^2 \frac{Z}{15}, \\ I_z = \frac{128 \pi^5}{3 \lambda^4} \cdot I_0 \left( (a_1 + 2a_2)^2 \frac{Z^2}{9} + (a_1 - a_2)^2 \frac{4Z}{15} \right)$$

and for the depolarization-degree

$$(7) \quad \Delta' = \frac{I_y}{I_z} = \frac{(a_1 - a_2)^2 \frac{Z}{15}}{(a_1 + 2a_2)^2 \frac{Z^2}{9} + (a_1 - a_2)^2 \frac{4Z}{15}} = \frac{3 \delta^2}{10 + 4 \delta^2}$$

with the abbreviation

$$(8) \quad \delta^2 = \frac{2(a_1 - a_2)^2}{Z(a_1 + 2a_2)^2}$$

for the optical anisotropy of the molecule. It is but the  $z^{\text{th}}$  part of the optical anisotropy of the segment as defined by *Debye* [1]

$$\epsilon_0^2 = \frac{(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2}{(a_1 + a_2 + a_3)^2} = \frac{2(a_1 - a_2)^2}{(a_1 + 2a_2)^2}.$$

The relation

$$(8a) \quad \delta^2 = \frac{I}{Z} \cdot \delta_0^2 = \frac{z}{I^2} \cdot \delta_0^2$$

expresses that the optical anisotropy of a thread-molecule is decreasing in inverse proportion to the polymerization-degree  $P$  or to the molecular weight  $M$  resp.

In the same approximation we have for unpolarized incident light

$$(9) \quad \Delta = \frac{2I_y}{I_y + I_z} = \frac{2\Delta'}{1 + \Delta'} = \frac{6\delta^2}{10 + 7\delta^2}.$$

With regard to the smallness of  $\Delta$  and  $\Delta'$  we may simplify the relations (7) and (9) to

$$(10) \quad \begin{aligned} \Delta &= 2\Delta' \\ \Delta &= \frac{3}{5} \delta^2, \quad \Delta' = \frac{3}{10} \delta^2. \end{aligned}$$

The validity of the first equation is directly a measure for the admissibility of a quasi-static treatment of the optic field. From the two last equations we deduce that also the depolarization-degree is decreasing in inverse proportion with  $P$ .

If the molecule becomes too big there appear disturbing phase-differences, and that otherwise with  $\Delta$  than with  $\Delta'$ . Waves of light scattered from two segments sufficiently distant must already be considered as incoherent, therefore there are no more the amplitude but the intensities which must be added up. If this independence presents itself at  $Z_\infty$  segments the molecule is decomposed into  $Z/Z_\infty$  parts which scatter the light as if they were separate units. We have

$$(11) \quad \Delta' = \frac{\frac{Z}{Z_\infty} \cdot I_{y_\infty}}{\frac{Z}{Z_\infty} \cdot I_{z_\infty}} = \frac{I_{y_\infty}}{I_{z_\infty}} = \Delta'_\infty.$$

The degree of depolarization for so big a molecule is constant, independent on molecular weight. The passage to this limit case presents itself in the proximity of  $P_{\infty} = \zeta Z_{\infty}$ .

While with a degree of polymerization which is not too high the product  $P \cdot \Delta$  or  $M \cdot \Delta$  resp. is constant and represented by a horizontal straight line (Fig. 3) it passes gradually into the straight line  $P \cdot \Delta_{\infty} / P_{\infty}$  through the origin of coordinates. The divergences from the horizontal straight line must approximately appear there where the first equation (10) ceases applying.

It is possible to make agree the theoretical results with the measurements of *Lotmar* (10) on dilute solutions of methylcellulose and nitrocellulose. The table I shows that both  $\Delta$  and  $\Delta'$  are decreasing when the molecular weight is increasing. Yet the product  $M \cdot \Delta$  or  $M \cdot \Delta'$  resp. is not constant; this could be interpreted that the molecules are already too big, and this would also agree with the proportionally great rigidity of the cellulose molecules. We may conclude the same from the not realized relation  $\Delta = 2 \Delta'$ . But the great oscillations of the values measured within the same homologous series forbid exacter conclusions. Already *Lotmar* himself mentions defective elimination of dust in the solutions as a disturbing factor. Furthermore, a various polydispersion degree of the single samples may also act its part.

Table I

	$100 \Delta$	$100 \Delta'$	$200 \Delta'$	$M$	$M \cdot \Delta$	$M \cdot \Delta'$
Methylcellulose	1,5	0,27	0,54	18 500	278	50
	1,4	0,41	0,82	46 000	645	188
	0,53	0,14	0,28	98 000	518	137
Nitrocellulose	3,0	1,5	3,0	17 400	52,2	26,1
	3,0	1,1	2,2	24 200	72,6	26,6
	2,0	0,58	1,2	65 200	130	37,7

In this connection we may moreover mention the measurement of light-scattering on pure normal paraffines by *Stuart* and *Fink* [20]. The degree of depolarization is increasing up to the hexane and decreasing after this nevertheless more slowly than according to the equation (8a). Up to the dodecane, the longest paraffine measured, we may assume that the number of segments

is yet too small to admit a statistical treatment. However, the maximum for the hexane shows that  $\zeta$  must be about 6–10. This conclusion is not overmuch stringent as the conditions for pure liquids in contrast with those for dilute solutions are fundamentally deformed by the strong interaction of the molecules.

### 5. Refraction and polarization.

As long as the molecular volumes are additive we obtain for the refraction of the solved part

$$(12) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} - (1 - c) \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} c \frac{a}{V}$$

where  $n$  and  $n_1$  denote the refraction index of solution and solvent,  $c$  the volume concentration,  $a$  the mean polarizability and  $V$  the molecular volume of the solved fraction. As the segments are absolutely independent we have for  $a$

$$(13) \quad a = Z \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

As with  $Z$  the molecular volume is increasing too — with regard to

$$(14) \quad V = Z \cdot V_0$$

where  $V_0$  denotes the volume of the segment, the refraction  $a/V$  is independent from the degree of polymerization.

Similarly we have for the displacement-part  $\beta/V$  of the polarization

$$(15) \quad \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} - (1 - c) \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 2} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{c}{V} \left( \bar{\beta} + \frac{\mu^2}{3kT} \right).$$

For the orientation-part we must set up the distributing function in the outer field. If  $\mathcal{E}$  and herewith also the inner field  $\bar{\mathcal{F}}$

$$(16) \quad \bar{\mathcal{F}} = \frac{\varepsilon_1 + 2}{3} \cdot \mathcal{E}$$

lie in the positive axis  $z$ , then the part of displacement ( $u_1$ ) and that one of the dipole ( $u_2$ ) of the potential energy are as follows

$$u_1 = -\frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}}^2 \sum_j (\beta_1 \cos^2 \vartheta_j + \beta_2 \sin^2 \vartheta_j),$$

$$u_2 = -\mu_0 \bar{\mathcal{F}} \sum_j \cos \vartheta_j.$$

Therefrom follows the distributing function

$$(17) \quad F = C \cdot e^{-\frac{u_1 + u_2}{kT}} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{\mu_0 \mathcal{F}}{kT} \sum_j \cos \vartheta_j + \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{F}}{2kT} \left( \beta_1 \left( \sum_j \cos^2 \vartheta_j - \frac{Z}{3} \right) + \beta_2 \left( \sum_j \sin^2 \vartheta_j - \frac{2Z}{3} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\mu_0^2 \mathcal{F}^2}{2k^2 T^2} \left( \left( \sum_j \cos^2 \vartheta_j \right)^2 - \frac{Z}{3} \right) + \dots \right\}.$$

The linear term gives the polarization due to dipole orientation, the quadratic terms give electric double refraction. With this distributing function  $F$  we obtain as mean value of the induced momentum in the field direction resulting from the orientation of dipoles

$$(18) \quad \bar{p} = \frac{\mu_0^2 \mathcal{F}}{kT} \cdot \sum \overline{\cos^2 \vartheta_j} = \frac{Z \mu_0^2}{3kT} \cdot \mathcal{F},$$

that will say: on the average we must co-ordinate to the macro-molecule an intrinsic moment  $\mu = \mu_0 \sqrt{Z}$ . In the expression (15) the factor  $Z$  is reduced and we get indeed for the polarization due to dipole orientation the independence from the molecular weight.

#### 6. Electric and magnetic double refraction.

In non birefringent solvent the specific electric constant of  $Kerr$  is defined by *Peterlin* and *Stuart* (14) as

$$(19) \quad K_{sp} = \lim_{c \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta n}{c \cdot n \cdot \mathcal{E}^2} \right) = \left( \frac{\epsilon + 2}{3} \right)^2 \left( \frac{n^2 + 2}{3n} \right)^2 \cdot \frac{3\pi}{V} \cdot \frac{\Delta \bar{a}}{\mathcal{F}^2}.$$

The expression  $\Delta \bar{a}$  means the average value of the difference of the optical polarizabilities parallel and perpendicular to  $\vec{\mathcal{E}}$ , of the molecule in the field

$$\Delta \bar{a} = \bar{a}_{\parallel} - \bar{a}_{\perp} = (\Delta \bar{a})_1 + (\Delta \bar{a})_2,$$

$(\Delta \bar{a})_1$  denoting the part of displacement and  $(\Delta \bar{a})_2$  the dipole-part. For each form of the molecule we have

$$a_{\parallel} = \sum_j (a_1 \cos^2 \vartheta_j + a_2 \sin^2 \vartheta_j) = Z \cdot a_2 + (a_1 - a_2) \sum_j \cos^2 \vartheta_j,$$

$$a_{\perp} = \sum_j [a_1 \sin^2 \vartheta_j \cos^2 \varphi_j + a_2 (\sin^2 \vartheta_j \sin^2 \varphi_j + \cos^2 \vartheta_j)] = \\ = Z \cdot a_2 + (a_1 - a_2) \sum_j \sin^2 \vartheta_j \cos^2 \varphi_j,$$

$$\Delta a = (a_1 - a_2) \sum_j (\cos^2 \vartheta_j - \sin^2 \vartheta_j \cos^2 \varphi_j).$$

The distribution function leads to

$$\begin{aligned}(\overline{\Delta a})_1 &= \frac{\mathcal{F}^2}{2kT} \cdot Z \cdot \frac{2(a_1 - a_2)(\beta_1 - \beta_2)}{15} \\ (\overline{\Delta a})_2 &= \frac{\mathcal{F}^2}{2k^2T^2} \cdot Z \cdot \frac{2(a_1 - a_2) \cdot \mu_0^2}{15}\end{aligned}$$

and therefrom for the double refraction

$$(20) \quad K_{sp} = \left(\frac{\varepsilon + 2}{3}\right)^2 \left(\frac{n^2 + 2}{3n}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{V_0} (\Theta_1 + \Theta_2)$$

with

$$\Theta_1 = \frac{2(a_1 - a_2)(\beta_1 - \beta_2)}{15kT}, \quad \Theta_2 = \frac{2(a_1 - a_2)\mu_0^2}{15k^2T^2}$$

independent from the degree of polymerization.

For liquid pure normal paraffines, according to *Stuart and Fink*, the electric double refraction is increasing with an increasing number of chain links more and more slowly so that we have every reason to conclude upon a final limiting value. As to the triacontane, the longest paraffine measured, the limiting value is not yet reached. The whole behaviour fits well in the theoretical feature. The number of links is evidently so small that as yet we are but in the zone of transition to the simple relation (20). On the other hand we must not forget that the effects — the electric double refraction is extremely sensible here — in pure liquids must show considerable differences compared to dilute solutions owing to the strong interaction of molecules.

We get the magnetic double refraction by interchanging of  $\beta$  and  $\gamma$ , and of  $\mu_0$  and  $\mu_{m_0}$

$$(21) \quad C_{sp} = \left(\frac{n^2 + 2}{3n}\right)^2 \frac{\pi}{V_0} (\Theta_1 + \Theta_2)$$

with

$$\Theta_1 = \frac{2(a_1 - a_2)(\gamma_1 - \gamma_2)}{15kT}, \quad \Theta_2 = \frac{2(a_1 - a_2)\mu_{m_0}^2}{15k^2T^2}$$

independent from the polarization-degree  $P$ .

### 7. Intrinsic viscosity.

Intrinsic viscosity  $[\eta]$  of dilute solution as defined by *Philippoff* [16] is given by the mean value of the energy additionally dissipated by the suspended particle

$$(22) \quad [\eta] = \frac{\bar{S}}{V \cdot \eta \cdot q^2}$$

where  $\eta$  means the viscosity of the solvent and  $q$  the velocity gradient of the linear field of flow.

To simplify the calculation we may treat but the movement of the particles in the flow plane. Thus the field flow  $\vec{v}_s$  is

$$\vec{v}_s = (0, qx).$$

A hydrodynamic frictional force is acting upon the  $j^{\text{th}}$  element of the suspended molecule

$$\vec{P}_j = \lambda \cdot \eta \cdot \vec{v}_{j, \text{rel}} = \lambda \cdot \eta (\vec{v}_s - \vec{v}_j).$$

As far as possible the rigid particles participate in the translating and rotating of the flow so that the resultant of all the forces  $P_j$  and their moments  $M$  becomes zero at every instant

$$\sum_j \vec{P}_j = 0, \quad \sum_j \mathcal{M}_j = 0.$$

Both conditions are satisfied with

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_j = (v_{0x} - \omega y_j, v_{0y} + \omega x_j)$$

for the velocity of the  $j^{\text{th}}$  segment;  $\vec{v}_0$  means the translation,  $\omega$  the rotation of the »rigid« molecule

$$(23) \quad \begin{aligned} v_{0x} &= \frac{\omega}{Z} \sum_j y_j = q \frac{(\sum x_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum x_j)^2) \cdot \frac{1}{Z} \sum y_j}{[r^2]} = q \cdot \frac{[x^2] \cdot \sum y_j}{Z \cdot [r^2]} \\ v_{0y} &= \frac{q - \omega}{Z} \sum x_j = q \frac{(\sum y_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum y_j)^2) \cdot \frac{1}{Z} \sum x_j}{[r^2]} = q \cdot \frac{[y^2] \cdot \sum x_j}{Z \cdot [r^2]} \\ \omega &= q \cdot \frac{\sum x_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum x_j)^2}{[r^2]} = q \cdot \frac{[x^2]}{[r^2]} \end{aligned}$$

with the abbreviations

$$\begin{aligned} [x^2] &= \sum x_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum x_j)^2, & [y^2] &= \sum y_j^2 - \frac{1}{Z} (\sum y_j)^2, \\ [r^2] &= [x^2] + [y^2] = [r^2]. \end{aligned}$$

Thence we calculate the instantaneous dissipated energy<sup>5</sup>

$$S = \sum_j \vec{P}_j \cdot \vec{v}_{j, \text{rel}} = \lambda \cdot \eta \sum_j v_{j, \text{rel}}^2 = \lambda \cdot \eta q^2 \frac{[x^2] \cdot [y^2]}{[r^2]}.$$

<sup>5</sup> This method of calculation for dissipated energy is very easy indeed, and it was generally applied till now; not withstanding it is surely not quite correct as — at least for rod-shaped molecules — it leads to erroneous particulars of the structure-viscosity [11].

To pass to the mean value we must separately determine the portion of each molecule-group. In case of total *Brownian* movement all the orientations of the molecule-connected system are of equal probability. Thus we obtain.

$$S = \lambda \cdot \eta q^2 \left( \frac{1}{8} [r^2] + \frac{1}{2} \frac{[x'^2] \cdot [y'^2]}{[r^2]} - \frac{1}{2} \frac{[x'y']^2}{[r^2]} \right).$$

In this expression the mean value over all molecule-forms must be taken. Difficulties almost insuperable oppose exact averaging as the quantity that must be averaged appears also in the denominator. *Huggins* [3] avoided the difficulty substituting the mean value of the fraction by the quotient of the mean values. Therefore we may not overrate such a numerical coefficient. We find the only important variation of the intrinsic viscosity with the polymerization-degree almost without any calculation in the equation for  $S$ . All three terms of the sum in brackets are of the same order  $[r^2]$ . According to (3) the mean value of this sum is proportional to  $Z^2 \cdot A^2$ . As, on the other hand,  $V$  is linearly increasing with  $Z$ , the intrinsic viscosity is proportional to the degree of polymerization

$$(24) \quad [\eta] = B \cdot \frac{\lambda A^2}{V_0} \cdot Z = B \cdot \frac{\lambda \cdot A^2}{V_0 \cdot \zeta} \cdot P = K_1 \cdot P$$

and 
$$[\eta] = [\eta]_0 \cdot Z,$$

concordantly with the rule of *Staudinger*.  $[\eta]_0$  denotes the contribution of the segment to the intrinsic viscosity of the molecule. The constant  $B$  is not dependent on the specific nature of the high polymer and solvent, all specific qualities of the molecule are expressed by the factor  $\lambda A^2/V_0 \zeta$  which in the first approximation is independent from  $\zeta$  too, for  $\lambda$ ,  $A$  and  $V_0$  are all proportional to  $\zeta$ . The rigidity of the molecule asserts itself but as far as  $A^2/\zeta$  i. e. the mean square value of the segment length reduced to the fundamental unit, increases with the rigidity of the molecule.

In connection with the rule of *Staudinger*

$$\frac{\eta_{sp}}{c_{gr}} = K_m \cdot M$$

we obtain as constant of viscosity  $K_m$

$$(25) \quad K_m = 10^{-3} \frac{[\eta]}{c \cdot P} = 10^{-3} B \cdot \frac{\lambda A^2}{V_0 \zeta c} = 10^{-3} \frac{K_1}{c}$$

This relation immediately shows that  $K_m$  for real unramified thread-molecules will not greatly change from one molecule-species to another as required by the experience.

### 8. Double refraction of flow.

Passing from the molecule co-ordinates  $x, y$ , to those of the molecule-connected system  $x', y'$  we get for the rotating velocity of the particles

$$(26) \quad \omega = \dot{\Phi} = \frac{q}{2} (1 + \beta_0 \cos 2\Phi - 2\gamma_0 \sin 2\Phi).$$

with

$$(27) \quad \beta_0 = \frac{[x'^2] - [y'^2]}{[r^2]} = \frac{\beta}{[r^2]},$$

$$\gamma_0 = \frac{[x'y']}{[r^2]} = \frac{\gamma}{[r^2]}.$$

The constant of the rotational diffusion  $D$  is defined as

$$D = kT/W$$

$W$  denoting the moment of resistance at the rotation of the molecule with the angular velocity  $1 \text{ s}^{-1}$ . The pure rotation is presented by

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i = (v_{0x} - \omega y_i, v_{0y} + \omega x_i).$$

This expression must satisfy the condition

$$\sum \vec{v}_i = 0$$

expressing the absence of translation. Thus one gets the moment of resistance

$$W = \frac{\sum \mathcal{M}_i}{\omega} = \lambda \cdot \eta [r^2]$$

$$\mathcal{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \vec{r}_i \times \lambda \eta \vec{v}_i = \lambda \eta (x_i v_{iy} - y_i v_{ix})$$

and therefrom the diffusion-constant

$$(28) \quad D = \frac{kT}{\lambda \eta} \cdot \frac{1}{[r^2]}.$$

Under the influence of the flow of the liquid and of the *Brownian* motion results a steady flow of particles. Therefore the distributing function satisfies the following equation

$$\Phi F - \frac{dF}{d\Phi} = \frac{q}{4\pi}$$

For a prevalent *Brownian* movement one can develop  $F$  into a series with increasing powers of the velocity gradient  $q$  or of

$$(30) \quad a = \frac{\lambda \cdot \eta \cdot q}{4kT}$$

resp.

$$\begin{aligned} \bar{a}_{xx} &= Z \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_1 - a_2) \frac{a^2}{2} [\beta [r^2] \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) + \\ &+ \gamma [r^2] \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j + \dots] = Z \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_1 - a_2) \frac{a^2}{2} \cdot II, \\ \bar{a}_{xy} &= (a_1 - a_2) \cdot \frac{a}{2} [\beta \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) + \\ &+ \gamma \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j + \dots] = (a_1 - a_2) \cdot \frac{a}{2} \cdot I, \\ \bar{a}_{yy} &= Z \frac{a_1 + a_2}{2} + (a_1 - a_2) \cdot \frac{a^2}{2} \cdot II. \end{aligned}$$

The main axes of polarizability  $X$  and  $Y$  (Fig. 5) form an angle  $\chi$  with  $x$  and  $y$ . Restricting to the lowest terms only we get

$$(32) \quad \tan 2\chi = \frac{2\bar{a}_{xy}}{\bar{a}_{xx} - \bar{a}_{yy}} = -\frac{1}{a} \frac{I}{II}, \quad \chi = \frac{\pi}{4} = \frac{a}{2} \cdot \frac{I}{II},$$

$$\Delta a = a_x = a_y = \sqrt{(\bar{a}_x - \bar{a}_y)^2 + 4\bar{a}_{xy}^2} \approx (a_1 - a_2) \cdot a \cdot I.$$

We see that at a low gradient or prevailing *Brownian* movement the extinguishing angle is  $45^\circ$  and the double refraction itself proportional to the velocity gradient. Considering that the expression  $II$  is different from  $I$  but by the factor  $[r^2]$  we obtain

$$(33) \quad \chi = \frac{\pi}{4} = q \cdot C_1 \cdot \frac{\eta}{T} \cdot \lambda A^2 Z^2 = q \cdot C_1 \cdot \frac{\eta}{T} \cdot \frac{\lambda A^3}{\zeta^2} \cdot P^2 = q \cdot K_2 \cdot P^2.$$

The displacement-velocity of the preferred direction is proportional to the square of the polymerization degree. The constant  $C_1$  is not dependent either on molecule-species nor solvent. In the first approximation  $\zeta$  does no more appear in the factor  $\lambda A^3/\zeta^2$  the rigidity of molecule now appears in  $A^2/\zeta$  only, exactly so as for the intrinsic viscosity.

The specific *Maxwell* constant, defined by *Peterlin* and *Stuart* [13] as

$$M_{sp} = \left( \frac{\Delta n}{c \cdot n \cdot \eta \cdot q} \right)_{c=0, q=0} = \left( \frac{n^2 + 2}{3n} \right)^2 \cdot \frac{2\pi}{V} \cdot \frac{\Delta a}{\eta q}$$

results from the last equation in (32). The factor at  $\beta$  in  $I$  and  $II$  is equal, after (6), to  $1/4$  while that one at  $\gamma$  is zero. As  $\beta$  is proportional to  $[r^2]$  we get immediately

$$(31) \quad F = F_0 + aF_1 + a^2F_2 + \dots = \\ = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + a(\beta \sin 2\Phi + 2\gamma \cos 2\Phi) + a^2 \left( [r^2][2\gamma \sin 2\Phi - \beta \cos 2\Phi] + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta\gamma \sin 4\Phi - \frac{\beta^2 - 4\gamma^2}{4} \cos 4\Phi \right) + \dots \right).$$

It is significant that the diffusion-constant  $D$  does no more appear explicitly in the linear term which is decisive for the initial value of the birefracton.

With the optic field  $\mathcal{E}_x$  we get in the molecule an electric moment as well in the direction  $x$  as in the direction  $y$

$$p_x = \mathcal{F}_x \sum_j (a_1 \cos^2 \varphi_j + a_2 \sin^2 \varphi_j) = a_{xx} \cdot \mathcal{F}_x,$$

$$p_y = \mathcal{F}_x (a_1 - a_2) \sum_j \sin \varphi_j \cos \varphi_j = a_{yx} \cdot \mathcal{F}_x$$

and with  $\mathcal{E}_y$

$$p_x = \mathcal{F}_y (a_1 - a_2) \sum_j \sin \varphi_j \cos \varphi_j = a_{xy} \cdot \mathcal{F}_y,$$

$$p_y = \mathcal{F}_y \sum_j (a_1 \sin^2 \varphi_j + a_2 \cos^2 \varphi_j) = a_{yy} \cdot \mathcal{F}_y.$$

Introducing the molecule-connected systeme  $x', y'$  we obtain

$$a_{xx} = Z \cdot a_1 - (a_1 - a_2) \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - 2 \cos^2 \Phi \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sin \Phi \cos \Phi \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j \right)$$

$$a_{xy} = a_{yx} = (a_1 - a_2) \left( (2 \cos^2 \Phi - 1) \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j + \right. \\ \left. + 2 \sin \Phi \cos \Phi \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) \right).$$

$$a_{yy} = Z a_2 + (a_1 - a_2) \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - 2 \cos \Phi \left( \sum \cos^2 \varphi'_j - \frac{Z}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sin \Phi \cos \Phi \sum \sin \varphi'_j \cos \varphi'_j \right).$$

The distributing function gives the mean values

$$2 \overline{\cos^2 \Phi} = 1 + a\gamma - a^2[r^2] \frac{\beta}{2} + \dots,$$

$$2 \overline{\sin \Phi \cos \Phi} = a \left( \frac{\beta}{2} + a\gamma[r^2] + \dots \right)$$

for each molecule-group. Owing to the symmetry, the odd expressions in  $y'$  and  $\varphi'$  disappear in the averaging

$$(34) \quad \begin{aligned} \frac{\Delta n_{sp}}{\Delta n} &= \left( \frac{n^2 + 2}{3n} \right)^2 \cdot C_2 \cdot \frac{1}{T} (a_1 - a_2) \cdot \frac{\lambda A^2}{V_0} \cdot Z \\ &= \left( \frac{n^2 + 2}{3n} \right)^2 \cdot C_2 \cdot \frac{1}{T} (a_1 - a_2) \cdot \frac{\lambda A^2}{V_0 \xi} P = K_3 \cdot \dot{P}, \end{aligned}$$

resp.

$$M_{sp} = M_{sp,0} \cdot Z,$$

where  $M_{sp,0}$  means the contribution of the single segment to the double refraction. The double refraction of flow is proportional to the degree of polymerization or to the molecular weight resp. as found by *Signer* and *Gross* [19], and *Wissler* [22] by experiments on polymeric homologous series. As for the single factor all that said above at (24) and (33) holds here too. In  $(a_1 - a_2)$  the influence of the solvent is particularly strong, and, under circumstances, it may cause even a change of sign [18].

The expressions for  $[\eta]$  and  $M_{sp}$  differ in reality by the optic factor  $(a_1 - a_2)$  which does not change within a homologous series with the same solvent. If we are interested only in  $P$ , the much more intricate measurement of the double refraction gives the same as the simple viscosity measurements.

### 9. Polydispersity.

Three cases shall be examined.

1. There are but two molecular weights  $M_1$  and  $M_2$  with the concentrations  $c_1$  and  $c_2$ . The number of the molecules comes to

$$N_1 = \frac{c_1}{V_1} = \frac{c_1}{Z_1 \cdot V_0}, \quad N_2 = \frac{c_2}{V_2} = \frac{c_2}{Z_2 \cdot V_0}.$$

2. The molecule numbers  $N$  vary according the error-function of *Gauss*

$$N(Z) = \frac{N}{B\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{Z-Z_0}{B}\right)^2}.$$

$Z_0$  is the most frequent value,  $B$  is the measure for the width of polydispersity. 84% of all the particles are placed within the interval  $(Z_0 - B, Z_0 + B)$ . Let be, in comparison to  $Z_0$ ,  $B$  so small that higher powers of this ratio may be neglected.

3. The molecular concentrations  $c$  vary according the error function of *Gauss*,

$$c(Z) = \frac{c}{B\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{Z-Z_0}{B}\right)^2}.$$

Refraction, polarization and electric double refraction are not concerned by the polydispersity.

Depolarization-degree of scattered light:

$$1. \quad \delta^2 = \delta_0^2 \cdot \frac{c}{c_1 Z_1 + c_2 Z_2} = \delta_0^2 \cdot \frac{N_1 Z_1 + N_2 Z_2}{N_1 Z_1^2 + N_2 Z_2^2}.$$

$$2. \quad \delta^2 = \delta_0^2 \cdot \frac{1}{Z_0 \left(1 + \frac{B^2}{2Z_0^2}\right)}.$$

$$3. \quad \delta^2 = \frac{\delta_0^2}{Z_0}.$$

Intrinsic viscosity:

$$1. \quad [\eta] = [\eta]_0 \cdot \frac{c_1 Z_1 + c_2 Z_2}{c} = [\eta]_0 \cdot \frac{N_1 Z_1^3 + N_2 Z_2^3}{N_1 Z_1 + N_2 Z_2}$$

$$2. \quad [\eta] = [\eta]_0 \cdot Z_0 \left(1 + \frac{B^2}{2Z_0^2}\right).$$

$$3. \quad [\eta] = [\eta]_0 \cdot Z_0.$$

Double refraction of flow.

The constant of *Maxwell* behaves just so as the intrinsic viscosity. But the displacement of the extinguishing angle with the gradient comes to

$$1. \quad \chi - \frac{\pi}{4} = q K_2 \cdot \frac{c_1 Z_1^3 + c_2 Z_2^3}{c_1 Z_1 + c_2 Z_2} = q K_2 \cdot \frac{N_1 Z_1^4 + N_2 Z_2^4}{N_1 Z_1 + N_2 Z_2}$$

$$2. \quad \chi - \frac{\pi}{4} = q K_2 \cdot Z_0^3 \cdot \frac{1 + 3 \frac{B^2}{Z_0^2}}{1 + \frac{3B^2}{2Z_0^2}} \approx q K_2 \cdot Z_0^3 \left(1 + \frac{5}{2} \frac{B^2}{Z_0^2}\right).$$

$$3. \quad \chi - \frac{\pi}{4} = q K_2 \cdot Z_0^3 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{B^2}{Z_0^2}\right).$$

Consequently, in a polydisperse solution we obtain the same mean molecular weight from all three linear effects, i. e. scattering of light, intrinsic viscosity, and the constant of *Maxwell*

$$\bar{M} = \bar{M}_{gr} \cdot \bar{P} = M_{gr} \cdot \zeta \cdot \bar{Z}.$$

while from the extinguishing angle we get a value too high by the factor  $(1 + 3 B^2/2Z_0^2)$ . If there are two solutions with the

same most probable degree of polymerisation  $P_0 = \zeta$ .  $Z$  but of a different polydispersity  $B_1$  and  $B_2$ , that one with a higher  $B$  shows also a higher mean  $P$  (case 2).

### 10. Summary.

The random-coil model for a — not to big — thread molecule gives the correct dependence on the polymerization degree  $P$  of the following phenomena: refraction, polarization, degree of depolarization at the scattering of light, electric double refraction, double refraction of flow, and intrinsic viscosity.

Considering the initial values only — occurring at a small velocity gradient — for the two last effects, the molecule can be imagined as a »rigid« coil consisting of segments of  $\zeta$  fundamental units each, with the segments arranged quite irregularly.  $\zeta$  is the lowest number of fundamental units required to build up a segment independent on the position and orientation of the remaining part of the molecule.

The polymerization-degree  $P$  exerts an influence merely on the degree of depolarization  $\Delta$  or optical anisotropy  $\delta^2$  of the molecule, the intrinsic viscosity  $[\eta]$  and the double refraction of flow

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \delta_0^2 \cdot \frac{\zeta}{P}, \\ [\eta] &= [\eta]_0 \cdot \frac{P}{\zeta} = K_1 \cdot P, \\ \chi - \frac{\pi}{4} &= q \cdot K_2 \cdot P^2, \\ M_{sp} &= M_{sp_0} \cdot \frac{P}{\zeta} = K_3 \cdot P.\end{aligned}$$

$\delta_0^2$ ,  $[\eta]_0$  and  $M_{sp_0}$  denote the contribution due to the single segment. The specific properties of the polymeric homologous series in the actual solvent — principally the rigidity of the molecule characterized by  $\zeta$  — are measured by the coefficients  $\delta_0^2 \zeta$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  and  $K_3$ . Yet the relations are not so simple to allow the immediate determination of  $\zeta$  from the measured values and the computation (from it) of the degree of coiling, i. e. the ratio of the mean length to the maximum length of the molecule.

The refraction and the displacement-part of the polarization of a thread-macromolecule are equal to those of the fundamental

unit, while the orientation-part of the polarization, magnetic and electric double refraction are conform with the correspondent values of the segment of  $\zeta$  fundamental units. Here the segment is the smallest element which is practically independent in its orientation from the remaining molecule.

The optical anisotropy of the molecule is inversely proportional to the degree of polymerization  $P$

$$\delta^2 = \delta_0^2 \cdot \frac{\zeta}{P}$$

where  $\delta_0^2$  denotes the anisotropy of the segment of  $\zeta$  units. For the case of too a big molecule — so that the quasistatistical treatment of the light field is not allowed — the relation received above is no longer valid,  $\delta^2$  approaches to a limit  $\delta_\infty^2$ , the degree of depolarization at unpolarized light  $\Delta$  is no more the double of  $\Delta'$ .

The intrinsic viscosity and *Maxwell* constant increase linearly with the degree of polymerization to

$$[\eta] = [\eta]_0 \cdot \frac{P}{\zeta} = K_1 \cdot P,$$

$$M_{sp,c} = M_{sp,c}^0 \cdot \frac{P}{\zeta} = K_2 \cdot P,$$

while the deviation of the extinguishing angle from  $45^\circ$  with the velocity gradient shows a quadratic dependence on  $P$

$$\chi - \frac{\pi}{4} = q \cdot K_2 \cdot P^2.$$

A comparison with the experimental results shows that all the properties of the thread molecule treated in this paper are in the limits mentioned above rendered exactly by the simple model of a »rigid« coil.

VSEBINA — CONTENU — CONTENTS

	Stran
1. <i>Anton Vakselj</i> , Monodromijska funkcija linearne diferencialne enačbe — La fonction de monodromie de l'équation différentielle linéaire . . . . .	5
2. <i>Anton Vakselj</i> , Matrični račun linearnih substitucij 2. reda — Le calcul des matrices des substitutions linéaires du 2 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	19
3. <i>Anton Vakselj</i> , Dva prispevka k trikotniški geometriji — Contributions à la géométrie du triangle . . . . .	41
4. <i>Anton Peterlin</i> , Klobčičasti model nitaste molekule — Random coil model of the thread-molecule . . . . .	77

