

AKADEMIJA ZNANOSTI IN UMETNOSTI V LJUBLJANI  
MATEMATIČNO - PRIRODOSLOVNI RAZRED

---

IVAN VIDAV

KLEINOVİ TEOREMI V TEORIJI  
LINEARNIH DIFERENCIALNIH  
ENAČB

KLEINSCHÉ THEOREME IN  
DER THEORIE DER LINEAREN  
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN



V LJUBLJANI 1941



AKADEMIJA ZNANOSTI IN UMETNOSTI V LJUBLJANI  
MATEMATIČNO - PRIRODOSLOVNI RAZRED

---

IVAN VIDAV

KLEINOVİ TEOREMI V TEORIJI  
LINEARNIH DIFERENCIALNIH  
ENAČB

KLEINSCHÉ THEOREME IN  
DER THEORIE DER LINEAREN  
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN



V LJUBLJANI 1941

INSTITUT ZA MATEMATIKO IN FIZIKO  
FIZIKALNO MATEMATIKO

1974

KLEINOV TEOREM V TEORJI  
LINEARNIH DIFERENCIALNIH  
ENACB

KLEINSCHE THEOREME IN  
DER THEORIE DER LINEAREN  
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN



TISKALA DELNIŠKA TISKARNA D. D., LJUBLJANA (E. PODKRAJŠEK)

KLEINOVİ TEOREMI V TEORIJI  
LINEARNIH DIFERENCIALNIH ENAČB



Splošna Fuchsova linearna diferencialna enačba drugega reda, ki ima  $n$  singularnih točk, zavisi poleg eksponentov v posameznih singularnih točkah še od  $n-3$  poljubnih konstant, tako imenovanih akcesoričnih parametrov. Glede določitve teh je že F. Klein postavil naslednje splošno vprašanje:

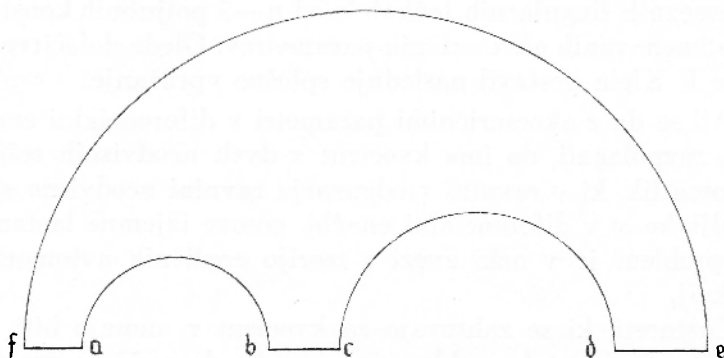
Ali se da z akcesoričnimi parametri v diferencialni enačbi tako razpolagati, da ima kvocient  $\tau$  dveh neodvisnih rešitev, oziroma lik, ki v ravnini  $\tau$  odgovarja ravnini neodvisne spremenljivke  $x$  v diferencialni enačbi, gotove izjemne lastnosti? Ta problem je v ozki zvezi s teorijo enoličnih avtomorfniških funkcij.

Lastnosti, ki se zahtevajo za kvocient  $\tau$ , morejo biti zelo različne. Važen tak problem je n. pr. ta, da puščajo vse substitucije kvocienta  $\tau$ , ki odgovarjajo obhodom spremenljivke  $x$  okoli posameznih singularnih točk, isti krog nespremenjen. Če so eksponenti pri vseh singularnih točkah recipročna cela števila, odgovarja ta slučaj enoličnim avtomorfniškim funkcijam z mejnim krogom. Za štiri singularne točke je obdelal ta problem E. Hilb in sicer najprej za slučaj, da so vse singularne točke reelne (E. Hilb: Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Annalen, Bd. 66), nato pa še za štiri kompleksne singularne točke (Math. Annalen, Bd. 68). V tem delu je tudi obdelan isti problem za  $n$  reelnih singularnih točk.

V splošnem slučaju štirih kompleksnih singularnih točk se izkaže, da eksistira poleg tako imenovanega osnovnega teorema, kamor spadajo tudi enolične avtomorfne funkcije, še neskončna serija višjih teoremov, od katerih je vsak karakteriziran z dvema poljubnima celima številoma in pri katerih tudi eksistira ortogonalni krog.

Nadalje je obdelal E. Hilb v istih dveh delih tudi problem določitve akcesoričnih parametrov v primeru reelnih singularnih točk tako, da ima mnogokotnik, v katerega se preslika zgornja polovica ravnine  $x$  s kvocientom  $\tau$ , gotove lastnosti, ki so invariantne napram linearni substituciji.

F. Klein pa je poleg drugih postavil tudi naslednji problem: Diferencialna enačba naj ima šest singularnih točk in pri vsaki izmed teh naj bo diferenca eksponentov  $\frac{1}{2}$ . Tri akcesorične parametre, ki se nahajajo v diferencialni enačbi, je treba tako določiti, da ima šesterokotnik, v katerega preslika  $\tau$  zgornjo polovico ravnine  $x$ , naslednjo obliko:



Slika 1.

Ta problem pa je specielni slučaj naslednjega zelo splošnega problema, ki ga hočem tu formulirati, mislim da popolnoma v skladu s Kleinovimi idejami: Vse singularne točke diferencialne enačbe razdelimo v nekaj skupin po najmanj dve točki. Vse točke ene skupine si mislimo v gotovem vrstnem redu in jih po tem redu zvežimo s krivuljo od prve do zadnje. Isto storimo z vsemi ostalimi skupinami in to tako, da se krivulje niti same sebe niti med seboj ne sečejo. Vzdolž vsake teh krivulj si mislimo ravnino  $x$  prerezano. Problem je sedaj ta: Ali se dajo akcesorični parametri tako določiti, da je kvocient  $\tau$  dveh neodvisnih rešitev diferencialne enačbe enolična funkcija na razrezani ravnini  $x$  in da poleg tega puščajo vse substitucije kvocienta  $\tau$ , ki odgovarjajo obhodom spremenljivke  $x$  okoli singularnih točk iste skupine, skupen krog nespremenjen.

Kleinov primer je tak, da razdelimo vseh šest singularnih točk v tri skupine po dve sosedni točki in zvežemo obe točki ene skupine po realni osi.

V slučaju štirih singularnih točk obstojata samo dve možnosti. Vzame se namreč lahko vse štiri točke v eno skupino (E. Hilb), ali pa po dve in dve točki skupaj. Zadnji problem je popolnoma splošno obdelal J. Plemelj v svojem delu: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung mit vier Fuchsschen singulären Punkten (Monatshefte f. Math. u. Physik. Bd. 43). Izkaže se, da je rešitev problema možna le v primeru, če zadoščajo eksponenti dvema relacijama. Kadar sta ti dve relaciji izpolnjeni, rešitev tudi vedno eksistira in so pri tem lahko eksponenti celo kompleksna števila.

Pri splošnem problemu nastane vprašanje, ali je ravno toliko akcesoričnih parametrov v diferencialni enačbi, kot je pogojev. Če se naj povrne kvocient  $\tau$  dveh neodvisnih rešitev pri obhodu okoli ene skupine singularnih točk vase, so zato potrebni vobče trije pogoji, ki povedo, da je obhodna substitucija identična. Le v primeru, da sta v skupini samo dve singularni točki, je treba akcesorične parametre tako določiti, da sta izpolnjena dva pogoja, tretji pogoj je namreč relacija med eksponenti v obeh singularnih točkah.

Vzemimo, da se  $\tau$  povrne vase pri obhodu okoli  $i$ -te skupine z  $n_i$  točkami. Da puščajo vse substitucije, ki odgovarjajo obhodom spremenljivke  $x$  okoli singularnih točk te skupine, skupen krog nespremenjen, je potrebno  $2n_i - 6$  reelnih pogojev. (Če se namreč vzame vse singularne točke v eno skupino in se zahteva skupen ortogonalni krog, je treba izpolniti ravno  $2n - 6$  reelnih pogojev in prav toliko je v diferencialni enačbi reelnih parametrov.) Če sta v skupini samo dve singularni točki, eksistira vedno ortogonalni krog. Ako se šteje en kompleksen pogoj za dva reelna pogoja, potem je treba v vsakem primeru izpolniti ravno  $2n_i$  pogojev, da se  $\tau$  pri obhodu povrne vase in da puščajo substitucije, ki odgovarjajo obhodom spremenljivke  $x$  okoli singularnih točk te skupine, skupen krog nespremenjen.

Za vse skupine skupaj je treba izpolniti ravno  $2n$  reelnih pogojev. Ti pogoji pa niso vsi med seboj neodvisni, ampak obstoja med njimi šest reelnih relacij, ki izražajo, da se povrne  $\tau$  pri obhodu okoli vseh singularnih točk vase. Torej je  $2n - 6$  neodvisnih reelnih pogojev, ravno toliko pa je reelnih akcesoričnih parametrov.

Če ima diferencialna enačba pet singularnih točk, nastopata dva kompleksna akcesorična parametra. Tu se more postaviti sličen problem kakor zgoraj, da se namreč vzame v eno skupino dve točki, v drugo pa ostale tri. Izkaže se, da je možno pričakovati rešitev le tedaj, če obstoja med eksponenti tistih dveh singularnih točk, okoli katerih naj se povrne kvocijent  $\tau$  vase, ena izmed naslednjih dveh enačb:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \text{celo število} \dots \text{I}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \text{celo število} \dots \text{II}$$

pri čemer pomenita  $\varepsilon_1$  in  $\varepsilon_2$  diferenci eksponentov v prvi in drugi singularni točki.

V tem spisu hočem obdelati ravno ta problem in sicer v primeru, da so vse singularne točke reelne in da so difference eksponentov reelne in manjše od 1. Diferencialna enačba se tukaj glasi:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left( \frac{1-\varepsilon_1}{x-e_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{x-e_2} + \frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{Tx^2 + T_1x + T_2}{(x-e_1)(x-e_2)(x-a)(x-b)} y = 0 \quad (1)$$

Singularne točke te diferencialne enačbe so  $e_1, e_2, a, b$  in  $c = \infty$ . Naj bo

$$e_1 > e_2 > a > b$$

K posameznim singularnim točkam pripadajo eksponenti  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha, \beta, \gamma, \gamma'$  in  $\gamma''$ . Pri tem je

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \alpha + \beta + \gamma' + \gamma'' = 3$$

$$\gamma' \gamma'' = T$$

$$\gamma' - \gamma'' = \gamma.$$

Nadalje naj bo

$$0 \leq \varepsilon_1 < 1, \quad 0 \leq \varepsilon_2 < 1, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \gamma < 1$$

$T_1$  in  $T_2$  sta akcesorična parametra.

Enačbi I in II sta tukaj

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0 \dots \text{I}^*$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1 \dots \text{II}^*$$

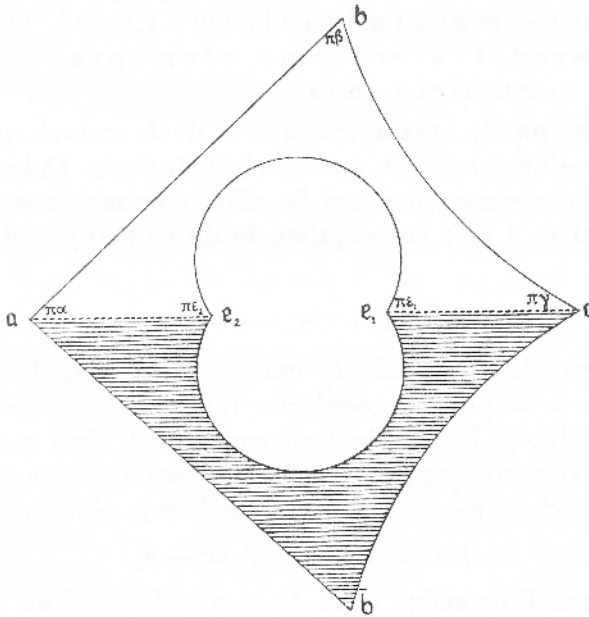
Za teorijo enoličnih avtomorfih funkcij je važen samo slučaj  $\text{I}^*$  in se hočem zato v nadaljnem omejiti samo na tega.

Ravnino  $x$  si mislimo razrezano vzdolž reelne osi najprej od  $e_1$  do  $e_2$  in nato še od  $a$  preko  $b$  do  $c = \infty$ .

Ako je relacija  $\text{I}^*$  izpolnjena, je vedno mogoče akcesorična parametra  $T_1$  in  $T_2$  v diferencialni enačbi (1) tako določiti, da je kvocijent  $\tau$  enolična funkcija na tako razrezani ravnini  $x$ . Eksponenti  $\alpha, \beta$  in  $\gamma$  so pri tem še poljubni, le da

so manjši od 1. Kvocijent  $\tau$  dveh neodvisnih rešitev enačbe (1) preslika razrezano ravnino  $x$  na nek lik v ravnini  $\tau$ , ki je omejen s krožnimi loki. V bistvu je to krožni četverokotnik s koti  $2a\pi$ ,  $\beta\pi$ ,  $2\gamma\pi$  in  $\beta\pi$ , iz katerega je izrezan krožni dvo-kotnik. Ta lik pa lahko leži na več listih. Kot oscilacijsko število definirajmo število listov, na katerih leži naš lik. V slučaju  $I^*$  se dobi oscilacijsko število vedno liho:  $2z +$

Četverokotnik ima tu vedno ortogonalen krog, ki je lahko reelen, imaginaren, ali pa se reducira na točko. V primerih, da eksistira reelen ortogonalen krog in je  $a + \beta + \gamma < 1$ , ali da je ortogonalni krog imaginaren, ali pa, če se reducira na točko ( $a + \beta + \gamma = 1$ ), se da poleg eksistence rešitve problema dognati še mnogo več. Tu velja namreč stavek: K vsakemu oscilacijskemu številu  $2z + 1$  pripada tudi natančno  $2z + 1$  rešitev. Če je oscilacijsko število 1, eksistira torej samo ena rešitev, namreč tako imenovani osnovni teorem. V tem primeru leži lik samo na eni ravnini (slika 2).



Slika 3.

V teoriji enoličnih avtomorfnih funkcij so eksponenti recipročna cela števila. Lahko se je prepričati, da v tem primeru vedno eksistira imaginaren ortogonalen krog, če je  $\alpha + \beta + \gamma > 1$ . Iz zgornjega sledi, da se dasta parametra v diferencialni enačbi na samo en način tako določiti, da je kvocient  $\tau$  enolična funkcija na razrezani ravnini  $x$  in leži pripadajoči lik samo na enem listu. Ako smatramo  $x$  kot funkcijo kvocienta  $\tau$ , je to enolična avtomorfna funkcija kvocienta  $\tau$ . Fundamentalno polje te funkcije je krožni četverkotnik, iz katerega je izrezan dvokotnik (slika 2).

Tako dobimo dve različni vrsti avtomorfnih funkcij. Če je namreč  $\alpha + \beta + \gamma < 1$ , je eksistenčno polje pripadajočih avtomorfnih funkcij omejeno z neskončno mnogimi mejnimi krogi in sicer je vsaka točka katerega koli mejnega kroga stekališče takih krogov. Kadar pa je  $\alpha + \beta + \gamma > 1$ , je eksistenčno polje pripadajočih funkcij cela ravnina  $\tau$  z izjemo ene same perfektne množice točk.

Ta razprava daje prvi, samo iz teorije diferencialnih enačb izhajajoči dokaz za existenco takih Kleinovih avtomorfnih funkcij, katerih eksistenčno polje je omejeno z neskončno mnogimi mejnimi krogi. Dokazovalna sredstva so samo elementarna zveznostna razmotrivanja.

Vendar pa ta razmotrivanja v dveh smereh presegajo okvir navadnih enoličnih avtomorfnih funkcij. Dobi se namreč poleg osnovnega teorema še višje teoreme in so pri tem eksponenti  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  še poljubni, le da so manjši od 1.

## 1.

Diferencialna enačba (1) ima v vsaki singularni točki razen v  $c = \infty$  po eno regularno rešitev. To rešitev zaznamujmo vedno z  $Y_2$ . To je tudi ena izmed obeh normiranih rešitev v dotični singularni točki. Druga normirana rešitev n. pr. v točki  $e_1$  ima, če je  $\varepsilon_1 \neq 0$ , naslednjo obliko:

$$Y_{1e_1} = (x - e_1)^{\varepsilon_1} \wp(x - e_1)$$

kjer pomeni  $\wp$  potenčno vrsto, ki je v točki  $e_1$  od nič različna. Ravno tako je pri drugih singularnih točkah. Če pa je

$\varepsilon_1 = 0$ , ima druga normirana rešitev v točki  $e_1$  logaritmično singularnost in je

$$Y_{1e_1} = Y_{2e_1} \log(x - e_1) + Q(x - e_1)$$

V peti singularni točki  $c = \infty$  sta normirani rešitvi  $(\frac{1}{x})' \mathfrak{P}_1(\frac{1}{x})$  in  $(\frac{1}{x})'' \mathfrak{P}_2(\frac{1}{x})$  ter nastopijo slične spremembe kakor prej, kadar je  $\gamma = 0$ .

Problem, ki smo si ga zastavili, zahteva, da se kvocient  $\tau$  dveh neodvisnih rešitev enačbe (1) povrne vase pri obhodu točke  $x$  okoli obeh singularnih točk  $e_1$  in  $e_2$ . Obhodu okoli ene singularne točke odgovarja neka linearna lomljena substitucija kvocienta  $\tau$ . Kompozitum substitucij, ki odgovarjata obhodoma okoli točk  $e_1$  in  $e_2$ , mora biti identična substitucija.

Če se vzame za  $\tau$  kvocient normiranih rešitev v  $e_1$  ter se postavi  $\tau_{e_1} = Y_{1e_1} : Y_{2e_1}$ , tedaj preide  $\tau_{e_1}$  v  $e^{2\varepsilon_1\pi i} \tau_{e_1}$ , kadar obkroži  $x$  točko  $e_1$  v pozitivnem smislu. Treba je še poiskati, v kaj preide  $\tau_{e_1}$  pri obkrožitvi točke  $x$  okoli  $e_2$ . Ker sta v  $e_2$  normirani rešitvi neodvisni, se vsaka nadaljna rešitev diferencialne enačbe (1) linearno izraža s tema dvema, torej tudi  $Y_{1e_1}$  in  $Y_{2e_1}$ . Naj bo

$$\begin{aligned} Y_{1e_1} &= AY_{1e_2} + BY_{2e_2} \dots (*) \\ Y_{2e_1} &= CY_{1e_2} + DY_{2e_2} \dots (*) \end{aligned}$$

kjer pomenita  $Y_{1e_2}$  in  $Y_{2e_2}$  v  $e_2$  normirani rešitvi. Determinanta  $AD - BC$  je od nič različna, ker sta tudi  $Y_{1e_2}$  in  $Y_{2e_2}$  neodvisni. Kvocient  $\tau_{e_1}$  pa se izraža s  $\tau_{e_2}$  z naslednjo linearno substitucijo

$$\tau_{e_1} = \frac{A\tau_{e_2} + B}{C\tau_{e_2} + D}; \quad \tau_{e_2} = \frac{Y_{1e_2}}{Y_{2e_2}} \dots (*)$$

Ker preide  $\tau_{e_2}$  pri pozitivnem obhodu točke  $x$  okoli točke  $e_2$  v  $e^{2\varepsilon_2\pi i} \tau_{e_2}$ , preide  $\tau_{e_1}$  v

$$\frac{A e^{2\varepsilon_2\pi i} \tau_{e_2} + B}{C e^{2\varepsilon_2\pi i} \tau_{e_2} + D}$$

V ta izraz je treba postaviti za  $\tau_{e_2} = \frac{-D\tau_{e_1} + B}{C\tau_{e_1} - A}$ , ki se dobi iz enačba (\*). Substitucija kvocienta  $\tau_{e_1}$ , ki odgovarja pozitivnemu obhodu okoli točke  $e_1$ , se sedaj glasi

$$\frac{(BC - AD e^{2\varepsilon_2\pi i}) \tau_{e_1} + AB(e^{2\varepsilon_2\pi i} - 1)}{DC(1 - e^{2\varepsilon_2\pi i}) \tau_{e_1} + BC e^{2\varepsilon_2\pi i} - AD}$$

Če obkroži  $x$  obe singularni točki  $e_1$  in  $e_2$  v pozitivnem smislu, si mislimo, da obkroži najprej  $e_1$  in nato še  $e_2$  v pozitivnem smislu. Pri tem preide  $\tau_e$  v

$$\frac{(BC - AD e^{2\varepsilon_2 \pi i}) e^{2\varepsilon_1 \pi i} \tau_{e_1} + AB (e^{2\varepsilon_2 \pi i} - i)}{DC (1 - e^{2\varepsilon_3 \pi i}) e^{2\varepsilon_1 \pi i} \tau_{e_1} + BC e^{2\varepsilon_2 \pi i} - AD} \dots (S)$$

Substitucija (S) mora biti identična. Zato morata biti izpolnjeni najprej naslednji dve enačbi:

$$AB = 0 \text{ in } DC = 0$$

Iz prve enačbe sledi, da je ali a)  $A = 0$ , ali pa  $\beta$ )  $B = 0$ .

a) Če je  $A = 0$ , potem  $C \neq 0$  in je torej  $D = 0$ . Substitucija (S) se sedaj glasi

$$e^{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) 2\pi i} \tau_e$$

Ker mora biti to identična substitucija, je  $e^{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) 2\pi i} = 1$ . Odtod sledi, da je  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$  celo število. Ker pa sta  $\varepsilon_1$  in  $\varepsilon_2$  pozitivna in manjša od 1, mora biti  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Tako smo dobili tri pogoje  $A = 0$ ,  $D = 0$  in  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , ki so potrebni in zadostni za rešitev problema.

$\beta$ ) Sedaj naj bo  $B = 0$ , potem  $D \neq 0$  in je  $C = 0$ . Substitucija (S) se v tem primeru reducira na

$$e^{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) 2\pi i} \tau_{e_1}$$

Odtod sledi, enako kakor prej, da je  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$ .

Vse to pa velja le, če sta  $\varepsilon_1$  in  $\varepsilon_2$  od nič različna. Najprej se je lahko uveriti, da moreta biti  $\varepsilon_1$  in  $\varepsilon_2$  le istočasno nič. Naj bo torej sedaj  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Zopet naj pomeni  $\tau_{e_1} = Y_{1e_1} : Y_{2e_1}$  in  $\tau_{e_2}$  naj se izraža na sledeči način s  $\tau_{e_2}$

$$\tau_{e_1} = \frac{A\tau_{e_2} + B}{C\tau_{e_2} + D}$$

Pri pozitivnem obhodu točke  $x$  okoli  $e_1$  preide  $\tau_{e_1}$  v  $\tau_{e_1} + 2\pi i$ , pri obhodu okoli  $e_2$  pa preide  $\tau_{e_2}$  v

$$\frac{A\tau_{e_2} + 2A\pi i + B}{C\tau_{e_2} + 2C\pi i + D}$$

in če zopet vstavimo za  $\tau_{e_2} = \frac{-D\tau_{e_1} + B}{C\tau_{e_1} - A}$ , dobimo

$$\frac{(BC - AD + 2\pi i AC)\tau_{e_1} - 2\pi i A^2}{2\pi i C^2 \tau_{e_1} + BC - AD - 2\pi i AC} \quad (S')$$

Odtod sledi najprej, da mora biti  $C = 0$ . Substitucija ( $S'$ ) se potem reducira na

$$\tau_{e_1} + 2\pi i \frac{A}{D}$$

Pri obhodu okoli obeh singularnih točk  $e_1$  in  $e_2$  pa preide  $\tau_{e_1}$  v

$$\tau_{e_1} + 2\pi i \frac{A + D}{D}$$

Če naj bo to identična substitucija, mora biti  $A + D = 0$ .

Doslej smo torej spoznali, da moremo pričakovati rešitev problema le v primeru, če je izpolnjena ena izmed naslednjih relacij:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= 0 \dots I^* \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= 1 \dots II^* \end{aligned}$$

Kakor sem že zgoraj omenil, se hočem v nadaljnjem omejiti samo na slučaj  $I^*$ . V tem slučaju je treba parametra  $T_1$  in  $T_2$  v diferencialni enačbi (1) tako določiti, da je ustrezno pogojema  $A = 0$  in  $D = 0$ .

## 2.

Vzemimo najprej, da je prvi pogoj  $A = 0$  izpolnjen. Potem se izraža  $\tau_{e_1}$  na sledeči način s  $\tau_{e_2}$ ,

$$\tau_{e_1} = \frac{B}{C\tau_{e_2} + D}, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0$$

Ker je  $\tau_{e_1}(e_1) = Y_{1e_1}(e_1) : Y_{2e_1}(e_1) = 0$ , če  $\varepsilon_1 \neq 0$ , sledi odtod, da mora biti  $\tau_{e_2}(e_1) = \infty$ . Narobe pa tudi velja, da je  $A = 0$ , kadar je  $\tau_{e_2}(e_1) = \infty$ . Iz  $\tau_{e_2}(e_1) = \infty$  sledi  $Y_{1e_2}(e_1) = 0$  in je torej  $Y_{1e_2}$  proporcionalen z  $Y_{1e_1}$ . To velja za  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq 0$ . V nasprotnem primeru se glasi prvi pogoj  $C = 0$  in je  $Y_{1e_2}$  proporcionalen z  $Y_{2e_1}$ . Zaradi tega je tudi sedaj  $\tau_{e_2}(e_1) = \infty$ . Postavimo  $m = \tau_{e_2}(e_1)$ . Prvi pogoj se glasi potem v obeh primerih  $m = \infty$ .

Sedaj je treba dognati, ali je možno, če se v enačbi (1) fiksira en parameter, drugi vedno tako določiti, da zavzame  $m$  poljubno naprej predpisano vrednost. Izkazalo se bo, da je to vedno mogoče in sicer še na neskončno mnogo načinov.

V ta namen zapišimo najprej diferencialno enačbo (1) v obliki

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dy}{dx} \right) + p \frac{T(x-a)(x-b) + \lambda(x-a) - \mu}{(x-e_1)(x-e_2)(x-a)(x-b)} y = 0$$

kjer pomeni

$$p = (x - e_1)^{1-\varepsilon_1} (x - e_2)^{1-\varepsilon_2} (x - a)^{1-\alpha} (x - b)^{1-\beta}$$

ali še krajše

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dy}{dx} \right) = p [\varphi(x) + \lambda\psi(x) + \mu\chi(x)] y \dots (1^*)$$

$$\varphi(x) = -\frac{T}{(x-e_1)(x-e_2)}; \psi(x) = -\frac{1}{(x-e_1)(x-e_2)(x-b)};$$

$$\chi(x) = \frac{1}{(x-e_1)(x-e_2)(x-a)(x-b)}$$

V enačbi (1\*) sta akcesorična parametra  $\lambda$  in  $\mu$ .

Za naslednje razmotrivanje je važno, kakšen znak imata  $\psi(x)$  in  $\chi(x)$  na posameznih intervalih med singularnimi točkami. Na intervalu  $(e_1, e_2)$  je  $\psi(x)$  pozitiven,  $\chi(x)$  pa negativen, v splošnem pa imata  $\psi(x)$  in  $\chi(x)$  znake, kakor jih kaže ta-le slika:

$$\begin{array}{ccccccccc} \psi(x) & : & + & & - & & - & & + & & - \\ c = \infty & \text{---} & & \text{---} & b & \text{---} & & \text{---} & a & \text{---} & & \text{---} & e_2 & \text{---} & & \text{---} & e_1 & \text{---} \\ \chi(x) & : & + & & - & & + & & - & & + \end{array}$$

Končno naj bosta  $Y_{1e_1}$  in  $Y_{2e}$ , tako normirana, da je  $Y_{2e_2}(e_2) - 1 p Y'_{2e_2}(e_2) = 0$ ,  $\bar{Y}_{1e_2} = (x - e_2)^{\varepsilon_2} \mathfrak{P}(x - e_2)$ , kjer pomeni  $\mathfrak{P}$  potenčno vrsto z reelnimi koeficienti in začetni člen, ki nima faktorja  $x - e_2$ , naj bo tako določen, da je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |p| \frac{dY_{1e_2}}{dx} \Big|_{x=e_2+\varepsilon} = 1$$

Isto naj velja za ostale singularne točke, če eksponenti niso enaki nič. Če pa je  $\varepsilon_2 = 0$ , naj pomeni  $Y_{2e_2}$  regularno rešitev v točki  $e_2$  kakor prej,  $Y_{1e_2}$  pa naj bo rešitev, ki je logaritmčno singularna v točki  $e_2$ ,

$$Y_{1e_2} = \rho Y_{2e_2} \log(x - e_2) + Q(x - e_2)$$

kjer naj bo  $Q(x - e_2)$  taka potenčna vrsta, ki ima za  $x = e_2$  vrednost 0. Faktor  $\rho$  pa naj bo tako določen kakor zgoraj, da je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |p| \frac{dY_{1e_2}}{dx} \Big|_{x=e_2+\varepsilon} = 1$$

Če se postavi v prvo enačbo (\*) za  $x = e_1$ , se dobi

$$m = v_{e_2}(e_1) = \frac{Y_{1e_2}(e_1)}{Y_{2e_2}(e_1)} = -\frac{B}{A}$$

kar pa velja samo v primeru  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq 0$ .

V diferencialni enačbi si mislimo  $\mu$  fiksiran, drugače pa polnoma poljuben. Drugi parameter pa naj ima tako veliko negativno vrednost, da je koeficient pri  $y$  na desni strani enačbe (1\*) na intervalu  $(e_2, e_1)$  povsod pozitiven. To je vedno mogoče doseči, ker je treba izbrati parameter  $\lambda$  samo pozitiven in tako velik, da je  $\lambda(x-a)$  povsod na intervalu  $(e_2, e_1)$  večji od  $T(x-a)(x-b) - \mu$ .

Na realni osi se lahko postavi v diferencialni enačbi (1\*)  $|p|$  namesto  $p$ . Ker je  $Y_{1e_2}(e_2) = 1$  in  $|p| \frac{dY_{1e_2}}{dx} \Big|_{x=e_2} = 1$ , sledi iz enačbe (1\*), da  $|p| \frac{dY_{1e_2}}{dx}$  in  $|p| \frac{dY_{2e_2}}{dx}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$  stalno naraščata in sta pozitivna. Izjema je le pri  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , kar pa hočem pozneje obdelati. Odtod pa dalje sledi, da tudi  $Y_{1e_2}$  in  $Y_{2e_2}$  naraščata, če raste  $x$  od  $e_2$  do  $e_1$ . Torej je

$$m = \frac{Y_{1e_2}(e_1)}{Y_{2e_2}(e_1)} > 0$$

Naj bosta  $\lambda, \mu$  in  $\lambda_1, \mu_1$  dva para vrednosti parametrov. Nadalje naj bo  $y$  ena rešitev diferencialne enačbe (1\*) s parametroma  $\lambda$  in  $\mu$ ,  $\eta$  pa rešitev iste enačbe, kjer imata parametra vrednosti  $\lambda_1$  in  $\mu_1$ , tako da je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( |p| \frac{dy}{dx} \right) &= |p| [\varphi(x) + \lambda\psi(x) + \mu\chi(x)] y \\ \frac{d}{dx} \left( |p| \frac{d\eta}{dx} \right) &= |p| [\varphi(x) + \lambda_1\psi(x) + \mu_1\chi(x)] \eta \end{aligned}$$

Ako se pomnoži prvo enačbo z  $\eta$ , drugo pa z  $y$  in se nato prvo od druge odšteje, se dobi z integracijo

$$p \left( y \frac{d\eta}{dx} - \eta \frac{dy}{dx} \right) = (\lambda_1 - \lambda) \int |p| y \eta \psi(x) dx + (\mu_1 - \mu) \int |p| y \eta \chi(x) dx \quad (2)$$

Za  $y$  in  $\eta$  postavimo v enačbo (2)  $Y_{1e_1} e^{-\varepsilon_1 \pi i}$ , enkrat pri vrednostnih parametrov  $\lambda, \mu$ , drugič pa pri vrednostih  $\lambda_1$  in  $\mu_1$ . Faktor  $e^{-\varepsilon_1 \pi i}$  se vzame radi tega, da je  $Y_{1e_1} e^{-\varepsilon_1 \pi i}$  realen

na intervalu  $(e_2, e_1)$ . Iz enačbe (\*) sledi, da se  $Y_{1e_1}$  na sledeči način izraža z  $Y_{1e_2}$  in  $Y_{2e_2}$ :

$$Y_{1e_1} = A(Y_{1e_2} - m Y_{2e_2}).$$

Če se to vstavi v (2) in se vzame integrale od  $e_2$  do  $e_1$ , se dobi

$$e^{-2\varepsilon_1 \pi i} (B^{(1)} A^{(0)} - B^{(0)} A^{(1)}) = (\lambda_1 - \lambda) \int_{e_2}^{e_1} |p| \psi e^{-2\varepsilon_1 \pi i} Y_{e_1}^{(0)} Y_{e_1}^{(1)} dx,$$

kjer pripadajo k  $\lambda$ ,  $\mu$  z indeksom  $(\circ)$  označene količine, k  $\lambda_1$ ,  $\mu$  pa z indeksom (1). Zgornjo enačbo moremo pisati tudi v obliki

$$e^{-2\varepsilon_1 \pi i} A^{(0)} A^{(1)} (m - m^{(1)}) = (\lambda_1 - \lambda) \int_{e_2}^{e_1} |p| \psi e^{-2\varepsilon_1 \pi i} Y_{e_1}^{(0)} Y_{e_1}^{(1)} dx \dots (3)$$

Faktor  $e^{-2\varepsilon_1 \pi i} A^{(0)} A^{(1)}$  je reelen in je tudi pozitiven, če sta  $\lambda$  in  $\lambda_1$  dovolj blizu drug drugega. Ker je  $\psi(x)$  na intervalu  $(e_2, e_1)$  pozitiven, je integral na desni strani tudi pozitiven. Torej sledi odtod, da  $m$  pada, če  $\lambda$  narašča in narobe. Nadalje sledi še iz zgornje enačbe, da se  $m$  z  $\lambda$  zvezno spreminja, razen za tiste vrednosti parametra  $\lambda$ , kjer je  $m = \infty$ . Tam se  $1 : m$  zvezno spreminja, kar se da prav lahko uvideti iz zgornje enačbe.

Najprej smo izbrali  $\lambda$  tako, da je bil  $m$  pozitiven in ni imel  $Y_{2e_2}$  nobene ničle na intervalu  $(e_2, e_1)$ . Če se  $\lambda$  od te vrednosti veča, se  $m$  sicer manjša, ostane pa vedno pozitiven. Zato je treba  $\lambda$  manjšati. Pri tem se  $m$  veča in raste preko vsake meje, če gre  $\lambda$  proti taki vrednosti, za katero je  $Y_{2e_2}(e_1) = 0$ . Take vrednosti parametra vedno eksistirajo in jih je celo neskončno mnogo. Če pa je predpisano število ničel, ki jih mora imeti  $Y_{2e_2}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$ , potem je parameter  $\lambda$  natančno določen. Torej raste  $m$  najprej do vrednosti  $+\infty$ , ki jo doseže tedaj, ko je  $Y_{2e_2}(e_1) = 0$  in nima  $Y_{2e_2}$  nobene ničle na intervalu  $(e_2, e_1)$ . Če se parameter  $\lambda$  še manjša, preskoči  $m$  najprej iz  $+\infty$  v  $-\infty$  in potem zopet raste. Če se parameter  $\lambda$  manjša proti  $-\infty$ , zavzame  $m$  vsako vrednost med  $-\infty$  in  $+\infty$  neskončno mnogokrat. Posamezne vrednosti parametra, za katere zavzame  $m$  predpisano vred-

nost, so karakterizirane s številom ničel, ki jih ima  $Y_{2e_2}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$ . Če je namreč to število dano, je  $\lambda$  natančno določen.

Sedaj je treba obdelati še slučaj, da je  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Tudi v tem primeru se glasi prvi pogoj  $m = \infty$ . Naj ima  $\lambda$  zopet tako veliko pozitivno vrednost, da je koeficient pri  $y$  na desni strani enačbe (1\*) povsod na intervalu  $(e_2, e_1)$  pozitiven.

Ker je  $Y_{1e_2}(e_2) = 1$ ,  $|p| \frac{dY_{1e_2}}{dx}$  stalno narašča, če gre  $x$  od  $e_2$  proti  $e_1$  in je torej  $\frac{dY_{1e_2}}{dx}$  povsod na tem intervalu pozitiven.

Odtod pa sledi, da tudi  $Y_{2e_2}$  narašča in gre proti vrednosti  $+\infty$ , če limitira  $x$  proti  $e_1$ . Za rešitev  $Y_{1e_1}$  pa smo vzeli  $\varrho Y_{1e_2} \log(x - e_2) + Q(x - e_2)$ , kjer je  $\varrho > 0$ . Torej gre  $Y_{1e_2}$  proti  $-\infty$ , če se približuje  $x$  od desne strani točki  $e_2$ . Ker je

$|p| \frac{dY_{1e_2}}{dx} \Big|_{x=e_2} = 1$ , se  $|p| \frac{dY_{1e_2}}{dx}$  nekaj časa zmanjšuje, če gre  $x$  od  $e_2$  proti  $e_1$ .  $Y_{1e_2}$  je najprej negativen in se večja. Ako

doseže  $\frac{dY_{1e_2}}{dx}$  vrednost nič na intervalu  $(e_2, e_1)$ , postane potem

negativen in ostane tak do  $e_1$ .  $Y_{1e_2}$  se začne od tistega trenutka dalje manjšati in gre proti  $-\infty$ , če limitira  $x$  proti  $e_1$ ,

kakor nam kaže slika 3. V tem primeru je  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |p| \frac{dY_{1e_2}}{dx} \Big|_{x=e_1-\varepsilon}$

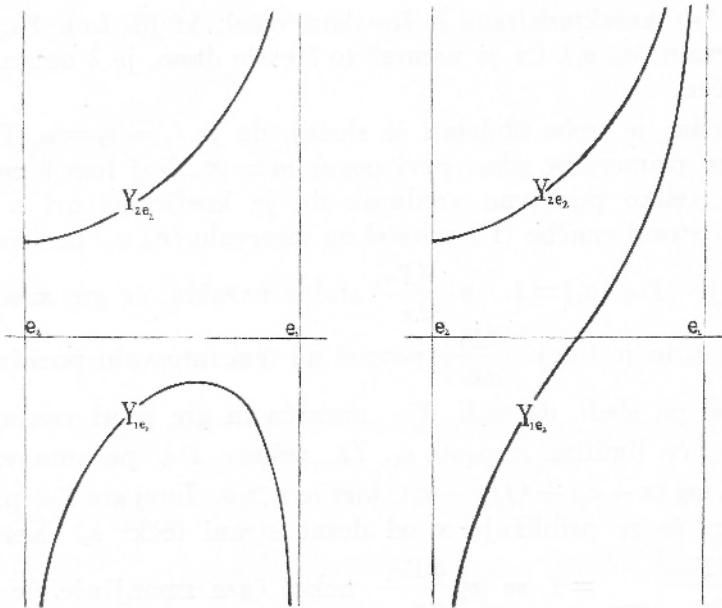
$< 0$  in je  $m < 0$ . Lahko pa doseže najprej  $Y_{1e_2}$  vrednost nič

na intervalu  $(e_2, e_1)$ . Od te točke dalje se začne  $|p| \frac{dY_{1e_2}}{dx}$

večati in je  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |p| \frac{dY_{1e_2}}{dx} \Big|_{x=e_1-\varepsilon} > 0$ , torej je  $m > 0$ . V tem

primeru dobimo sliko 4.

Tudi sedaj se  $m$  s parametrom  $\lambda$  zvezno spreminja in se manjša, če se parameter večja in narobe. Enačba (3) velja namreč sedaj prav tako kakor prej, le da se vzame tu  $Y_{1e_2} = \varrho Y_{2e_2} \log(x - e_2) + Q(x - e_2)$ . Pri dovolj velikem negativnem  $\lambda$  bosta imela  $Y_{1e_2}$  in  $Y_{2e_2}$  ničle na intervalu  $(e_2, e_1)$ . Vzemimo najprej prvi primer, ko  $Y_{1e_2}$  nima ničle na intervalu  $(e_2, e_1)$ , da je torej  $m < 0$ . Če se  $\lambda$  manjša, bo dobil  $Y_{1e_2}$



Slika 4.

prej ničlo kakor  $Y_{2e_2}$ . To se uvidi na sledeči način. Naj bo  $x_0$  ničla, ki jo ima  $Y_{2e_2}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$ . Sedaj velja enačba

$$Y_{2e_2}(x_0) |p| \frac{dY_{1e_2}(x_0)}{dx} - Y_{1e_2}(x_0) |p| \frac{dY_{2e_2}(x_0)}{dx} = 1$$

Ker je  $Y_{2e_2}(x) = 0$  in  $Y_{1e_2}(x_0) < 0$ , sledi iz te enačbe, da je

$$|p| \frac{dY_{2e_2}(x_0)}{dx} > 0$$

To pa ni mogoče, ker je  $x_0$  prva ničla na intervalu  $(e_2, e_1)$  in preide tam  $Y_{2e_2}$  iz pozitivnih vrednosti v negativne. Torej dobi najprej  $Y_{1e_2}$  ničlo na intervalu  $(e_2, e_1)$  in je tedaj  $m > 0$ .  $Y_{2e_2}$  pa dobi ničlo, preden dobi  $Y_{1e_2}$  drugo in je tedaj  $m < 0$ . Ker se  $m$  zvezno spreminja in raste, je moral preiti skozi vrednost  $\infty$ . Kadar je prvič  $m = \infty$ , nima  $Y_{2e_2}$  še nobene ničle na intervalu  $(e_2, e_1)$ . Če se parameter  $\lambda$  še nadalje manjša, preskoči  $m$  najprej iz vrednosti  $+\infty$  na  $-\infty$  in potem zopet raste do  $+\infty$ . To se ponavlja neskončno mnogokrat. Zopet se posamezne vrednosti parametra  $\lambda$ , pri katerih je  $m = \infty$ .

ločijo po tem, koliko ničel ima  $Y_{2e_2}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$ . Če  $e$  to število predpisano. je  $\lambda$  s tem natančno določen.

Kadar je  $m = \infty$ . je v primeru  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq 0$ ,  $Y_{2e_2}$  proporcionalen z  $Y_{1e_1}$ . Če pa je  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , je  $Y_{2e_2}$  proporcionalen z  $Y_{2e_1}$ .

Dosedaj pa se je spreminjal le parameter  $\lambda$ , medtem ko je  $\mu$  ostal ves čas fiksen, sicer pa poljuben. Če se vzame za  $\mu$  kakšno drugo vrednost in se predpiše število ničel, ki naj jih ima  $Y_{2e_2}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$ , se dobi zopet eno, pa samo eno vrednost za parameter  $\lambda$ . Torej je  $\lambda$  enolična funkcija parametra  $\mu$ . Ta funkcija je zvezna in obenem monotono naraščajoča. To je razvidno iz naslednjega razmotrivanja.

Rešitev  $Y_{2e_2}$ , ki je v  $e_2$  regularna, ima v primeru, da je  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq 0$ , ničlo v točki  $e_1$ . Za  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  pa je  $Y_{2e_2}$  tudi v  $e_1$  regularna rešitev. Naj se  $\mu$  spremeni za  $\Delta\mu$ , pripadajočo spremembo parametra  $\lambda$  zaznamujmo z  $\Delta\lambda$ . K paru  $\lambda, \mu$  naj pripada rešitev  $Y_{2e_2}$ , k  $\lambda + \Delta\lambda, \mu + \Delta\mu$  pa  $Y_{2e_2}^{(\Delta)}$ . Postavimo v enačbo (2) za  $y$  rešitev  $Y_{2e_2}$ , namesto  $\eta$  pa  $Y_{2e_2}^{(\Delta)}$ .  $\lambda_1$  in  $\mu_1$  pomenita tu  $\lambda + \Delta\lambda$  in  $\mu + \Delta\mu$ . Tako dobimo, če vzamemo integrale med mejama  $e_2$  in  $e_1$

$$\left[ |p| \left( Y_{2e_2} \frac{dY_{2e_2}^{(\Delta)}}{dx} - Y_{2e_2}^{(\Delta)} \frac{dY_{2e_2}}{dx} \right) \right]_{e_2}^{e_1} = \Delta\lambda \int_{e_2}^{e_1} |p| \psi(x) Y_{2e_2}^{(\Delta)} Y_{2e_2} dx + \Delta\mu \int_{e_2}^{e_1} |p| \chi(x) Y_{2e_2} Y_{2e_2}^{(\Delta)} dx$$

Leva stran ima vrednost nič. Sprememba  $\Delta\mu$  naj bo tako majhna, da se  $Y_{2e_2}$  le malo razlikuje od  $Y_{2e_2}^{(\Delta)}$ . Ker je  $\psi > 0$  in  $\chi < 0$  na intervalu  $(e_2, e_1)$ , je

$$\int_{e_2}^{e_1} |p| \psi(x) Y_{2e_2} Y_{2e_2}^{(\Delta)} dx > 0, \quad \int_{e_2}^{e_1} |p| \chi(x) Y_{2e_2} Y_{2e_2}^{(\Delta)} dx < 0$$

Torej je

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\mu} > 0$$

Iz te enačbe pa sledi zveznost in monotonost parametra  $\lambda$  kot funkcije parametra  $\mu$ . Torej se  $\lambda$  stalno večja z naraščajočim  $\mu$ . Končno se da še prav lahko uvideti, da, če raste  $\mu$  v eno ali drugo smer preko vsake meje, raste tudi  $\lambda$  preko

vsake meje. Kajti iz enakega razmotrivanja kakor zgoraj sledi, da je tudi  $\mu$  zvezna in monotona funkcija parametra  $\lambda$ . Odslej naprej bomo  $\lambda$  in  $\mu$  samo tako izpreminjali, da je izpolnjen pogoj  $m = \infty$  in da ima  $Y_{2e_2}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$  predpisano število  $\alpha$  ničel.

Za rešitev problema je še potrebno parametra  $\lambda$  in  $\mu$  v skladu s prvim pogojem tako določiti, da je tudi  $D = 0$ . Vendar se mi to direktno s samim razmotrivanjem na intervalu  $(e_2, e_1)$  ni posrečilo. Moral sem iti k drugim intervalom in postaviti druge pogoje, ki se dajo izpolniti in ki so ekvivalentni s pogojem  $D = 0$ .

### 3.

Kvocient dveh neodvisnih rešitev diferencialne enačbe (1) konformno vpodobi zgornjo polovico ravnine  $x$  na peterokotnik, ki je vobče omejen s krožnimi loki. Koti tega peterokotnika so  $\varepsilon_1\pi, \varepsilon_2\pi, \alpha\pi, \beta\pi$  in  $\gamma\pi$ . Okolica vsake točke, ki leži na zgornji polovici ravnine  $x$ , se enostavno preslika na okolico odgovarjajoče točke v peterokotniku. To je razvidno odtod, ker ni odvod kvocienta  $\tau$  dveh neodvisnih rešitev enačbe (1) nikjer nič niti neskončen, če se izvzame singularne točke in točke, kjer je  $\tau = \infty$ . Ta odvod se namreč glasi

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \\ &= C \frac{(x - e_1)^{\varepsilon_1 - 1} (x - e_2)^{\varepsilon_2 - 1} (x - a)^{\alpha - 1} (x - b)^{\beta - 1}}{y_1^2}. \end{aligned}$$

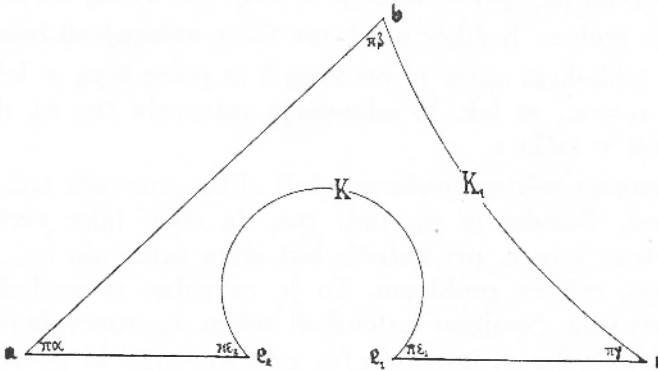
$C$  je konstanta, ki je od nič različna. Zaradi tega je v vsaki točki, ki ni singularna in kjer ni  $y_1 = 0$ ,  $\frac{d\tau}{dx} \neq 0$ . Če pa je v kakšni točki, n. pr.  $x_0$ ,  $y_1 = 0$ , ima  $y_1$  v  $x_0$  enostavno ničlo,  $y_2 \neq 0$ . Potem je

$$\tau = \frac{C_{-1}}{x - x_0} + C_0 + C_1(x - x_0) + \dots, \quad C_{-1} \neq 0$$

in okolica točke  $x_0$  se enostavno vpodobi okrog  $\tau = \infty$ . Odtod pa ne sledi, da se peterokotnik ne bi mogel delno prekrivati. Vendar razvejišča nima nikjer v notranjosti.

Preslikajmo sedaj zgornjo polovico ravnine  $x$  s  $\tau a = Y_{1a} : Y_{2a}$ , kjer sta  $Y_{1a}$  in  $Y_{2a}$  tako normirana kakor zgoraj. Če gre  $x$

po realni osi od  $a$  do  $e_2$ , opiše  $\tau_a$  segment  $ae_2$  na realni osi, Točka  $a$  leži pri tem v izhodišču.



Slika 5.

Kadar pa gre  $x$  proti točki  $b$  po realni osi in se singularne točke  $a$  izogne v majhnem polkrogu, ki leži v zgornji polovici ravnine  $x$ , opiše  $\tau_a$  daljico  $ab$ , ki oklepa z daljico  $ae_2$  kot  $\alpha\pi$ . Če gre  $x$  proti točki  $e_1$ , ko se je točke  $e_2$  prav tako izognil kakor prej  $a$ , opiše  $\tau_a$  lok kroga  $K$ , ki seče daljico  $ae_2$  pod kotom  $\epsilon_2\pi$ . Če zavzameta  $\lambda$  in  $\mu$  samo take vrednosti, da je pogoju  $m = \infty$  ustrezno, leži slika točke  $e_1$  na realni osi, to je na podaljšku daljice  $ae_2$ . To je razvidno iz naslednjega. Med normiranimi rešitvami v točki  $a$  in normiranimi rešitvami v točki  $e_2$  obstoja linearna relacija

$$Y_{1a} = A_1 Y_{1e_2} + B_1 Y_{2e_2}$$

$$Y_{2a} = C_1 Y_{1e_2} + D_1 Y_{2e_2}$$

$Y_{1a}$  in  $Y_{2a}$  sta realna na intervalu  $(a, e_2)$ , prav tako  $Y_{2e_2}$ . Ker pa  $Y_{1e_2}$  ni realen na tem intervalu, ampak ima tam vrtilni faktor\*)  $e^{\epsilon_2\pi i}$ , imata  $A_1$  in  $C_1$  vrtilni faktor  $e^{\epsilon_2\pi i}$   $B_1$  in  $D_1$  pa sta realna. Potem je

$$\tau_a = \frac{A_1 \tau_{e_2} + B_1}{C_1 \tau_{e_2} + D_1}$$

Kvocijent  $\tau_{e_2}$  je realen na intervalu  $(e_2, e_1)$ , na intervalu  $(a, e_2)$  pa dobi faktor  $e^{\epsilon_2\pi i}$ . Kadar je prvemu pogoju ustrezno, je  $m = \tau_{e_2}(e_1) = \infty$ . Tedaj je torej  $\tau_a(e_1) = \frac{A_1}{C_1}$ . Koeficienta  $A_1$

\* Pri izražanju  $z = |z|e^{i\alpha}$  imenujemo  $e^{i\alpha}$  vrtilni faktor kompleksnega števila  $z$ .

in  $C_1$  pa imata isti vrtilni faktor. torej je njun kvocient reelen. Res leži  $e_1$ , to je slika točke  $e_1$ , na reelni osi. Ravno tako se uvidi to v primeru, če je  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Tedaj sta namreč  $A_1$  in  $C_1$  reelna. Kolikor ničel ima  $Y_{2\varepsilon_2}$  v notranjosti intervala  $(e_2, e_1)$ , tolikokrat opiše  $\tau a$  ves krog  $K$  in poleg tega še lok  $e_1 e_2$ . Ker je  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , se lok, ki odgovarja intervalu  $(e_1, c)$ , dotika reelne osi v točki  $e_1$ .

Če imamo rešitev problema, leži slika intervala  $(e_1, c)$  na reelni osi. Narobe je pa tudi res, da dajo take vrednosti parametrov  $\lambda$  in  $\mu$ , pri katerih leži slika intervala  $(e_1, c)$  na reelni osi, rešitev problema. To je razvidno iz naslednjega razmotrivanja. Spojimo katerokoli točko  $x_0$  intervala  $(a, e_2)$  s poljubno točko  $x_1$  intervala  $(e_1, c)$  s krivuljo, ki poteka popolnoma na zgornji polovici ravnine  $x$ . Tej odgovarja na ravnini  $\tau$  krivulja, ki veže  $x_0$  in  $x_1$  odgovarjajoči točki in poteka v notranjosti peterokotnika  $abc_1e_2$ . Če se vzame k prvotni krivulji še simetrično z ozirom na reelno os, se dobi sklenjeno krivuljo, ki oklepa singularni točki  $e_1$  in  $e_2$ , okoli katerih se  $\tau$  povrne vase. Torej mora tej krivulji odgovarjati sklenjena krivulja v ravnini  $\tau$ . Ker pa odgovarja simetrični krivulji na ravnini  $x$  krivulja, ki je simetrična z ozirom na reelno os ravnine  $\tau$ , mora ležati točki  $x_1$  odgovarjajoča točka na reelni osi. Točko  $x_1$  pa smo poljubno izbrali na intervalu  $(e_1, c)$ , torej leži slika tega intervala na reelni osi. Lahko se je prepričati, da obratno tudi velja.

Sedaj hočemo poiskati potrebne in zadostne pogoje za to, da leži slika intervala  $(e_1, c)$  na reelni osi.

Naj bosta  $Y_{1b}$  in  $Y_{2b}$  v točki  $b$  normirani rešitvi. Med tema in v točki  $a$  normiranima rešitvama obstoja naslednja linearna relacija

$$\begin{aligned} Y_{1a} &= A_2 Y_{1b} + B_2 Y_{2b} \\ Y_{2a} &= C_2 Y_{1b} + D_2 Y_{2b} \end{aligned}$$

Najprej vzemimo slučaj, da je  $\beta \neq 0$ . Koeficienti zgornje substitucije se izražajo na sledeči način

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |p| \frac{dY_{1a}}{dx} \Big|_{x=b+\varepsilon} ; B_2 = Y_{1a}(b) \\ C_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |p| \frac{dY_{2a}}{dx} \Big|_{x=b+\varepsilon} ; D_2 = Y_{2a}(b) \end{aligned} \right\} A_2 D_2 - B_2 C_2 = -e^{\alpha\pi i}$$

V slučaju  $\rho = 0$  se  $A_2$  in  $C_2$  ravno tako izražata kakor zgoraj, le formuli za  $B_2$  in  $D_2$  tedaj nimata smisla.

Kvocient  $\tau_a$  zavisi torej na sledeči način od kvocienta  $\tau_b$  v točki  $b$  normiranih rešitev

$$\tau_a = \frac{A_2 \tau_b + B_2}{C_2 \tau_b + D_2} \dots \quad (\dagger)$$

$\tau_a$  je realen na intervalu  $(b, a)$ , na intervalu  $(b, c)$  pa ima vrtilni faktor  $e^{\rho \pi i}$ . Kadar gre  $x$  od  $b$  proti  $c$ , opiše  $\tau_a$  lok  $\bar{bc}$  na krogu  $K$ . (sl. 5). Točka

$$\tau_a = \frac{A_2 e^{\beta \pi i} \tau + B_2}{C_2 e^{\beta \pi i} \tau + D_2}$$

opiše cel krog  $K_1$ , ko opiše  $\tau$  celo realno os. Končno je treba dobiti še sliko intervala  $(c, e_1)$ . V ta namen izrazimo  $\tau_a$  s kvocientom  $\tau_c$  v točki  $c$  normiranih rešitev, ki je realen na intervalu  $(e_1, c)$ . Naj bo

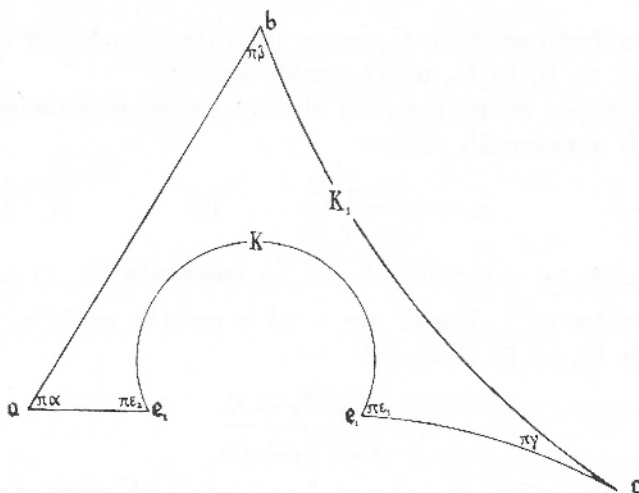
$$\tau_a = \frac{L \tau_c - M}{N \tau_c + P} \quad , \quad LP - MN = 1 \dots \quad (*)$$

$L, M, N, P$  so substitucijski koeficienti, ki so vobče kompleksni. Stranico  $\widehat{ce}_1$  opiše  $\tau_a$ , kadar gre  $\tau_c$  od  $\tau_c(c) = 0$  do  $\tau_c(e_1)$ . Problem zahteva, da leži stranica  $ce_1$  na realni osi. Torej mora biti substitucija (\*) takšna, da odgovarja realni osi spet realna os. Lahko pa se je prepričati, da odgovarja zgornji polovici ravnine  $\tau_a$  spodnja polovica ravnine  $\tau_c$  in narobe. Če se namreč giblje točka  $\tau_c$  po realni osi v eno smer, se premika  $\tau_a$  v nasprotno smer. Odtod sledi, ker je determinanta koeficientov 1, da morajo biti vsi koeficienti čisto imaginarni. Zaradi tega veljajo naslednje enačbe

$$\left. \begin{array}{l} L + \bar{L} = 0 \\ N + \bar{N} = 0 \end{array} \right\} , \quad \left. \begin{array}{l} M + \bar{M} = 0 \\ P + \bar{P} = 0 \end{array} \right\} \dots \quad (4)$$

Od teh štirih enačb so samo tri neodvisne, ker je substitucijska determinanta 1. To so potrebni in zadostni pogoji za rešitev problema.

V splošnem so tri izmed zgornjih enačb res neodvisne. V našem primeru pa sta samo dve neodvisni in to zaradi tega, ker je izpolnjen prvi pogoj  $m = \infty$ . Sedaj leži namreč stranica  $ce_1$  vobče na krogu, ki se dotika realne osi v točki  $e_1$ .



Slika 6.

Krog, na katerem leži stranica  $\widehat{ce_1}$ , opiše točka

$$\tau_a = \frac{L\tau + M}{N\tau + P},$$

ko opiše  $\tau$  celo reelno os. Ta krog se v točki  $e_1$  dotika reelne osi in tvori z njo kot  $\pi$  vsled nasprotna usmerjenosti.

Naj bo  $z = z(t)$  analitična funkcija spremenljivke  $t$ , ki je definirana v okolici reelne osi ravnine  $t$ . Reelni osi odgovarja neka krivulja v ravnini  $z$  in vprašanje je po kotu, ki ga oklepa tangenta v točki  $z = z(t_0)$  s pozitivno smerjo reelne osi. Ta kot se dobi na sledeči način. Funkcijo  $z$  razstavimo v reelno in imaginarno komponento. Enačba krivulje se glasi

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad z = x + iy$$

Smerna koeficienta sta proporcionalna  $\dot{x}$  in  $\dot{y}$  in sicer je

$$\cos \Theta = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{x}}{|\dot{z}|}, \quad \sin \Theta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{y}}{|\dot{z}|},$$

kjer pomeni  $\Theta$  kot, ki ga oklepa tangenta s pozitivno smerjo abscisne osi. Odtod sledi

$$e^{i\Theta} = \cos \Theta + i \sin \Theta = \frac{\dot{x} + i\dot{y}}{|\dot{z}|} = \frac{\dot{z}}{|\dot{z}|}$$

Zgornja enačba se da tako povedati z besedami: Ako oklepa tangenta na krivuljo  $z = z(t)$  v kakšni točki kot  $\Theta$  s pozitivno

smerjo abscisne osi, je vrtilni faktor odvoda  $z$  v dotični točki enak  $e^{i\theta}$ .

V zgornjem primeru je vrtilni faktor odvoda  $\frac{d\tau_a}{d\tau}$  v točki  $e_1$  enak  $e^{i\pi}$ . Ta odvod se glasi

$$\frac{d\tau_a}{d\tau} = \frac{1}{(N\tau + P)^2}$$

Vrtilni faktor pa je, ker je  $\tau$  reelen,

$$\frac{\overline{N\tau + P}}{N\tau + P}$$

Po prejšnjem mora biti za  $\tau = \tau_c(e_1) = \tau_1$

$$\frac{\overline{N\tau_1 + P}}{N\tau_1 + P} = e^{i\pi} = -1 \text{ ali } (N + \overline{N})\tau_1 + P + \overline{P} = 0.$$

Iz te enačbe se dobi za  $\tau_1$ , če ni istočasno  $N + \overline{N} = 0$  in  $P + \overline{P} = 0$ , naslednjo vrednost

$$\tau_1 = -\frac{P + \overline{P}}{N + \overline{N}}$$

Točka  $e_1$  pa leži poleg tega tudi na realni osi. Če se torej postavi v enačbo (\*) za  $\tau$  zgornjo vrednost, je  $\tau_a$  reelen. Odtod pa sledi, da je

$$\tau_a(c) = \frac{M(N + \overline{N}) - L(P + \overline{P})}{PN - \overline{P}N} \dots (**)$$

reelno število. Ker je imenovalec čisto imaginaren, je tudi števec in velja zaradi tega naslednja relacija

$$(L + \overline{L})(P + \overline{P}) - (M + \overline{M})(N + \overline{N}) = 0 \dots (5)$$

Ta relacija je izpolnjena tudi, če je imenovalec nič, kajti, če bi števec ne bil nič, je  $\tau_a(e_1)$  neskončen in slika intervala  $(ce_1)$  je premica s kotom  $\pi$  proti realni osi. V tem slučaju bi bila enačba  $(N + \overline{N})\tau_1 + (P + \overline{P}) = 0$  pri vsakem  $\tau$  izpolnjena, tako da bi bilo  $N + \overline{N} = 0$  in  $P + \overline{P} = 0$ .

Izmed štirih enačb (4) ostaneta tedaj samo dve neodvisni. Ker pa je prvemu pogoju ustrezno, je ostal prav za prav samo en parameter na razpolago. Drugi je namreč s prvim natančno določen. Zato je mogoče neposredno ustreči samo

eni teh enačb. Izbrati si hočemo drugo izmed enačb (4), ki se glasi

$$M + \bar{M} = 0 \dots (4^*)$$

Pozneje se bo izkazalo, da je tej enačbi vedno mogoče ustreči in to še na neskončno mnogo načinov. Sedaj pa je važno raziskovati, kaj se da povedati glede peterokotnika, če je zgornja enačba izpolnjena.

Najprej sledi iz enačbe (5), da je

$$(L + \bar{L}) (P + \bar{P}) = 0$$

Sedaj nastaneta dve možnosti, ali je prvi faktor enak nič, ali pa drugi.

1. Naj bo

$$L + \bar{L} = 0 \dots (5^*)$$

Lega točke  $e_1$  je določena z enačbo (\*\*). Ako se na desni strani te enačbe vpoštevata (4<sup>\*</sup>) in (5<sup>\*</sup>), se izkaže, da ima števec vrednost nič. Če je torej imenovalec od nič različen, je  $\tau_a(e_1) = 0$  in točka  $e_1$  se ujema s točko  $a$ . Če pa ima imenovalec vrednost nič, potem je prav lahko uvideti, da so izpolnjene vse štiri enačbe (4) in imamo rešitev problema.

2. Sedaj pa je

$$P + \bar{P} = 0 \dots (5^{**})$$

V tem primeru se dobi za  $\tau_1$

$$\tau_1 = \tau_c(e_1) = -\frac{P + \bar{P}}{N + \bar{N}}$$

vrednost nič, če je imenovalec  $N + \bar{N}$  od nič različen. Ker je tudi  $\tau_c(c) = 0$ , se točka  $e_1$  ujema s točko  $c$  in stranica  $\widehat{ce}_1$  opiše najmanj enkrat cel krog. Če pa ima tudi imenovalec vrednost nič, so zopet izpolnjene vse štiri enačbe (4) in nastopi rešitev problema.

Rezultat te raziskave je v kratkem naslednji. Če je enačba (4<sup>\*</sup>) izpolnjena, so v celoti tri možnosti. Lahko je peterokotnik takšen, da se točka  $e_1$  ujema s točko  $c$  ali pa s točko  $a$ . V primeru pa, da ne nastopa nobeden izmed pravkar navedenih slučajev, leži stranica  $\widehat{ce}_1$  na reelni osi in imamo rešitev problema.

Enačba (4<sup>\*</sup>) še ni prikladna za nadaljna razmotrivanja in jo je zaradi tega treba pretvoriti. Najprej moramo dobiti vrednosti koeficientov  $L$ ,  $M$ ,  $N$  in  $P$ . Normirani rešitvi v  $b$  naj se na sledeči način izražata z normiranima v  $c$

$$\begin{aligned} Y_{1b} &= A_3 Y_{1c} + B_3 Y_{2c} \\ Y_{2b} &= C_3 Y_{1c} + D_3 Y_{2c} \end{aligned} \dots (\dagger \dagger)$$

Koeficienti  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  in  $D_3$  se izračunajo na prav sličen način kakor prej  $A_2$ ,  $B_2$ , ... Razlika je samo v tem, da leži točka  $c$  v neskončnosti. Zaradi tega ima  $Y_{1c}$  na intervalu  $(b, c)$  vrtilni faktor  $e^{-\gamma' \pi i}$ ,  $Y_{2c}$  pa  $e^{-\gamma'' \pi i}$ . Determinanta koeficientov je

$$A_3 D_3 - B_3 C_3 = -e^{(\beta + \gamma' + \gamma'') \pi i}$$

Enačba ( $\dagger$ ) dobi sedaj obliko

$$\tau_a = \frac{A_2 \tau_b + B_2}{C_2 \tau_b + D_2} = \frac{(A_2 A_3 + B_2 C_3) \tau_c + A_2 B_3 + B_2 D_3}{(C_2 A_3 + D_2 C_3) \tau_c + C_2 B_3 + D_2 D_3} \dots (\dagger \dagger \dagger)$$

Koeficientov  $A_2 A_3 + B_2 C_3$ , ... še ne moremo vzeti kot  $L$ ,  $M$ ,  $N$  in  $P$ , ker determinanta nima vrednosti 1, ampak  $e^{(\alpha + \beta + \gamma' + \gamma'') \pi i}$ . Če pa se dividira vse koeficiente te substitucije z  $e^{\frac{(\alpha + \beta + \gamma' + \gamma'') \pi i}{2}}$ , potem ima determinanta vrednost 1. Enačba (4<sup>\*</sup>) se tedaj glasi

$$(A_2 B_3 + B_2 D_3) e^{-\frac{(\alpha + \beta + \gamma' + \gamma'') \pi i}{2}} + (\bar{A}_2 \bar{B}_3 + \bar{B}_2 \bar{D}_3) e^{+\frac{(\alpha + \beta + \gamma' + \gamma'') \pi i}{2}} = 0.$$

Kakor je razvidno iz enačbe ( $\dagger \dagger$ ), imata  $B_2$  in  $D_2$  vrtilna faktorja  $e^{(\beta + \gamma'') \pi i}$ , oziroma  $e^{\gamma'' \pi i}$ . Prav tako sledi iz izražave koeficientov  $A_2$  in  $B_2$ , da imata vrtilni faktor  $e^{i \pi}$ . Torej je

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{B_2}{B_3} = e^{2 \alpha \pi i}, \quad \frac{B_3}{B_2} = e^{2 (\beta + \gamma'') \pi i}, \quad \frac{D_3}{D_2} = e^{2 \gamma'' \pi i}$$

Če se to vpoštevava v zgornji enačbi, se reducira na obliko

$$\begin{aligned} A_2 B_3 e^{-\frac{(\alpha + \beta + \gamma'') \pi i}{2}} \cos\left(\alpha + \beta + \gamma''\right) \frac{\pi}{2} + \\ + B_2 D_3 e^{-\frac{(\alpha + \gamma'') \pi i}{2}} \cos\left(-\alpha + \beta + \gamma''\right) \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Vrednost za  $\frac{B_2}{A_2}$  se dobi iz enačbe ( $\dagger$ ), če se postavi  $x = a$ .

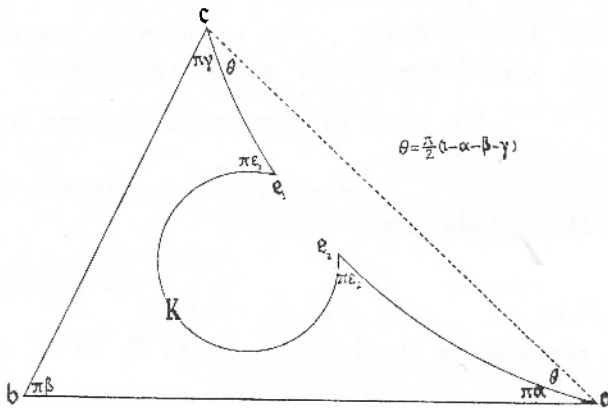
Ker je  $\tau_a(a) = 0$ , sledi

$$A_1 v_b(a) + B_2 = 0 \text{ ali } \frac{B_2}{A_2} = -v_b(a).$$

Slično se dobi iz enačbe (††) za  $\frac{B_3}{D_3}$  vrednost  $v_b(c)$ . Če to upoštevamo, dobi enačba (4\*) končno obliko

$$\frac{Y_{1b}(a)}{Y_{2b}(a)} \cos(-\alpha + \beta + \gamma) \frac{\pi}{2} = \frac{Y_{1b}(c)}{Y_{2b}(c)} e^{-\beta\pi i} \cos(\alpha + \beta - \gamma) \frac{\pi}{2} \dots (6)$$

Za veljavnost izpeljave te enačbe je potrebno, da sta  $\alpha$  in  $\gamma$  od nič različna. Vendar pa je enačba (6) tudi v teh primerih veljavna. O tem se je možno prepričati na ta način, da se vsa zgornja razmotrivanja izpelje za slučaj  $\alpha = 0$ , oziroma  $\gamma = 0$ . Uvideti pa se da to še na drug način. Enačbo (6) je namreč možno dobiti geometričnim potom. V ta namen preslikajmo zgornjo polovico ravnine  $x$  s  $v_b$ . Če je problem rešen, dobimo naslednjo sliko:



Slika 7.

Dolžina stranice  $\overline{ab}$  je  $v_b(a)$ , stranica  $\overline{bc}$  pa  $e^{-\beta\pi i} v_b(c)$ . Ako zvežemo točko  $a$  s  $c$ , dobimo premočrten trikotnik, čigar kota pri  $a$  in  $c$  sta  $(1 + \alpha - \beta - \gamma) \frac{\pi}{2}$  in  $(1 - \alpha - \beta + \gamma) \frac{\pi}{2}$ . Po stavku o sinusih je

$$\overline{ab} \sin(1 + \alpha - \beta - \gamma) \frac{\pi}{2} = \overline{bc} \sin(1 - \alpha - \beta + \gamma) \frac{\pi}{2}$$

ali po prejšnjem

$$v_b(a) \cos(-\alpha + \beta + \gamma) \frac{\pi}{2} = v_b(c) e^{-\beta\pi i} \cos(\alpha + \beta - \gamma) \frac{\pi}{2}$$

To pa je enačba (6), ki velja torej tudi za primer, če je kot pri  $a$  ali pri  $c$  enak nič.

Preostane še slučaj  $\beta = 0$ . Vsa prejšnja analiza se nič ne spremeni vse do enačbe (4\*), ki se tudi sedaj prav tako glasi kakor prej. Šele od tu naprej nastopijo spremembe. Koefficienta  $A_1$  in  $B_2$  imata tudi tukaj vrtilni faktor  $e^{\alpha\pi i}$ .  $D_3$  pa ravno tako  $e^{i''\omega i}$ . Iz enačbe (†) se tudi sedaj dobi

$$\frac{B_0}{A_2} = -\tau_b(a)$$

Kvocien  $\tau_b = Y_{1b} : Y_{2b}$  je realen na intervalu  $(a, b)$  in ima v okolici točke  $b$  obliko

$$\tau_b = \varrho \log(x - b) + P(x - b)$$

kjer pomeni  $P(x - b)$  potenčno vrsto,  $\varrho$  pa je pozitiven faktor, ki je tako določen, da je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\rho| \left. \frac{dY_{1b}}{dx} \right|_{x=b+\varepsilon} = 1$$

Na intervalu  $(b, c)$  pa je  $\tau_b$  kompleksen z imaginarno komponento  $\pi i \varrho$  in je zaradi tega

$$\bar{\tau}_b = \tau_b - 2\pi i \varrho.$$

Odtod sledi

$$\bar{\tau}_b(c) = \frac{B_0}{D_3} = \frac{B_0}{D_3} - 2\pi i \varrho.$$

Če se to upošteva v enačbi (4\*), dobi ta obliko

$$\left( \frac{B_2}{A_2} + \frac{B_0}{D_3} \right) \cos\left(\alpha - \gamma\right) \frac{\pi}{2} = \pi i \varrho e^{(\gamma - \alpha) \frac{\pi i}{2}}$$

Ker je imaginarna komponenta kvocienta  $\frac{B_3}{D_3}$  enaka  $\pi \varrho i$ , je  $\frac{B_3}{D_3} - \pi \varrho i$  realno število. Če se še postavi v zgornjo enačbo

$$\frac{B_3}{D_3} = \frac{Y_{1b}(c)}{Y_{2b}(c)} \quad \text{in} \quad \frac{B_2}{A_2} = -\frac{Y_{1b}(a)}{Y_{2b}(a)}$$

se dobi naslednjo enačbo

$$\left[ \frac{Y_{1b}(c)}{Y_{2b}(c)} - \pi \varrho i \right] - \frac{Y_{1b}(a)}{Y_{2b}(a)} = \pi \varrho \operatorname{tg}\left(\alpha - \gamma\right) \frac{\pi}{2} \dots (6^*)$$

Ta enačba nadomešča v slučaju  $\beta = 0$  enačbo (6). Tudi to enačbo je možno dobiti geometričnim potom in sicer na sličen način kakor prej. Če je  $a$  ali pa  $\gamma$  enak nič, (6\*) prav tako velja.

#### 4.

V diferencialni enačbi (1\*) naj se spreminjata parametra  $\lambda$  in  $\mu$  tako, da je prvi pogoj  $A = 0$ , oziroma  $C = 0$  za  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , izpolnjen in da ima pri tem  $Y_{2e}$ , v notranjosti intervala  $(e_2, e_1)$  ravno  $x$  ničel. Sedaj nastane vprašanje, ali je možno  $\lambda$  in  $\mu$  v skladu s tem pogojem tako določiti, da je izpolnjena tudi enačba (6), oziroma (6\*). V naslednjem se bo izkazalo, da je to vedno mogoče in sicer še na neskončno mnogo načinov. Ker pa ne da vsaka teh vrednosti rešitve, je treba iz te množice parametrov izbrati one, ki dajo res rešitev problema.

Zaradi krajše pisave postavimo

$$\frac{Y_{1b}(a)}{Y_{2b}(a)} = l \quad \text{in} \quad e^{-\beta\pi l} \frac{Y_{1b}(c)}{Y_{2b}(c)} = n$$

Če je  $\beta = 0$ , naj bo

$$\frac{Y_{1b}(c)}{Y_{2b}(c)} - \pi q l = n$$

Enačbi (6) in (6\*) dobita sedaj obliko

$$l \cos(-\alpha + \beta + \gamma) \frac{\pi}{2} = n \cos(\alpha + \beta - \gamma) \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$$n - l = \pi q \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) \frac{\pi}{2} \quad (6^*)$$

Najprej je treba preiskovati, kako se spreminjata  $l$  in  $n$ , če se parametra  $\lambda$  in  $\mu$  spreminjata v skladu s prvim pogojem. Funkcija

$$Y_{1a} = A_2 Y_{1b} + B_2 Y_{2b}$$

je taka rešitev diferencialne enačbe (1\*), ki ima v točki  $a$  vrednost nič. Naj bosta  $\lambda$ ,  $\mu$  in  $\lambda + \Delta\lambda$ ,  $\mu + \Delta\mu$  dva para parametrov, za katere je prvemu pogojem ustrezno, sicer pa poljubna. K  $\lambda$ ,  $\mu$  naj pripadajo  $Y_{1b}$ ,  $Y_{2b}$  in  $A_2$ ,  $B_2$ , k  $\lambda + \Delta\lambda$ ,  $\mu + \Delta\mu$  pa  $Y_{1b}^{(\Delta)}$ ,  $Y_{2b}^{(\Delta)}$  in  $A_2^{(\Delta)}$ ,  $B_2^{(\Delta)}$ . Potem zadoščata  $Y_{1a}$  in

$$Y_{1a} = A_2^{(\Delta)} Y_{1b}^{(\Delta)} + B_2^{(\Delta)} Y_{2b}^{(\Delta)}$$

diferencialni enačbi (1\*), če se da parametroma enkrat vrednost  $\lambda$ ,  $\mu$ . drugič pa  $\lambda + \Delta\lambda$ ,  $\mu + \Delta\mu$ . Ako se postavi v enačbo (2) za  $y = Y_{1a}$ , za  $\eta$  pa  $Y_{1a}^{(\Delta)}$ , se dobi

$$A_1 A_2^{(\Delta)}(l - l^{(\Delta)}) = \Delta\lambda \int_b^a |p| Y_{1a} Y_{1a}^{(\Delta)} \psi(x) dx + \Delta\mu \int_b^a |p| Y_{1a} Y_{1a}^{(\Delta)} \chi(x) dx$$

Ker se  $\lambda$  in  $\mu$  spreminjata samo v skladu s prvim pogojem, je  $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\mu} > 0$ . Funkciji  $\psi(x)$  in  $\chi(x)$  sta na intervalu  $(b, a)$  obe negativni in  $Y_{1a}$  ter  $Y_{1a}^{(\Delta)}$  se malo razlikujeta med seboj, če sta  $\Delta\lambda$  in  $\Delta\mu$  majhna. Ker imajo  $A_1 A_2^{(\Delta)}$  in  $Y_{1a}$ ,  $Y_{1a}^{(\Delta)}$  vrtilni faktor  $e^{a\pi i}$ , moramo zgornjo enačbo dividirati z  $e^{2a\pi i}$ . Potem je desna stran realna in ima nasproten predznak kakor  $\Delta\mu$ .

Ker je tudi  $A_1 A_2^{(\Delta)} e^{-2a\pi i}$  pozitiven faktor, sledi odtod, da  $l$  narašča, če se  $\lambda$  in  $\mu$  večata, narobe pa pada. Obenem se  $l$  z  $\lambda$  in  $\mu$  zvezno spreminja, če je končen. V nasprotnem primeru se  $l$  z  $\lambda$  in  $\mu$  zvezno spreminja. Zgornja enačba velja neizpremenjena za slučaj, če je  $\beta = 0$  ali  $\gamma = 0$ . Samo v zadnjem primeru je treba izhajati iz rešitve  $Y_{1a}$ .

Na popolnoma sličen način se dokaže, da  $n$  pada, če se parametra  $\lambda$  in  $\mu$  večata in narobe. Pri nastopajočih integralih neskončnost meje integralov ne moti.

Najprej vzemimo slučaj, da se spreminjata  $\lambda$  in  $\mu$  tako, da je prvi pogoj izpolnjen in nima pri tem  $Y_{2e}$ , nobene ničle v notranjosti intervala  $(e_2, e_1)$ . Torej je  $z = 0$ .

Določimo parametra  $\lambda$  in  $\mu$  tako velika negativna, da je koeficient pri  $y$  na desni strani enačbe (1\*) na intervalu  $(b, a)$  povsod pozitiven. Take vrednosti parametrov je vedno možno dobiti. Regularna rešitev v točki  $b$ , namreč  $Y_{2b}$ , ima v  $b$

vrednost 1 in  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |p| \frac{dY_{2b}}{dx} \Big|_{x=b+\varepsilon} = 0$ . Iz diferencialne enačbe

sledi, ker je odvod za  $|p| \frac{dY_{2b}}{dx}$  na intervalu  $(b, a)$  pozitiven,

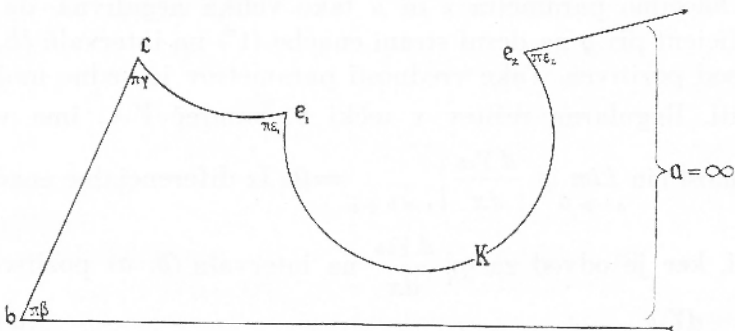
da  $|p| \frac{dY_{2b}}{dx}$  narašča, če gre  $x$  od  $b$  proti  $a$ . Torej je  $|p| \frac{dY_{2b}}{dx}$

na intervalu  $(b, a)$  pozitiven in isto velja zaradi  $|p| > 0$  za  $\frac{dY_{2b}}{dx}$ . Odtod pa dalje sledi, da tudi  $Y_{2b}$  na intervalu  $(b, a)$  narašča. Prav isto velja za  $Y_{1b}$ . Torej je

$$Y_{1b}(a) > 0, Y_{2b}(a) > 0, \text{ ali } l > 0.$$

Če se parametra  $\lambda$  in  $\mu$  od začetnih vrednosti manjšata, se  $l$  manjša, ostane pa vedno pozitiven. Koeficient pri  $y$  v enačbi (1\*) ostane namreč pozitiven in je zaradi tega  $l > 0$ . Kadar pa se parametra večata,  $l$  narašča. Treba je še dognati, ali raste  $l$  preko vsake meje, če sta  $\lambda$  in  $\mu$  dovolj velika. Naj se parametra večata od začetnih vrednosti! Prišel bo trenutek, ko koeficient pri  $y$  na desni strani enačbe (1\*) ne bo več povsod na intervalu  $(b, a)$  pozitiven, ampak tudi že negativen. Če je ta koeficient dovolj velik negativen, ima gotovo  $Y_{2b}$  ničle na intervalu  $(b, a)$ . Torej je  $Y_{2b}(a) = 0$  pri gotovi vrednosti parametrov, medtem ko nima na intervalu  $(b, a)$  še nobene ničle. Tedaj pa je  $l = \infty$  in  $Y_{1b}$  je povsod na intervalu  $(b, a)$  pozitiven, razen v začetni točki.

Nastane vprašanje, kakšno obliko ima peterokotnik, ko doseže  $l$  prvokrat vrednost  $\infty$ . Če se preslika zgornja polovica ravnine  $x$  s  $\tau_a = Y_{1b} : Y_{2b}$ , leži slika intervala  $(b, a)$  na realni osi ravnine  $\tau$  in sicer leži točka  $a$  odgovarjajoča točka v neskončnosti. Zaradi tega pa leži tudi slika intervala  $(a, e_2)$  na premici. Ker peterokotnik nima v svoji notranjosti razvejišča, mora imeti obliko, kakor jo kaže slika 8. Točka  $e_1$  leži na



Slika 8

podaljšku stranice  $ae_2$ , stranica  $\widehat{ce}_1$  pa leži na krogu  $K_1$ , ki se v točki  $e_1$  dotika premice  $\overrightarrow{ae_1}$ . To sledi odtod, ker je prvi pogoj izpolnjen. Prav lahko se je nadalje prepričati, da stranica  $\widehat{bc}$  ne opiše niti enkrat cele premice, ampak je le končna daljica. Isto velja za  $\widehat{ce}_1$  in  $\widehat{e_2a}$ . Ker je nadalje  $\alpha = 0$  in nima  $e_2$  na intervalu  $(e_2, e_1)$  nobene ničle, tudi stranica  $\widehat{e_2e_1}$  ne more opisati celega kroga  $K$ .

Če je  $\beta + \gamma - \alpha = 1$ , dobimo že kar rešitev problema. Kajti v tem primeru leži stranica  $\widehat{e_1c}$  na podaljšku stranice  $e_1a$ . Kadar pa je  $\beta + \gamma - \alpha \neq 1$ , leži stranica  $\widehat{e_1c}$  na krogu  $K_1$ , ki kaže konveksno stran v notranjost peterokotnika. kadar je  $\beta + \gamma - \alpha < 1$  in narobe, kadar je  $\beta + \gamma - \alpha > 1$ .

Iz slike je razvidno, da je tedaj, ko ima  $l$  prvič vrednost  $\infty$ .

$n = e^{-\beta\pi i} \frac{Y_{1b}(c)}{Y_{2b}(c)} > 0$  in da nimata  $Y_{1b}$  in  $Y_{2b}$  še nobene ničle

na intervalu  $(b, c)$ . Vzemimo najprej slučaj, da je

$$-a + \beta + \gamma < 1 \text{ in } a + \beta - \gamma < 1.$$

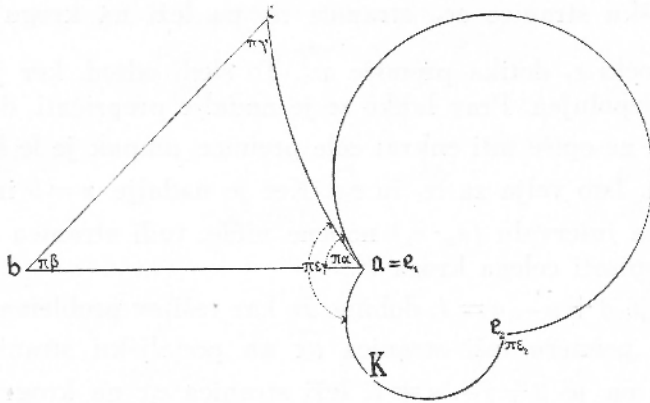
Tedaj je

$$\cos(-a + \beta + \gamma)\frac{\pi}{2} > 0 \text{ in } \cos(a + \beta - \gamma)\frac{\pi}{2} > 0$$

Če se parametra  $\lambda$  in  $\mu$  manjšata od tistih vrednosti, za katere je bilo prvič  $l = \infty$ , postane  $l$  pozitiven in se manjša.  $n$  je bil v začetku tudi pozitiven in sedaj narašča. Preden doseže  $n$  vrednost  $\infty$ , je enkrat, pa samo enkrat izpolnjena relacija

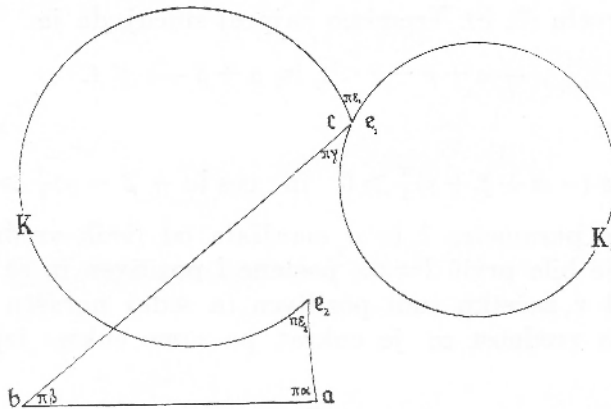
$$l \cos(-a + \beta + \gamma)\frac{\pi}{2} = n \cos(a + \beta - \gamma)\frac{\pi}{2}$$

V začetku je namreč leva stran  $\infty$ , potem pa postane pozitivna in se manjša. Desna stran pa je v začetku pozitivna in narašča čez vse meje, kadar gresta  $\lambda$  in  $\mu$  proti takim vrednostim, za katere je prvič  $n = \infty$ . Med začetnim in končnim parom parametrov se torej nahaja samo en par, pri katerem je zgornja relacija izpolnjena. Lahko se je prepričati, da dá ta par res rešitev problema. Kajti v nasprotnem primeru obstojata dve možnosti, ali se ujema točka  $e_1$  s točko  $a$  ali pa s točko  $c$ . V prvem primeru bi dobili peterokotnik. kakor



Slika 9

ga kaže slika 9. v drugem primeru pa slika 10. Niti prvi niti drugi peterkotnik pa ni možen, ker bi moral imeti v svoji notranjosti razvejišče.

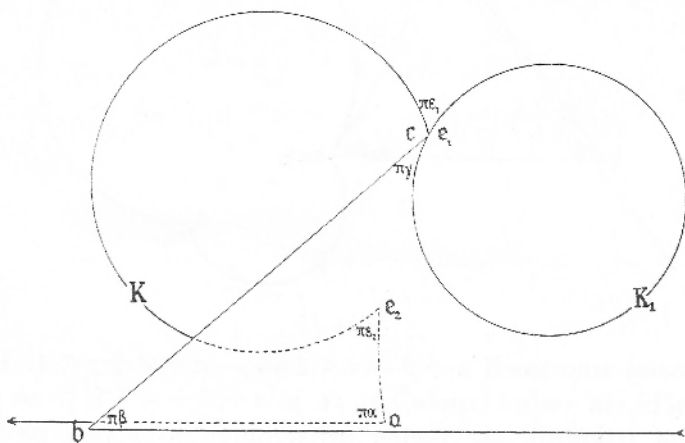


Slika 10

Zaradi tega ostane samo še tretja možnost, da ležita stranici  $\widehat{ae_2}$  in  $\widehat{ce_1}$  na istem krogu in je peterkotnik takšen, kakor ga zahteva problem (slika 7).

Razen te rešitve, ki je tako imenovani osnovni teorem, pa ne eksistira nobena rešitev več pri  $\kappa = 0$ . Pač pa je enačba (6) izpolnjena še pri neskončno mnogo vrednostih parametrov  $\lambda$  in  $\mu$ . To je razvidno iz naslednjega razmotrivanja.

Parametra naj se najprej večata od tistih vrednosti, pri katerih je bil osnovni teorem. Tedaj je bilo  $l > 0$  in  $n > 0$ .  $Y_{2b}$  ni imel niti na intervalu  $(b, a)$ , niti na intervalu  $(b, c)$  še nobene ničle. Sedaj se  $l$  večja,  $n$  pa manjša in ostane vedno pozitiven. Ko doseže  $l$  vrednost  $\infty$ , preskoči potem v  $-\infty$  in zavzame potem vsako vrednost neskončno mnogokrat. Torej je tudi neskončno mnogokrat izpolnjena enačba (6). Posamezne vrednosti parametrov, za katere je tej enačbi ustrezno, so karakterizirane s številom ničel, ki jih ima  $Y_{2b}$  na intervalu  $(b, a)$ . Če je to število predpisano, se dobi samo ena vrednost parametrov  $\lambda$  in  $\mu$ . V začetku je bila enačba (6) izpolnjena in  $Y_{2b}$  ni imel tedaj nobene ničle. V tem primeru se je res dobila rešitev problema. Kadar pa ima  $Y_{2b}$  kakšno ničlo na intervalu  $(b, a)$ , ne dobimo rešitve problema, ampak se točka  $e_1$  ujema s c. Peterokotnik ima obliko, kakor jo kaže slika 11\*), če se vzame, da ima  $Y_{2b}$  eno ničlo na intervalu



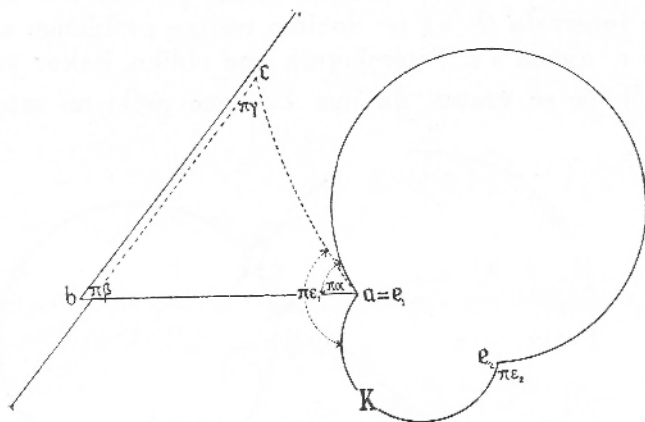
Slika 11

$(b, a)$ . Stranica, ki odgovarja temu intervalu, opiše enkrat celo reelno os in še daljico  $\overline{ba}$  zraven. Če bi imel  $Y_{2b}$  več ničel na intervalu, bi odgovarjajoča stranica tudi tolikokrat opisala celo reelno os, kolikor ničel ima  $Y_{2b}$ , stranica  $\overline{ce_1}$  pa

\*) Na slikah so zaradi preglednosti črte, ki se krijejo pa leže na različnih listih Riemannove ploskve, načrtane nekoliko premaknjene.

tudi tolikokrat krog  $K_1$ ,  $ae_2$  sicer v točki  $e_1$  tangira  $ce_1$ , ki je tu krog  $K_1$ , ne ležita pa  $ae_2$  in  $ce_1$  na istem krogu, zato tu nimamo rešitve.

Če pa se parametra od začetnih vrednosti manjšata, raste  $n$ ,  $l$  se manjša in ostane vedno pozitiven. Sedaj zavzame  $n$  vsako vrednost neskončno mnogokrat in je tudi enačba (6) še pri neskončno mnogo parih parametrov izpolnjena. Tu so karakterizirane posamezne vrednosti parametrov s številom ničel, ki jih ima  $Y_{\cdot b}$  na intervalu  $(b, c)$ . Tudi sedaj ne dobimo več nobene rešitve problema, ker se namreč točka  $e_1$  ujema s točko  $a$ . Kadar ima  $Y_{\cdot b}$  na intervalu  $(b, c)$  eno ničlo, ima peterokotnik naslednjo obliko:



Slika 12

Doslej smo imeli  $a + \beta - \gamma < 1$  in  $-a + \beta + \gamma < 1$ . Ti dve neenačbi sta vedno izpolnjeni, če je  $a + \beta + \gamma < 1$ , to se pravi, da ima trikotnik  $abc$  realen ortogonalen krog, ali pa če je  $a + \beta + \gamma > 1$  in je ortogonalni krog imaginaren.

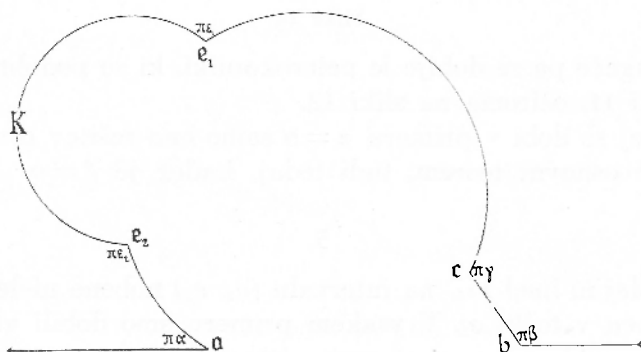
Sedaj pa naj bo na primer  $-a + \beta + \gamma > 1$ . Potem je  $\cos(-a + \beta + \gamma) \frac{\pi}{2} < 0$ . V začetku sta bila  $\lambda$  in  $\mu$  tako določena, da je bilo prvič  $l = \infty$ . Tedaj je bilo  $Y_{\cdot b}(a) = 0$  in  $n > 0$ . Če se parametra večata, postane  $l$  negativen in narašča,  $n$  pa pada in ostane pozitiven. Ravno tako kakor zgoraj se uvidi, da eksistira neskončno mnogo parov parametrov, pri katerih je enačba (6) izpolnjena. Vendar pa bi bilo tukaj možno, da bi se med dvema zaporednima paroma parametrov, za

katere je  $l = \infty$ , nahajalo več vrednosti parametrov, ki ustrezajo enačbi (6). Ker je namreč  $n$  vedno pozitiven, mora biti  $l$  negativen. Tedaj pa je produkt  $l \cos(-a + \beta + \gamma) \frac{\pi}{2}$  pozitiven in se manjša, če parametra rasteta. Ker gre ta produkt skozi vrednost nič, mora biti vsaj enkrat enak

$$n \cos(\alpha + \beta - \gamma) \frac{\pi}{2}.$$

Ni pa odtod razvidna enoličnost.

Kadar ima  $Y_{ab}$  eno ničlo na intervalu  $(b, a)$ , dobimo rešitev problema, namreč osnovni teorem (slika 13), drugače pa so peterkotniki slični kakor na sliki 11.

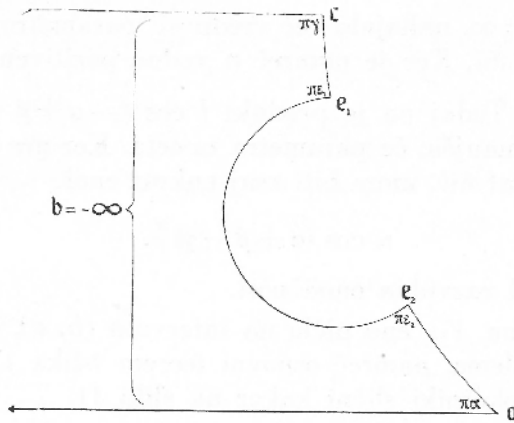


Slika 13

Če se parametra od začetnih vrednosti manjšata, je tudi enačba (6) neskončnokrat izpolnjena. Nikdar pa se ne dobi rešitve problema, ampak imajo peterkotniki slično obliko kakor na sliki 12.

Prav isto velja za primer, če je  $-a + \beta + \gamma > 1$ .

Preostane nam še slučaj, da je  $\beta = 0$ . Sedaj je treba parametra  $\lambda$  in  $\mu$  tako določiti, da je izpolnjena enačba (6\*). Tako kakor prej določimo najprej tiste vrednosti parametrov, za katere je prvič  $l = \infty$ . S sličnim razmotrivanjem kakor zgoraj se dobi, da nima tedaj  $Y_{ab}$  nobene ničle na intervalu  $(b, c)$ . Tudi tukaj eksistira neskončna množica parametrov  $\lambda$  in  $\mu$ , pri katerih je enačba (6\*) izpolnjena. Rešitev problema se dobi tedaj, če se parametra od začetnih vrednosti manjšata, dokler ni enačba (6\*) izpolnjena. Pripadajoči peterkotnik kaže slika 14.



Slika 14

Drugače pa se dobijo le peterokotniki, ki so podobni onim na sliki 11, oziroma na sliki 12.

Torej se dobi v primeru  $z = 0$  samo ena rešitev problema, namreč osnovni teorem, tudi tedaj, kadar je  $\beta = 0$ .

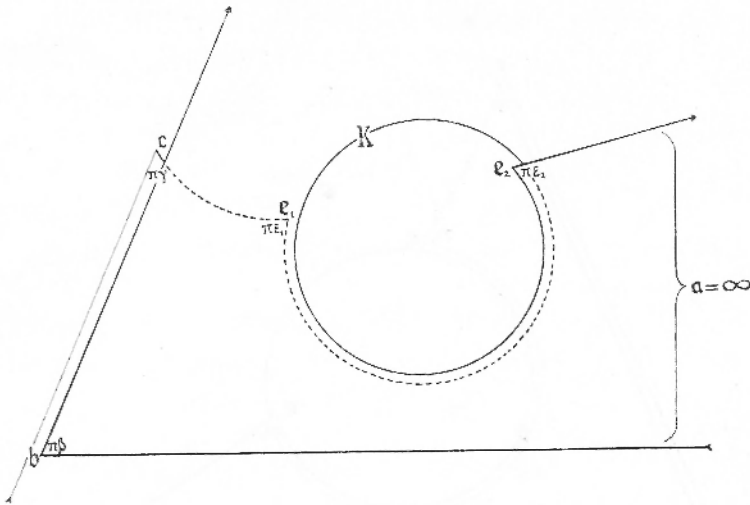
### 5.

Doslej ni imel  $Y_{ze_2}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$  nobene ničle, razen na koncu v točki  $e_1$ . V vsakem primeru smo dobili vsaj eno rešitev problema, namreč osnovni teorem.

Sedaj pa naj ima  $Y_{ze_1}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$  razen v točki  $e_1$  še nadaljnih  $z$  ničel. Tukaj se parametra  $\lambda$  in  $\mu$  spreminjata v skladu s prvim pogojem tako, da ima  $Y_{ze_2}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$  vedno  $z$  ničel. Parametra se zopet ali oba istočasno večata, ali pa oba manjšata in če se eden zvezno spreminja, se prav tako drugi.

Zopet določimo najprej tiste vrednosti parametrov, za katere je  $l = \infty$  in nima  $Y_{ze_2}$  še nobene ničle na intervalu  $(b, a)$  razen v točki  $a$ . S sličnim razmotrivanjem kakor pri  $z = 0$  se dobi, da mora imeti peterokotnik obliko, kakor jo kaže slika 15, kjer je  $z = 1$ .

Peterokotnik se vije okrog kroga  $K$  skozi  $z + 1$  listov. Iz zgornje slike je razvidno, da ima pri teh vrednostih parametrov  $Y_{z,b}$  na intervalu  $(b, c)$  ravno  $z$  ničel in da je  $n > 0$ . Točka  $e_1$  leži na premici  $\overline{e_2 a}$ , ker je prvi pogoj izpolnjen in krog  $K_1$  se dotika premice  $\overline{e_2 a}$  v točki  $e_1$ .

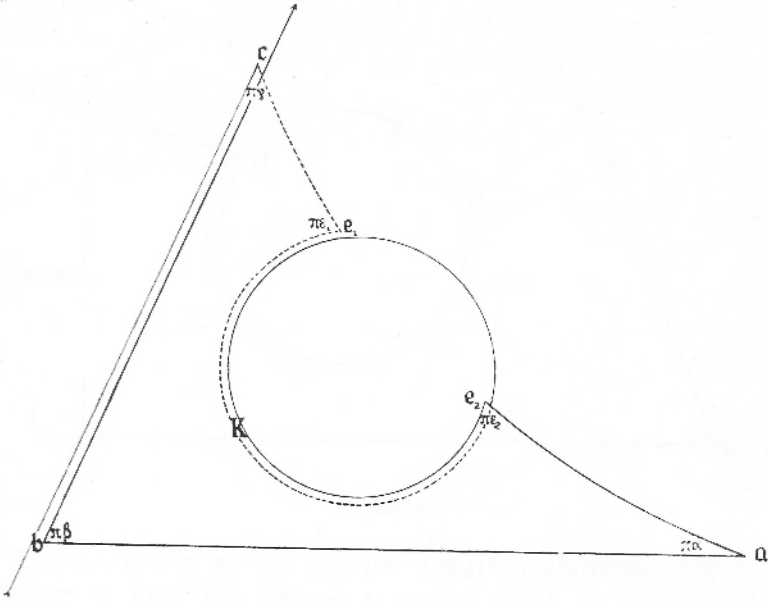


Slika 15

Zopet vzemimo najprej slučaj, da je  $a + \beta - \gamma < 1$  in  $-a + \beta + \gamma < 1$ . Leva stran v enačbi (6) ima v začetku vrednost  $\infty$ , desna pa ima neko pozitivno vrednost. Pri tem  $n$  narašča in gre skozi vsako vrednost do  $+\infty$ , če se  $\lambda$  in  $\mu$  manjšata proti takim vrednostim, za katere je  $Y_{2b}(c) = 0$ . Zaradi tega je enačba (6) izpolnjena, ko nima  $Y_{2b}$  na intervalu  $(b, a)$  nobene ničle, na intervalu  $(b, c)$  pa ravno  $n$  ničel. Te vrednosti parametrov dajo res rešitev problema. Za  $n = 1$  nam kaže pripadajoči peterokotnik slika 16.

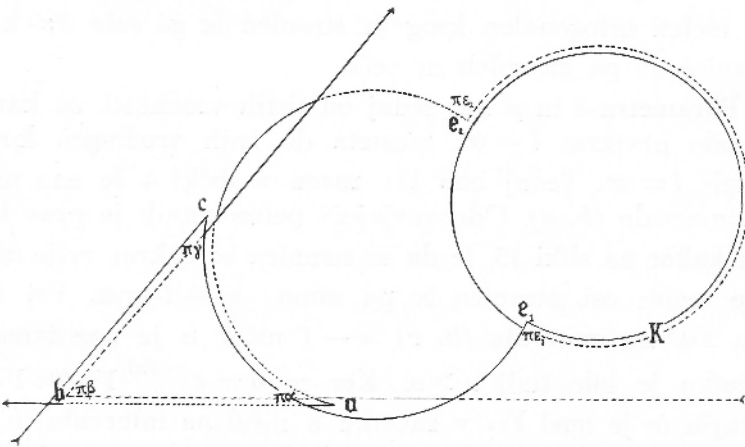
Kadar je  $a + \beta + \gamma < 1$ , eksistira h krožnemu trikotniku  $abc$  realen ortogonalen krog in stranica  $\overline{bc}$  ga seče  $2n$ -krat, stranica  $\overline{ab}$  pa ga sploh ne seče.

Parametra  $\lambda$  in  $\mu$  naj sedaj od tistih vrednosti, za katere je bilo prvokrat  $l = \infty$ , zrasteta do onih vrednosti, ko je drugič  $l = \infty$ . Tedaj ima  $Y_{2b}$  razen v točki  $a$  še eno ničlo na intervalu  $(b, a)$ . Odgovarjajoči peterokotnik je prav takšen kakor na sliki 15, le da se stranica  $\overline{ba}$  enkrat ovije okoli cele realne osi, stranica  $\overline{bc}$  pa samo  $n - 1$ -krat. Pri tem ima  $Y_{2b}$  na intervalu  $(b, c)$   $n - 1$  ničel.  $n$  je pozitiven. V začetku je bilo tudi  $n > 0$ . Ker se  $n = e^{-\beta\pi i} Y_{1b}(c) : Y_{2b}(c)$  manjša in je imel  $Y_{2b}$  v začetku  $n$  ničel na intervalu  $(b, c)$ , na koncu pa jih ima le  $n - 1$ , je šel  $n$  enkrat skozi vred-



Slika 16

nost  $\infty$ . Med začetnimi vrednostmi parametrov in vrednostmi, pri katerih je  $n = \infty$ , eksistira en, pa samo en par parametrov, pri katerem je enačba (6) izpolnjena. V začetku ima namreč leva stran vrednost  $-\infty$ , desna je pozitivna, na koncu pa ima desna stran vrednost  $-\infty$ . Tu se res dobi rešitev problema in je peterokotnik naslednji ( $\kappa = 1$ ).



Slika 17

Na tej sliki je  $\alpha + \beta + \gamma < 1$ . Če bi bilo  $\alpha + \beta + \gamma > 1$ , bi ležali točki  $a$  in  $c$  na levi strani točke  $b$ .

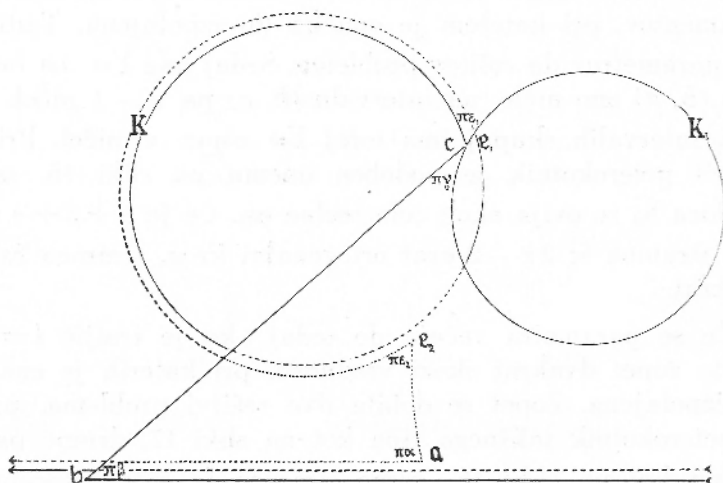
Pri sedanji rešitvi ima  $Y_{2b}$  eno ničlo na intervalu  $(b, a)$  in  $x$  ničel na intervalu  $(b, c)$ . Na obeh intervalih skupaj ima torej  $x + 1$  ničel. Pri prvi rešitvi pa je imel  $Y_{2b}$  le  $x$  ničel na obeh intervalih. Tudi struktura peterokotnika na sliki 17 je precej drugačna kakor na sliki 16.

Med tistima paroma parametrov, za katere je  $n = \infty$  in ko zavzame  $l$  drugič vrednost  $\infty$ , eksistira zopet en sam par parametrov, pri katerem je enačba (6) izpolnjena. Tudi ta par parametrov da rešitev problema. Sedaj ima  $Y_{2b}$  na intervalu  $(b, a)$  eno ničlo, na intervalu  $(b, c)$  pa  $x - 1$  ničel. Na obeh intervalih skupaj ima torej  $Y_{2b}$  zopet  $x$  ničel. Pripadajoči peterokotnik je podoben onemu na sliki 16, samo stranica  $\overline{ba}$  se ovija okoli cele reelne osi. Če je  $\alpha + \beta + \gamma < 1$ , seče stranica  $\overline{bc}$   $2x - 2$ -krat ortogonalni krog, stranica  $\overline{ba}$  pa dvakrat.

Če se parametra večata do tedaj, ko je tretjič  $l = \infty$ , gresta zopet dvakrat skozi vrednosti, pri katerih je enačba (6) izpolnjena. Zopet se dobita dve rešitvi problema, prvič je peterokotnik takšnega tipa kot na sliki 17, drugič pa je takšen kot na sliki 16, samo stranica  $\overline{bc}$  seče ortogonalni krog  $2x - 4$ -krat, stranica  $\overline{ba}$  pa štirikrat.

To se nadaljuje tako dolgo, da ima  $Y_{2b}$  razen v točki  $a$  še  $x$  ničel na intervalu  $(b, a)$ . Tedaj je  $n$  pozitiven in  $Y_{2b}$  nima na intervalu  $(b, c)$  nobene ničle več. Med dvema zaporednima paroma vrednosti parametrov, za katere je  $l = \infty$ , eksistirata vedno po dve rešitvi problema. Na ta način se dobi vsega skupaj  $2x + 1$  rešitev. Med temi je  $x + 1$  takih rešitev, ki odgovarjajo sliki 16 in ima  $Y_{2b}$  na intervalih  $(b, a)$  in  $(b, c)$  skupaj  $x$  ničel. Nadaljnih  $x$  rešitev odgovarja sliki 17 in ima  $Y_{2b}$  na obeh intervalih  $x + 1$  ničel. Če je število ničel, ki jih mora imeti  $Y_{2b}$  na intervalu  $(b, a)$  in število, ki jih mora imeti na intervalu  $(b, c)$ , predpisano, sta parametra enolično določena. Predpis teh dveh števil pa ni popolnoma poljuben, ampak mora biti njihova vsota  $x$  ali pa  $x + 1$ .

Ko raste parametra še naprej, je enačba (6) še neskončno mnogokrat izpolnjena, toda nikdar več se ne dobi rešitve problema.  $n$  se manjša, ostane pa vedno pozitiven. Posamezni slučaj, ko je enačba (6) izpolnjena, so karakterizirani s številom ničel, ki jih ima  $Y_{2b}$  na intervalu  $(b, a)$ . To število je vedno večje od  $\varkappa$ . Na intervalu  $(b, c)$  pa nima  $Y_{2b}$  nobene ničle. V odgovarjajočih peterokotnikih se vedno ujema točka  $e_1$  s  $c$ . Primer takega peterokotnika za  $\varkappa = 1$  kaže slika 18.



Slika 18

Tudi če se parametra manjšata od tistih vrednosti, za katere je bila prvokrat enačba (6) izpolnjena, se ne dobi več nobene rešitve problema. Enačbi (6) je sicer še neskončno mnogokrat ustrezno in se sedaj ločijo posamezni slučaj, po številu ničel, ki jih ima  $Y_{2b}$  na intervalu  $(b, c)$ , toda vedno se ujema točka  $e_1$  s točko  $a$ . Peterokotniki so slični onim na sliki 12, ko je bilo  $\varkappa = 0$ .

Slučaj, če je  $\beta = 0$ , ne dela prav nobenih posebnih težav in se obdela ravno tako kot drugi slučaj. Tudi v tem primeru se dobi natančno  $2\varkappa + 1$  rešitev. Isto velja, če je kak drug kot enak nič.

Preostane še slučaj, ko je ali  $a + \beta - \gamma > 1$ , ali pa  $-a + \beta + \gamma > 1$ . Tu pa se mi ni posrečilo nič splošnega

ugotoviti. To se pa da dokazati, da vsaj ena rešitev res eksistira pri vsakem  $z$ .

Doslej smo upodobili le zgornjo polovico ravnine  $x$  s kvocientom  $z$ . Sliko cele ravnine  $x$ , ki je razrezana po realni osi od  $e_2$  do  $e_1$  in od  $a$  preko  $b$  do  $c = \infty$ , se dobi, če se zrcali peterokotnik okoli stranice  $ae_1$  ali pa  $ae_2$ . Na ta način se dobi dvakrat sovisen lik, ki je v bistvu krožni četverokotnik, iz katerega je izrezan krožni dvokotnik. Kot oscilacijsko število smo definirali ono število, ki nam pove, skozi koliko listov se vije ta lik v neposredni bližini stranic dvokotnika.

Kadar ima  $Y_{z,e_2}$  razen ničle v točki  $e_1$  še nadaljnjih  $z$  ničel na intervalu  $(e_2, e_1)$ , opiše  $\tau_a$ , kadar gre točka  $x$  od  $e_2$  do  $e_1$ , krog  $K$  (slika 5)  $z$ -krat in še lok  $\widehat{e_2e_1}$ . Prav lahko se pa da uvideti, če se zrcali peterokotnik okoli stranice  $\overline{ae_2}$ , da se vije lik, ki odgovarja celi ravnini  $x$ , v neposredni bližini dvokotnika skozi  $2z + 1$  listov. To je oscilacijsko število v tem primeru in je torej vedno liho. Ker pa je tedaj, ko ima  $Y_{z,e_1}$  na intervalu  $(e_2, e_1)$   $z$  ničel, tudi  $2z + 1$  rešitev problema, sledi odtod, da je pri danem oscilacijskem številu  $2z + 1$  ravno  $2z + 1$  rešitev problema.



**KLEINSCHES THEOREME IN DER THEORIE  
DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**



Die allgemeine lineare Differentialgleichung der zweiten Ordnung vom Fuchsschen Typus mit  $n$  singulären Punkten hängt ausser den Exponenten in den einzelnen singulären Punkten noch von  $n - 3$  willkürlichen Konstanten, den sogenannten akzessorischen Parametern, ab. Über die Festlegung dieser Konstanten hat Klein die folgende Frage gestellt: Ist es möglich über die akzesorischen Parameter in der Differentialgleichung derart zu verfügen, dass der Quotient zweier unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung gewisse besondere in voraus vorgeschriebene Eigenschaften besitzt. Dieses Problem steht in enger Beziehung zur Theorie der eindeutigen automorphen Funktionen.

Die Kleinsche Fragestellung ist sehr allgemeiner Natur. Ein etwas engeres, aber noch immer sehr umfassendes Problem formuliere ich folgendermassen: Alle singulären Punkte der Differentialgleichung teile man in einige Gruppen ein, mindestens zwei in jede dieser Gruppen. Sämtliche Punkte, die man in eine dieser Gruppen genommen hat, verbinde man nach einer festgesetzten Reihenfolge vom ersten bis zum letzten mit einer Kurve. Dies hat mit allen Punkt-Gruppen so zu geschehen, dass die einzelnen Kurven weder selbst noch untereinander sich schneiden. Entlang jeder dieser Kurven denke man sich die Ebene der unabhängigen Variablen  $x$  aufgeschnitten. Die Frage ist jetzt die folgende: Ist es möglich durch geeignete Bestimmung der akzessorischen Parameter zu erreichen, dass der Quotient  $\tau$  zweier unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung in der zerschnittenen Ebene eindeutig wird und dass dabei sämtliche Substitutionen des Quotienten  $\tau$ , die den Umläufen des  $x$  um die einzelnen singulären Punkte, die derselben Gruppe angehören, entsprechen, auch denselben Kreis unverändert lassen.

Wenn die Differentialgleichung fünf singuläre Punkte hat, so gibt es zwei akzessorische Parameter. Man kann dann das Problem so stellen, dass man zwei dieser fünf Punkte zu einer Gruppe, die übrigen drei in die andere Gruppe auf-

nimmt. Es zeigt sich da. dass eine Lösung nur dann erwartet werden kann, wenn die Exponenten jener zwei sigulären Punkte. bei deren Umlauf der Quotient  $\tau$  in sich zurückkehrt. die eine der folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= \text{ganze Zahl} & (\text{Fall I}) \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \text{ganze Zahl} & (\text{Fall II})\end{aligned}$$

Dabei sind  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  die Exponentendifferenzen an der ersten und an der zweiten singulären Stelle.

In der vorliegenden Untersuchung bearbeite ich eben dieses Problem unter der Voraussetzung, dass die singulären Stellen. sowie die Exponentendifferenzen reele Zahlen sind. Die Differentialgleichung lautet hier:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left( \frac{1-\varepsilon_1}{x-e_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{x-e_2} + \frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{Tx^2 + T_1x + T_2}{(x-e_1)(x-e_2)(x-a)(x-b)} y = 0 \quad (1)$$

Die singulären Punkte sind hier  $e_1, e_2, a, b$  und  $c = \infty$ . Dabei möge sein:

$$e_1 > e_2 > a > b$$

Zu diesen singulären Punkten gehören der Reihe nach die Exponenten

$\varepsilon_1, 0; \varepsilon_2, 0; a, 0; \beta, 0$  und zu  $c = \infty$  die Exponenten  $\gamma', \gamma''$  wobei die Gleichungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \alpha + \beta + \gamma' + \gamma'' &= 0 \\ \gamma' \gamma'' &= T \\ \gamma' - \gamma'' &= \gamma.\end{aligned}$$

gelten, und es mögen noch für die Exponentendifferenzen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, \beta, \gamma$  die üblichen Beschränkungen

$$0 < \varepsilon_1 < 1, 0 < \varepsilon_2 < 1, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$$

bestehen.  $T_1$  und  $T_2$  sind die akzessorischen Parameter.

Die Gleichungen I bzw. II gehen hier in

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= 0 & (\text{Fall I}^*) \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= 0 & (\text{Fall II}^*)\end{aligned}$$

über und ich beschränke mich hier auf den Fall I, wobei  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  ist. In der Theorie der eindeutigen automorphen Funktionen ist dieser Fall der einzig auftretende. Die Ebene  $x$  denke man sich längs der reellen Achse zunächst zwischen  $e_1$  und  $e_2$ . dann weiter von  $a$  über  $b$  nach  $c = \infty$  aufgeschnitten.

Es zeigt sich nun, dass wenn die Gleichung  $I^*$ , d. h.  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  besteht, es immer möglich ist, die akzessorischen Parameter  $\Gamma_1$  und  $T_2$  in der Differentialgleichung (1) derart zu bestimmen, dass der Quotient  $\tau$  in der aufgeschnittenen Ebene eine eindeutige Funktion von  $x$  wird. Dabei können  $\alpha, \beta, \gamma$  noch irgend welche reelle Zahlen  $< 1$  sein. Der Quotient  $\tau$  gibt von der aufgeschnittenen Ebene  $x$  in der Ebene des  $\tau$  ein zweifach zusammenhängendes Bild, das von Kreisbogen begrenzt wird. Es ist im Wesentlichen ein Kreisbogenviereck, aus dem ein Kreisbogenzweieck herausgeschnitten ist. Das Bild kann sich allerdings auf mehrere Blätter erstrecken. Wichtig ist da die sogenannte Oszillationszahl, die als jene Zahl festgesetzt wird, die die Anzahl der Blätter gibt, durch welche sich das Viereck in der unmittelbaren Nähe des Zweieckes windet. Die Oszillationszahl ist im Falle  $I^*$  immer eine ungerade Zahl  $2z + 1$ .

Das Kreisbogenviereck hat immer einen Orthogonalkreis, der, je nach Umständen, reel oder imaginär ist, oder sich auch auf einen Punkt zusammenziehen kann. Wenn der Orthogonalkreis imaginär ist oder reell, wobei gleichzeitig  $\alpha + \beta + \gamma < 1$  erfüllt ist, oder wenn er sich auf einen Punkt reduziert ( $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ), lässt sich noch mehr aussagen. Es gilt nämlich der Satz: Zu jeder Oszillationszahl  $2z + 1$  gibt es auch genau  $2z + 1$  Lösungen. Ist die Oszillationszahl  $= 1$ , so existiert auch nur eine einzige Lösung, das sogenannte Grundtheorem. Diesmal liegt das Bild nur in einem einzigen Blatt. — (Fig. 2.)

In der Theorie der eindeutigen automorphen Funktionen sind die Exponenten reziproke ganze Zahlen. Nach dem gesagten lassen sich die beiden akzessorischen Parameter auf eine einzige Weise so bestimmen, dass der Quotient  $\tau$  in der zerschnittenen  $x$ -Ebene eine eindeutige Funktion von  $\tau$  wird und das Bild nur in einem einzigen Blatt liegt. Hier ist  $x$  eine eindeutige automorphe Funktion des  $\tau$ . Der Fundamentalbereich ist ein Kreisbogenviereck, aus dem ein Kreisbogenzweieck herausgeschnitten ist. (Fig. 2.)

Man bekommt so zwei verschiedene Arten automorpher Funktionen: Der Existenzbereich der Funktion  $x(\tau)$  ist, wenn  $\alpha + \beta + \gamma < 1$ , begrenzt durch eine unendliche Menge von Grenzkreisen, deren jeder Punkt ein Häufungspunkt dieser

Kreise ist, wenn aber  $\alpha + \beta + \gamma > 1$ , so ist der Existenzbereich dazugehöriger Funktionen die ganze  $\tau$ -Ebene mit Ausnahme einer perfekten Menge von Punkten.

Die Arbeit enthält den ersten, nur der Theorie linearer Differentialgleichungen entnommenen Beweis für solche Kleinsche automorphe Funktionen, deren Existenzbereich durch eine unendliche Menge von Kreisen begrenzt ist. Die Beweismittel bilden nur ganz elementare Stetigkeitsbetrachtungen.

### 1.

Die Differentialgleichung (1) hat in jedem singulären Punkte ausser für  $c = \infty$ , je eine reguläre Lösung, die durchwegs durch  $Y_2$ , also  $Y_{2a}$ ,  $Y_{2b}$  ... bezeichnet werden soll. Es ist dies auch eine der beiden in jenem singulären Punkte normierten Lösungen. Die andere normierte Lösung z. B. im Punkte  $e_1$  hat, wenn  $\varepsilon_1 \neq 0$  ist, die Form

$$Y_{1e_1} = (x - e_1)^{\varepsilon_1} \mathfrak{P}(x - e_1)$$

wo  $\mathfrak{P}(x - e_1)$  eine Potenzreihe von  $x - e_1$  ist, mit  $\mathfrak{P}(0) \neq 0$ . Analoges gilt für die anderen singulären Punkte. Wenn jedoch  $\varepsilon_1 = 0$  ist, so hat man eine Lösung  $Y_{1e_1}$  in der Form

$$Y_{1e_1} = Y_{2e_1} \log(x - e_1) + Q(x - e_1)$$

worin  $Q(x - e_1)$  wieder eine Potenzreihe von  $x - e_1$  ist. Für die Stelle  $c = \infty$  haben die beiden normierten Lösungen die Form  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma'} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$  und  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma''} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$  wobei ähnlich wie früher, eine Änderung platzgreift, wenn  $\gamma' - \gamma'' = \gamma = 0$  ist.

Die Fragestellung verlangt, dass der Quotient  $\tau(x) = Y_1(x) : Y_2(x)$  zweier unabhängiger Lösungen von (1) beim Umlauf des  $x$  um die beiden singulären Punkte  $e_1$  und  $e_2$  in sich zurückkehrt. Dem Umlauf eines jeden der singulären Punkte  $e_1$  und  $e_2$  entspricht je eine lineare gebrochene Substitution des  $\tau$ . Das Produkt dieser beiden Substitutionen entspricht dem Umlauf um  $e_1$  und  $e_2$ , und dies muss die Identität sein.

Es sei  $\tau$  der Quotient der in  $e_1$  normierten Lösungen. Zwischen diesen und den in  $e_2$  normierten Lösungen bestehen Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} Y_{1e_1} &= AY_{1e_2} + BY_{2e_2} \\ Y_{2e_1} &= CY_{1e_2} + DY_{2e_2} \dots (*) \end{aligned}$$

Das Produkt der beiden Substitutionen des  $\tau_{e_1}$  um  $e_1$  und  $e_2$  lautet jetzt:

$$\frac{(BC - AD e^{2\varepsilon_2 \pi i}) e^{2\varepsilon_1 \pi i} \tau_{e_1} + AB (e^{2\varepsilon_2 \pi i} - i)}{DC (1 - e^{2\varepsilon_2 \pi i}) e^{2\varepsilon_1 \pi i} \tau_{e_1} + BC e^{2\varepsilon_2 \pi i} - AD} \dots (S)$$

Soll diese Substitution identisch sein, so muss eines der beiden Systeme von Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= 0 & A &= 0 & D &= 0 & (\text{Fall I}^*) \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= i & C &= 0 & B &= 0 & (\text{Fall II}^*) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten für den Fall, dass  $\varepsilon_1 \neq 0$ ,  $\varepsilon_2 \neq 0$  ist. Es lässt sich leicht einsehen, dass  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  nur gleichzeitig  $= 0$  sein können. Wenn jedoch  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  ist, so bekommt man die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$C = 0. \quad A + D = 0$$

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, beschränke ich mich in der vorliegenden Arbeit auf den Fall I\*. Hier ist es nötig die beiden Parameter  $T_1$  und  $T_2$  so zu bestimmen, dass die Gleichungen  $A = 0$ ,  $D = 0$  bzw.  $C = 0$ ,  $A + D = 0$ , wenn  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , erfüllt sind.

Zunächst werde angenommen, dass  $A = 0$  bereits gilt. Aus den Gleichungen (\*) folgt dann, dass  $Y_{1e_1}$  proportional ist mit  $Y_{2e_2}$  und dass  $Y_{2e_1}(e_1) = 0$  ist. Setzt man

$$m = \tau_{e_2}(e_1) = \frac{Y_{1e_2}(e_1)}{Y_{2e_2}(e_1)} = - \frac{B}{A}$$

so ist  $m = \infty$  sobald  $A = 0$ . Umgekehrt gilt auch, dass  $A = 0$ , wenn  $m = \infty$  ist. Wenn  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  ist, so lautet die erste Bedingung  $C = 0$  und es ist auch hier  $m = \infty$ .

Nunmehr ist zu zeigen, dass bei beliebiger Fixierung des einen Parameters in der Gleichung (1) der zweite so bestimmt werden kann, dass  $m$  irgend einen im voraus gewollten Wert annimmt.

Die Differentialgleichung (1) schreibe man in der Form:

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dy}{dx} \right) = p [\varphi(x) + \lambda \psi(x) + \mu \chi(x)] y \dots (1^*)$$

wobei

$$p = (x - e_1)^{1 - \varepsilon_1} (x - e_2)^{1 - \varepsilon_2} (x - a)^{1 - \alpha} (x - b)^{1 - \beta}$$

$$\varphi(x) = \frac{T}{(x - e_1)(x - e_2)}; \quad \psi(x) = \frac{1}{(x - e_1)(x - e_2)(x - b)}$$

$$\chi(x) = \frac{1}{(x - e_1)(x - e_2)(x - a)(x - b)}$$

In der Gleichung (1\*) sind  $\lambda$  und  $\mu$  die akzessorischen Parameter.

In der Folge sind die Vorzeichen von  $\psi(x)$  und  $\chi(x)$  in den einzelnen Intervallen von Wichtigkeit. Das folgende gibt eine Übersicht über diese Zeichen

	$x$	-----	$b$	--	$a$	-----	$e_1$	-----	$e_2$	-----	$x$
$\psi(x)$ :	+		-		-		+		-		-
$\chi(x)$ :	+		-		+		-		+		+

$Y_{1e_1}$  und  $Y_{2e_2}$  sollen eindeutig so normiert werden, dass  $Y_{2e_2}(e_2) = 1$  und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |p| \frac{dY_{1e_1}}{dx} \Big|_{x=e_2+\varepsilon} = 1$$

Die gleiche Normierung gilt in den anderen singulären Punkten.

In der Differentialgleichung (1\*) werde  $\mu$  beliebig, aber fix gehalten. Bei stetiger Änderung des Parameters  $\lambda$  erleidet auch  $m = \frac{Y_{1e_1}}{Y_{2e_2}}$  wenn  $e_2$  endlich ist, eine stetige Änderung: ist aber  $m = \infty$ , so ist  $1 : m$  stetig. Wächst nämlich  $\lambda$ , so wird  $m$  kleiner und umgekehrt. Man erkennt dies folgendermassen: Es sei  $y$  eine Lösung der Differentialgleichung (1\*) beim Parameterpaar  $\lambda$  und  $\mu$ ,  $\eta$  jedoch die Lösung derselben Gleichung (1\*) beim Parameterpaar  $\lambda + \Delta\lambda$ ,  $\mu + \Delta\mu$ , wobei  $m$  den Wert  $m + \Delta m$  hat. Es gilt dann die Gleichung

$$p \left( y \frac{d\eta}{dx} - \eta \frac{dy}{dx} \right) = (\lambda_1 - \lambda) \int \mu |y \eta \psi(x) dx + (\mu_1 - \mu) \int \mu |y \eta \chi(x) dx \quad (2)$$

und wenn, wie in unserem Fall die Integration sich auf ein Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden singulären Stellen erstreckt, so kann hierin  $|p|$  statt  $p$  genommen werden.

Für  $y$  setzen wir nun hierin  $Y_{1e_1}$ , —  $mY_{2e_2}$  ein, genommen beim Parameterpaar  $\lambda$ ,  $\mu$  und für  $\eta$  denselben Ausdruck für

das Paar  $\lambda + \Delta\lambda$ ,  $\mu$  und den Wert  $m + \Delta m$  des  $m$ . Wenn dann die Änderung  $\Delta\lambda$  hinreichend klein ist und man in (2) die Integrationsgrenzen  $e_2$  und  $e_1$  nimmt, so gibt die Berücksichtigung der Vorzeichen von  $\psi(x)$  die Ungleichung

$$\frac{\Delta m}{\Delta \lambda} < 0 \quad (5)$$

woraus die stetige Abnahme des  $m$  bei Zunahme des  $\lambda$  folgt,

Solange  $\lambda$  positiv und so gross ist, dass rechts in (1\*) der  $[\ ]$ -Faktor des  $y$  auf  $\overline{e_2 e_1}$  überall positiv ist, ist  $m > 0$  und  $Y_{e_2(x)}$  hat auf  $\overline{e_2 e_1}$  keinen Nullpunkt.  $Y_{e_2}$  und  $Y_{e_2}$  wachsen nämlich beständig, wenn  $x$  von  $e_2$  bis  $e_1$  geht. Wenn nun  $\lambda$  von so einem Wert abnimmt, wächst  $m$  und nimmt jeden Wert beliebig oft an. Die einzelnen Werte des  $\lambda$ , bei denen  $m$  denselben vorgeschriebenen Wert bekommt, sind durch die Anzahl der Nullstellen des  $Y_{e_2}$  auf  $\overline{e_2 e_1}$  charakterisiert. Wenn diese Anzahl gegeben ist, ist auch  $\lambda$  genau bestimmt, sobald  $m$  gegeben ist. Dies gilt auch für  $m = \infty$  und auch, wenn  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  ist.

Bisher wurde nur  $\lambda$  verändert, während  $\mu$  fest, wenn auch beliebig, blieb. Nimmt man nun für  $\mu$  einen anderen Wert und schreibt dasselbe  $m$  und die gleiche Anzahl von Nullstellen für  $Y_{e_2}$  auf  $\overline{e_2 e_1}$  vor, so bekommt man wieder nur einen Wert für  $\lambda$ . Es ist also  $\lambda$  eine eindeutige Funktion des  $\mu$ . Dass diese Funktion stetig und mit  $\mu$  monoton aufsteigend ist, lässt sich folgendermassen erkennen:

Es mögen  $\Delta\lambda$  und  $\Delta\mu$  zusammengehörige Änderungen von  $\lambda$  und  $\mu$  bedeuten. Setzt man dann in (2)  $Y_{e_2}$  für  $y$  beim Parameterpaar  $\lambda, \mu$  und analog  $Y_{e_2}$  für  $\eta$  beim Paar  $\lambda + \Delta\lambda, \mu + \Delta\mu$  ein, so ergibt sich, wenn  $\Delta\lambda$  und  $\Delta\mu$  hinreichend klein sind bei Berücksichtigung der Vorzeichen von  $\psi(x)$  und  $\chi(x)$  auf  $e_2 e_1$  die Ungleichung

$$\frac{\Delta \lambda}{\Delta \mu} > 0$$

Daraus folgt die Stetigkeit und Monotonie von  $\lambda$  als Funktion des  $\mu$ . In gleicher Weise ergibt sich auch die Stetigkeit und Monotonie von  $\mu$  als Funktion des  $\lambda$ .

Zur Lösung des Problems wäre es noch nötig im Einklang mit der ersten Bedingung  $A = 0$  oder  $m = \infty$  die Parameter

$\lambda$  und  $\mu$  so zu bestimmen, dass auch  $D = 0$  wird. Dies gelang mir jedoch nicht bei bloßer Betrachtung auf dem Intervall  $\overline{e_2 e_1}$ . Ich musste andere Intervalle zu Hilfe nehmen und andere erfüllbare Bedingungen aufstellen, die mit der Bedingung  $D = 0$  äquivalent sind.

## 2.

Der Quotient zweier unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung (1) liefert eine konforme Abbildung der oberen Hälfte der  $x$ -Ebene auf ein Kreisbogenfünfeck mit den Winkeln  $\pi\varepsilon_1, \pi\varepsilon_2, \pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$ . Die Umgebung jedes Punktes in der oberen Hälfte der  $x$ -Ebene wird umkehrbar eindeutig auf die Umgebung des entsprechenden Punktes der  $\tau$ -Ebene abgebildet. Es folgt daraus nicht, dass das Fünfeck sich nicht zum Teil selbst überdecken könnte. Windungspunkte gibt es jedoch im Inneren nirgends.

Bilden wir nun die obere  $x$ -Halbebene durch  $\tau_a = Y_{1a}$ :  $Y_{2a}$  und  $Y_{3a}$  ab, wobei  $Y_{2a}$  die beiden im Punkte  $a$ , wie angegeben, normierten Lösungen von (1) sind. Geht nun  $x$  längs der reellen Achse von  $a$  bis  $e_2$ , so beschreibt  $\tau_a$  das Segment  $\overline{ae_2}$  der reellen  $\tau_a$ -Achse. Der Punkt  $a$  liegt im Koordinatenursprung (Fig. 5). Geht jedoch  $x$  vom Intervall  $\overline{ae_2}$  auf das Intervall  $ab$  über indem es dem Punkt  $a$  auf einem kleinen in der oberen  $x$ -Halbebene verlaufenden Kreis ausweicht, so gibt das Intervall  $ab$  in der  $\tau$ -Ebene eine geradlinige Strecke  $a\beta$ , die mit  $ae_2$  den Winkel  $\pi\alpha$  einschliesst. Wenn nun  $x$  von  $e_2$  aus gegen den Punkt  $e_1$  weiter geht, indem es zunächst, wie oben dem Punkt  $a$ , jetzt  $e_2$  ausweicht, so beschreibt  $\tau_a$  einen Kreisbogen  $K$ , der die reelle Achse unter dem Winkel  $\pi\varepsilon_2$  trifft. Nehmen  $\lambda$  und  $\mu$  nur solche Werte an, dass die erste Bedingung  $m = \infty$  befriedigt ist, so liegt der Bildpunkt  $e_1$  von  $e_1$  auf der reellen Achse d. h. auf der Verlängerung von  $\overline{ae_2}$ . Die in  $a$  normierten Lösungen sind mit jenen in  $e_2$  normierten durch Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} Y_{1a} &= A_1 Y_{1e_2} + B_1 Y_{2e_2} \\ Y_{2a} &= C_1 Y_{1e_2} + D_1 Y_{2e_2} \end{aligned}$$

verknüpft.  $Y_{1a}$  und  $Y_{2a}$  und ebenso  $Y_{1e_2}$  sind auf  $ae_2$  reell.

Weil nun  $Y_{ie_2}$  auf  $\overline{ae_2}$  den Drehfaktor  $e^{\pi i \varepsilon_2}$  hat<sup>\*)</sup>, so haben  $A_1$  und  $C_1$  den Drehfaktor  $e^{-\pi i \varepsilon_2}$ ,  $B_1$  und  $D_1$  sind jedoch reelle Zahlen. Darans folgt, weil

$$m = \tau_2(e_1) = \frac{Y_{ie_2}(e_1)}{Y_{2e_2}(e_1)} = \infty$$

ist, dass  $\tau_a(e_1) = A_1:C_1$  reell ist, weil  $A_1$  und  $C_1$  denselben Drehfaktor haben. So viele Nullstellen  $Y_{ie_2}$  auf dem Intervall  $e_2e_1$  besitzt, so oft beschreibt  $\tau_a$  den ganzen Kreis  $K$  und dazu noch den Bogen  $e_2e_1$ , sobald  $x$  von  $e_2$  gegen  $e_1$  geht. Weil nun  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  ist, so berührt der Kreisbogen, der dem Intervalle  $e_1c$  entspricht, die reelle Achse im Punkt  $e_1$  (Fig. 6).

Im Falle der Lösung des Problems ist das Bild des Intervalls  $e_1c$  ein Teil der reellen Achse. Umgekehrt geben solche Werte von  $\lambda$  und  $\mu$ , bei denen das Bild des Intervalls  $e_1c$  in der reellen Achse liegt, wirklich eine Lösung der Frage.

Um nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass das Bild von  $e_1c$  in der reellen Achse liegt, drücken wir  $\tau_a$  durch den Quotienten  $\tau_c$  der in  $c$  normierten Lösungen aus. Dieser Quotient ist auf  $e_1c$  reell. Es sei

$$\tau_a = \frac{L\tau_c + M}{N\tau_c + P}, \quad LP - MN = 1 \dots (*)$$

Wenn  $\tau_c$  von  $\tau_c(c) = 0$  bis  $\tau_c(e_1)$  geht, beschreibt  $\tau_a$  die Seite  $\overline{c_1e_2}$ . Da das Problem das Reellsein des  $\tau_a$  verlangt, muss die Substitution (\*) die reelle Achse wieder in die reelle Achse überführen und zwar, wie leicht zu sehen, so, dass dem oberen Teil der  $\tau_c$ -Ebene der untere von  $\tau_a$  und umgekehrt entspricht. Es folgt daraus, dass die Koeffizienten alle rein imaginär sein müssen. Es gelten also die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} L + \bar{L} &= 0 & , & & M + \bar{M} &= 0 \\ N + \bar{N} &= 0 & , & & P + \bar{P} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Dies sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Im allgemeinen sind, wegen  $LP - MN = 1$ , nur drei von

<sup>\*)</sup> In der Darstellung  $z = |z|e^{i\alpha}$  nenne ich  $e^{i\alpha}$  Drehfaktor der komplexen Zahl  $z$ .

ihnen unabhängig. Da aber die erste Bedingung  $m = \infty$  erfüllt ist, bleiben hier nur zwei von ihnen unabhängig, da der Kreis  $K_2$ , auf dem  $e_1$  liegt, die reelle Achse in  $e_1$  berührt.

Der Punkt

$$\tau_a = \frac{L\tau + M}{N\tau + P}$$

beschreibt den vollen Kreis  $K_0$ , wenn  $\tau$  die ganze reelle Achse durchläuft. Im Punkte  $e_1$ , wo  $K_0$  die reelle Achse berührt, bildet die Tangente auf  $K_0$  mit der reellen Achse den Winkel  $\pi$ . Es gilt nun offenbar der Satz: Wenn die Tangente auf  $K_0$  in irgendeinem Punkte mit der positiven reellen Achse den Winkel  $\theta$  einschliesst, so ist daselbst der Drehfaktor von  $\frac{d\tau_a}{d\tau}$  gleich  $e^{i\theta}$ . Der Drehfaktor von  $\frac{d\tau_a}{d\tau}$  lautet nun

$\frac{N\bar{\tau} + \bar{P}}{N\tau + P}$  und muss in  $e_1$  gleich  $e^{i\pi} = -1$  sein. Es ist also für  $\tau = \tau_c(e_1) = \tau_1$

$$\frac{N\bar{\tau}_1 + \bar{P}}{N\tau_1 + P} = -1 \quad \text{oder} \quad (N + \bar{N})\tau_1 + P + \bar{P} = 0.$$

Daraus folgt der Wert für  $\tau_1$ , wenn nicht gleichzeitig  $N + \bar{N} = 0$ ,  $P + \bar{P} = 0$ . Der Wert für  $\tau_a$  ergibt sich jetzt durch Einsetzen in (\*). Da dieser reell sein muss, folgt jetzt mit Rücksicht darauf, dass der Nenner rein imaginär ist, dasselbe auch für den Zähler und daraus die Gleichung:

$$(L + \bar{L})(P + \bar{P}) - (M + \bar{M})(N + \bar{N}) = 0 \dots (5)$$

Von den vier Gleichungen (4) bleiben also nur zwei unabhängig. Da jedoch der ersten Bedingung genügt wurde, der eine Parameter also durch den anderen vollständig bestimmt ist, lässt sich unmittelbar nur eine Bedingung erfüllen. Als solche möge die Gleichung

$$M + \bar{M} = 0 \dots (4^*)$$

genommen werden. Es wird sich herausstellen, dass diese Gleichung stets erfüllbar ist. Jetzt ist es nötig zu untersuchen, was aus (4\*) für das gesuchte Fünfeck folgt.

Wenn sich mit (4\*) gleichzeitig die Gleichungen  $N + \bar{N} = 0$ ,  $P + \bar{P} = 0$  ergeben, so sind wegen  $LP - MN = 1$  alle Koeffizienten  $L, M, N, P$  rein imaginär und wir haben eine Lö-

sung des Problems. Wenn nicht, so ist nach dem gesagten  $\tau_1 = (P + \bar{P}) : (N + \bar{N})$  bestimmbar und es gilt dann die Gleichung (5) und wegen (4<sup>\*</sup>) folgt, dass

$$(L + \bar{L}) (P + \bar{P}) = 0$$

ist, woraus zwei weitere Möglichkeiten entstehen.

1. Es sei

$$L + \bar{L} = 0 \dots (5^*)$$

Das Einsetzen des  $\tau_1 = (P + \bar{P}) : (N + \bar{N})$  in (\*) zeigt, dass  $\tau_a(e_1) = 0$  ist, dass demnach  $e_1$  mit  $a$  zusammenfällt.

2. Wenn

$$P + \bar{P} = 0 \dots (5^{**})$$

dann ergibt sich schon  $\tau_c(e_1) = \tau_1 = 0$  d. h. der Punkt  $e_1$  deckt sich mit  $c$ .

Das Ergebniss ist nun: Ist die Gleichung (4<sup>\*</sup>) erfüllt, so hat man entweder eine Lösung des Problems oder aber fällt der Punkt  $e_1$  mit dem Punkt  $a$  oder mit  $c$  zusammen.

Es handelt sich jetzt um eine handliche Darstellung der Bedingung (4<sup>\*</sup>). Zunächst die Darstellung der Koeffizienten  $L, M, N, P$ . Die in  $a$  normierten Lösungen sind mit den in  $b$  normierten durch

$$\begin{aligned} Y_{1a} &= A_1 Y_{1b} + B_2 Y_{2b} \\ Y_{2a} &= C_2 Y_{1b} + D_2 Y_{2b} \end{aligned} \quad A_2 D_2 - B_2 C_2 = -e^{\pi i \alpha}$$

und  $Y_{1b}, Y_{2b}$  mit dem in  $c = \infty$  normierten durch

$$\begin{aligned} Y_{1b} &= A_3 Y_{1c} + B_3 Y_{2c} \\ Y_{2b} &= C_3 Y_{1c} + D_3 Y_{2c} \end{aligned} \dots (\dagger \dagger)$$

verknüpft. Also ist

$$A_3 D_3 - B_3 C_3 = -e^{(\beta + \gamma' + \gamma'')\pi i}$$

$$\tau_a = \frac{A_2 \tau_b + B_2}{C_2 \tau_b + D_2} = \frac{(A_2 A_3 + B_2 C_3) \tau_c - A_2 B_3 + B_2 D_3}{(C_2 A_3 + D_2 C_3) \tau_c + C_2 B_3 + D_2 D_3} \dots (\dagger \dagger \dagger)$$

Die Koeffizienten sind hierin noch nicht  $L, M, N, P$ , weil die Determinante nicht den Wert 1 sondern  $e^{\pi i(\alpha + \beta + \gamma' + \gamma'')}$

Dividiert man jeden Koeffizienten durch  $e^{\frac{\pi i}{2}(\alpha + \beta + \gamma' + \gamma'')}$

so wird die Determinante gleich 1 und die Gleichung (4<sup>\*</sup>) bekommt, wenn man berücksichtigt, dass die Drehfaktoren von  $B_3$  und  $D_3$  bezüglich  $e^{\pi i(\beta + \gamma')}$  und  $e^{\pi i \gamma'}$ , von  $A_0$  und  $B_2$  aber  $e^{\pi i \alpha}$  sind, die Form

$$A_2 B_3 e^{-\pi i \beta} \cos(\alpha + \beta - \gamma) \frac{\pi}{2} + \\ + B_2 D_3 \cos(-\alpha + \beta + \gamma) \frac{\pi}{2} = 0.$$

Den Wert für  $\frac{B_3}{A_0}$  bekommt man aus (†) für  $x = a$  und analog  $B_2$  aus (††). So hat man für (4<sup>\*</sup>) die Endform

$$\frac{Y_{1b}(a)}{Y_{2b}(a)} \cos(-\alpha + \beta + \gamma) \frac{\pi}{2} = \frac{Y_{1b}(c)}{Y_{2b}(c)} e^{-\beta \pi i} \cos(\alpha + \beta - \gamma) \frac{\pi}{2} \dots (6)$$

Diese Gleichung gilt in allen Fällen ausser für  $\beta = 0$ . Im Falle  $\beta = 0$  liefern ähnliche Betrachtungen, wie bisher, für (4<sup>\*</sup>) die Gleichung

$$\left[ \frac{Y_{1b}(c)}{Y_{2b}(c)} - \pi i \right] - \frac{Y_{1b}(a)}{Y_{2b}(a)} = \pi \rho \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) \frac{\pi}{2} \dots (6^*)$$

dabei bedeutet  $\pi i \rho$  die imaginäre Komponente von  $\pi b$  auf dem Intervall  $bc$ .

### 3.

In der Differentialgleichung (1<sup>\*</sup>) sollen jetzt  $\lambda$  und  $\mu$  so verändert werden, dass die erste Bedingung  $m = \infty$  erfüllt ist und, dass dabei  $Y_{2e_2}$  im Inneren des Intervalls  $e_2 e_1$  genau  $n$  Nullpunkte hat. Es entsteht nun die Frage, ob unter Erhaltung dieser Bedingungen die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  derart bestimmt werden können, dass auch die Gleichung (6) bzw. (6<sup>\*</sup>) erfüllt ist. Es wird sich im Folgenden herausstellen, dass dies noch auf unendlich viele Weisen möglich ist. Da aber nicht jedes Paar solcher Parameter wirklich eine Lösung des Problems gibt, ist es nötig aus der sich ergebenden unendlichen Menge gerade jene auszusondern, die eine Lösung geben.

Der Kürze wegen sei

$$\frac{Y_{1b}(a)}{Y_{2b}(a)} = l \quad e^{-\beta \pi i} \frac{Y_{1b}(c)}{Y_{2b}(c)} = n$$

und, wenn  $\beta = 0$  ist, sei

$$\frac{Y_{2b}(c)}{Y_{1b}(c)} - \pi q l = n$$

dann lauten die Gleichungen (6) und (6\*)

$$l \cos(-\alpha + \beta + \gamma) \frac{\pi}{2} = n \cos(\alpha + \beta - \gamma) \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$$n - l = \pi q \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) \frac{\pi}{2} \quad (6^*)$$

Zunächst ist es nötig zu untersuchen, was mit  $l$  und  $n$  geschieht, wenn  $\lambda$  und  $\mu$  im Einklang mit der ersten Bedingung geändert werden. Zu diesem Zwecke führen wir in (2) für  $y$  die Lösung

$$Y_{1c} = A_1 Y_{1b} + B_2 Y_{2b}$$

beim Parameterpaar  $\lambda, \mu$ , für  $\eta$  dasselbe beim Paar  $\lambda + \Delta\lambda, \mu + \Delta\mu$  ein. Mit Rücksicht auf die Vorzeichen von  $\psi(x)$  und  $\chi(x)$  auf dem Intervall  $ba$  und den Umstand, dass stets  $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\mu} > 0$  ist, bekommt man

$$\frac{\Delta l}{\Delta \mu} > 0$$

Es wächst also  $l$  mit  $\lambda$  und  $\mu$  gleichzeitig und umgekehrt. Die Änderung des  $l$  ist stetig, wenn  $l$  endlich ist, für  $l = \infty$  ist die Änderung von  $\frac{1}{l}$  stetig, wovon man sich leicht überzeugt.

Auf genau analoge Weise zeigt man, dass  $n$  abnimmt, wenn  $\lambda$  und  $\mu$  zunehmen und umgekehrt.

Zunächst sei  $\alpha = 0$ , also der Fall, dass  $Y_{2e_2}$  auf  $e_2 e_1$  keinen Nullpunkt hat. Wenn die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  hinreichend gross negativ sind, ist der  $[-]$ -Faktor des  $y$  rechst in der Gleichung (1\*) auf dem Intervall  $ba$  überall positiv. Die Werte von  $Y_{1b}$  und  $Y_{2b}$  wachsen beständig, wenn  $x$  von  $b$  gegen  $a$  rückt und es ist dabei:

$$Y_{1b}(a) > 0, Y_{2b}(a) > 0, \text{ oder } l > 0.$$

Werden von diesen Werten aus die Werte der Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  verkleinert, so fällt auch  $l$  beständig, bleibt aber

doch positiv, weil der Klammerfaktor des  $y$  in (1\*) positiv ist. Wenn also  $\lambda$  und  $\mu$  von ihren Anfangswerten aus so lange vergrössert werden, bis der  $[\ ]$ -Koeffizient des  $y$  in (1\*) negativ und so gross wird, dass  $Y_{2b}$  auf  $ba$  Nullpunkte bekommt, so gehen sie einmal durch die Werte, bei denen zum ersten Male  $Y_{2b}(a) = 0$  ist. In diesem Moment ist  $l = \infty$ .

Nun die Frage, welche Form hat das Fünfeck, wenn  $l$  zum ersten Male  $\infty$  wird? Das entsprechende Fünfeck zeigt die Figur 8, worin die obere  $x$ -Halbebene durch  $\tau_b = Y_b : Y_{2b}$  abgebildet ist. Dem Bild entnimmt man, dass  $n = \text{bc} > 0$  ist und, dass  $Y_{2b}$  auf  $\text{bc}$  noch keinen Nullpunkt hat. Wenn  $-\alpha + \beta + \gamma = 1$  ist, bekommen wir schon gleich eine Lösung des Problems, denn die Seite  $ce_1$  liegt hier in der Verlängerung der Seite  $ae_1$ , im allgemeinen aber ist  $ce_1$  ein Bogen des Kreises  $K_1$ , der ins Innere des Fünfeckes für  $-\alpha + \beta + \gamma > 1$  die konkave Seite, für  $-\alpha + \beta + \gamma < 1$  die konvexe Seite weist.

Es sei zunächst  $-\alpha + \beta + \gamma < 1$  und  $\alpha + \beta - \gamma < 1$ . In diesem Fall ist

$$\cos(-\alpha + \beta + \gamma)\frac{\pi}{2} > 0, \quad \cos(\alpha + \beta - \gamma)\frac{\pi}{2} > 0$$

Wenn die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  von jenen Werten, bei denen zum ersten Male  $l = \infty$  wurde, abnehmen, ist  $l$  positiv und wird kleiner. Zunächst war  $n$  auch positiv und wächst. Bevor  $n = \infty$  wird, wird die Gleichung (6) einmal aber auch nur einmal erfüllt. Dies gibt eine Lösung des Problems, denn sonstigen Falles würde nach dem oben gesagten der Punkt  $e_1$  entweder mit  $a$  oder mit  $c$  übereinstimmen (Figur 9 oder 10). Keines solcher Fünfecke ist möglich, denn es müsste im Inneren Windungspunkte haben.

Die gefundene Lösung ist das Grundtheorem und es existiert für  $x = 0$  keine weitere Lösung. Trotzdem ist die Gleichung (6) noch bei unendlich vielen Werten der Parameter  $\lambda, \mu$  erfüllt. Die Parameter sollen von jenen Werten aus, bei denen das Grundtheorem bestand, vergrössert werden.  $n$  wird kleiner und bleibt positiv,  $l$  hingegen nimmt jeden Wert beliebig oft an. Es besteht auch die Gleichung (6) noch bei unendlich vielen Parameterwerten  $\lambda, \mu$  und die einzelnen Paare, bei denen der Gleichung (6) genügt wird, sind durch

die Anzahl der Nullpunkte von  $Y_{ab}$  auf  $ba$  eindeutig charakterisiert. Im Fünfeck stimmt  $e_1$  mit  $c$  überein (Figur 11).\*)

Werden die Parameter  $\lambda, \mu$  von den Ausgangswerten aus verkleinert, so besteht die Gleichung (6) abermals unendlich oft. Diesmal werden die einzelnen Paare von  $\lambda, \mu$  durch die Anzahl der Nullpunkte von  $Y_{ab}$  auf dem Intervall  $bc$  festgelegt. Im Fünfeck fällt der Punkt  $e_1$  auf  $a$ . (Figur 12.)

Bisher war  $-a + \beta + \gamma < 1, a + \beta - \gamma < 1$ . Diese beiden Ungleichungen bestehen immer, wenn  $a + \beta + \gamma < 1$  ist, d. h., wenn ein reeller Orthogonalkreis des Dreieckes  $abc$  existiert oder aber wenn  $a + \beta + \gamma > 1$  und der Orthogonalkreis imaginär ist.

Sei etwa  $-a + \beta + \gamma > 1$ . Sodann ist  $\cos \frac{\pi}{2} (-a + \beta + \gamma) < 0$ . Zu Beginn nehmen wir für die Parameter solche Werte an, dass zum ersten Male  $l = \infty$  wird. Dabei war  $n > 0$ . Vergrössert man die Parameter, so wird  $l$  negativ und aufsteigend,  $n$  fällt, bleibt aber positiv. Bevor  $l = 0$  wird, besteht wenigstens einmal die Gleichung (6), es lässt sich aber hier nicht einsehen, dass dies nur einmal eintritt. Diese Werte der Parameter geben eine Lösung (Figur 13). Werden die Parameter noch weiter vergrössert, oder aber, wenn sie von den Ausgangswerten aus verkleinert werden, so ist (6) noch unendlich oft erfüllt. Man bekommt jedoch hier in keinem Falle mehr eine Lösung, sondern sind die Fünfecke ähnlich denen in Figur 11 bzw. Figur 12. Das gleiche gilt für  $a + \beta - \gamma > 1$ .

Es bleibt noch der Fall  $\beta = 0$  zu erörtern. Die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  sind hier der Gleichung (6\*) gemäss zu bestimmen. Wiederum gehe man von jenen Werten aus, für die zum ersten Male  $l = \infty$  wird. Ähnlich, wie oben, ergibt sich, dass dabei  $Y_{ab}$  auf  $ba$  noch keinen Nullpunkt hat. Auch hier existiert eine zählbar unendliche Menge von Parametern, bei denen (6\*) erfüllt ist. Man bekommt eine Lösung, sobald  $Y_{ab}$  weder auf  $cb$  noch auf  $ba$  einen Nullpunkt hat (Figur 14).

#### 4.

Bisher war  $z = 0$ . Unter allen Umständen konnten wir wenigstens eine Lösung des Problems angeben. Nunmehr möge

\*) Auf den Zeichnungen sind Linien, die einander überdecken jedoch in verschiedenen Blättern der Riemannscher Fläche liegend, zwecks leichter Vorstellbarkeit etwas verschoben dargestellt.

$Y_{2e_2}$  auf  $e_2e_1$  ausser im Punkt  $e_1$  noch genau  $\kappa$  Nullpunkte besitzen. Wiederum bestimmen wir jenes Parameterpaar  $\lambda, \mu$ , wofür  $l = \infty$  wird und  $Y_{2b}$  auf  $ba$  (ausser in  $a$ ) noch keinen Nullpunkt hat. Ähnlich, wie für  $\kappa = 0$ , zeigt sich, dass das Fünfeck die Form von Figur 15, wo  $\kappa = 1$  angenommen wurde, haben muss. Das Fünfeck windet sich um den Kreis  $K$  durch  $\kappa + 1$  Blätter. Aus Figur 15 erkennt man, dass bei diesen Parametern  $Y_{2b}$  auf  $bc$  genau  $\kappa$  Nullpunkte hat und dass  $n > 0$ .

Wieder nehmen wir zuerst  $-\alpha + \beta + \gamma < 1, \alpha + \beta - \gamma < 1$  an. Bei Verkleinerung der Parameter von den Anfangswerten aus wird  $l$  kleiner, bleibt aber positiv. Dabei wächst  $n$  und bevor es  $\infty$  wird, ist ein einziges Mal die Gleichung (6) erfüllt. Dies gibt wirklich eine Lösung des Problems (Fig. 16).

Nunmehr sollen  $\lambda$  und  $\mu$  vom ersten Auftreten von  $l = \infty$  bis zum zweiten vergrössert werden. So bekommt  $Y_{2b}$  ausser in  $a$  noch einen Nullpunkt auf  $ba$ . Das entsprechende Fünfeck zeigt Figur 15, nur dass die Seite  $ba$  einmal, die Seite  $bc$  noch  $(\kappa - 1)$ -mal die ganze reelle Achse durchläuft. Dabei hat  $Y_{2b}$  auf  $bc$  genau  $\kappa - 1$  Nullpunkte und  $n$  ist positiv.

Auch zu Anfang war  $n$  positiv. Weil  $n = Y_{2b}(c) e^{-\pi i \beta} : Y_{2b}(c)$  abnimmt, und  $Y_{2b}$  zu Anfang  $\kappa$  am Ende noch  $\kappa - 1$  Nullpunkte auf  $bc$  hatte, musste  $n$  einmal durch  $\infty$  hindurchgehen. Zwischen den Anfangswerten und diesen Werten existiert ein einziges Paar von Parameterwerten, für die (6) besteht. Man bekommt hier eine Lösung und das Fünfeck wird durch Figur 17 veranschaulicht. Bei dieser Lösung hat  $Y_{2b}$  auf  $ba$  einen, auf  $bc$  genau  $\kappa$  Nullpunkte, auf beiden zusammen also  $\kappa + 1$ . Bei der ersten Lösung also hatte  $Y_{2b}$  nur  $\kappa$  Nullpunkte auf beiden Intervallen. Es ist auch die Struktur des Fünfeckes auf Figur 17 sehr verschieden von der auf Figur 16.

Zwischen jenen Parameterpaar, bei dem  $n = \infty$  wird und jenem, wobei zum zweiten Male  $l = \infty$  wurde, existiert wieder ein Paar im Einklang mit (6). Auch dieses Paar von Parametern gibt eine Lösung,  $Y_{2b}$  hat jetzt auf  $ba$  einen Nullpunkt und  $\kappa - 1$  auf  $bc$ , im ganzen also  $\kappa$ . Das Fünfeck ist ähnlich dem der Figur 16.

Wird das Paar  $\lambda, \mu$  von nun an weiter vergrößert, bis zum dritten Male  $l = \infty$  wird, so wird inzwischen zweimal die Gleichung (6) erfüllt. Die Lösungen geben nacheinander Fünfecke von den Formen der Figur 17 und der Figur 16.

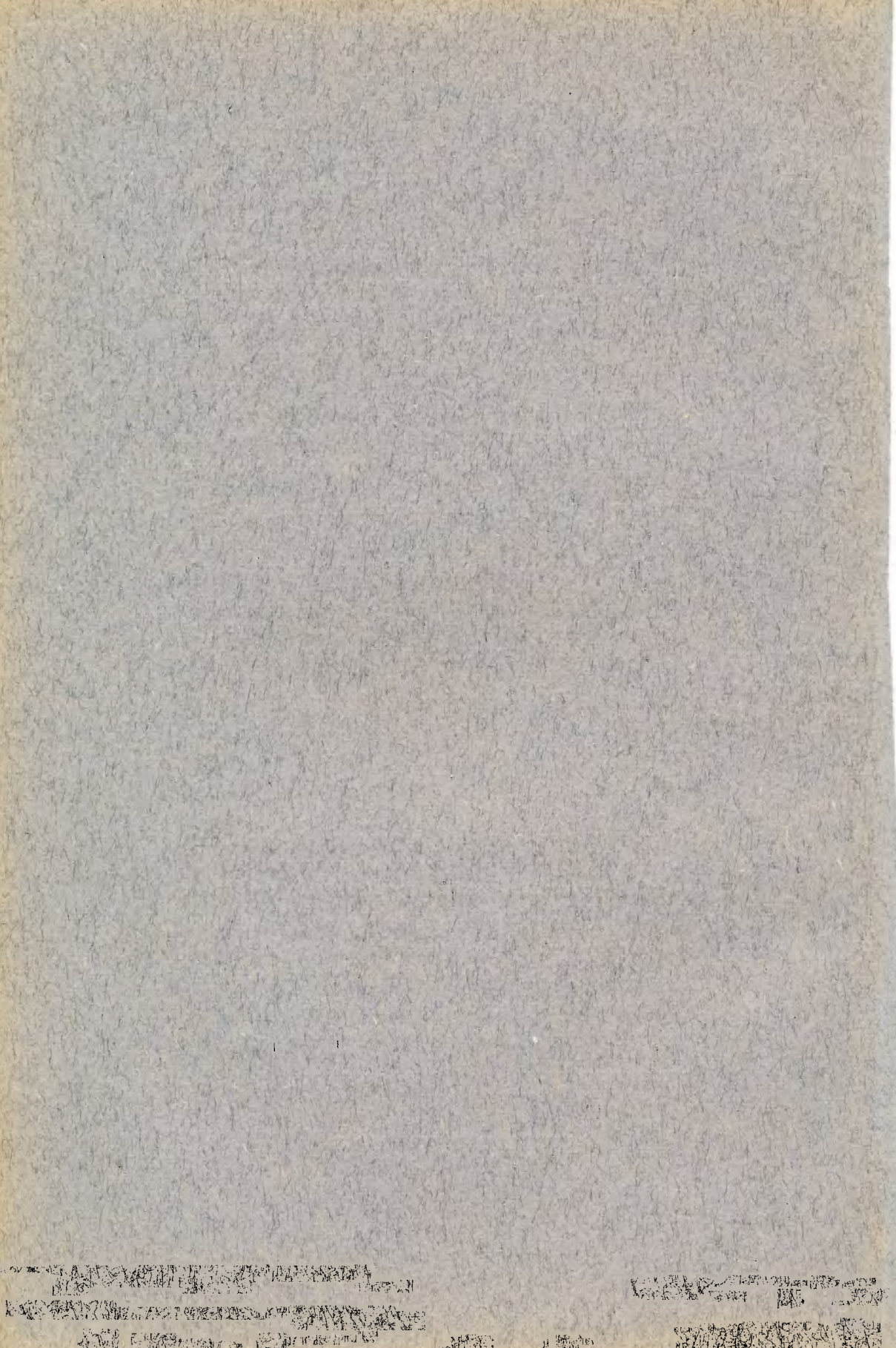
Das Verfahren wird fortgesetzt bis  $Y_{zb}$  auf  $ba$  ausser in  $a$  noch  $x$  Nullpunkte bekommt. Dabei ist  $n$  positiv und  $Y_{zb}$  hat auf  $bc$  keinen Nullpunkt. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Paaren von  $\lambda, \mu$  für welche  $l = \infty$  ist, existieren immer zwei Lösungen des Problems. Man bekommt so im ganzen  $2x + 1$  Lösungen, worunter es  $x + 1$  solche gibt, die einem Bilde der Figur 16 entsprechen, wobei  $Y_{zb}$  auf  $(ba)$  und  $bc$  zusammen  $x$  Nullpunkte hat, die weiteren  $x$  Lösungen entsprechen einem Bild der Figur 17, wobei  $x + 1$  Nullpunkte des  $Y_{zb}$  auf  $ab$  und  $bc$  vorhanden sind. Bei weiterem Wachsen der Parameter ist (6) noch unendlich oft erfüllt, es ergibt sich jedoch keine Lösung des Problems mehr. In den Fünfecken fallen immer die Punkte  $e_1$  und  $c$  aufeinander (Figur 18). Das gleiche beim Verkleinern der Parameter von jenen Werte ausgehend, für welche zum ersten Male (6) bestand. In den entsprechenden Fünfecken fallen die Punkte  $e_1$  und  $a$  aufeinander. Auch, wenn  $\beta = 0$  ist, ergeben sich genau  $2x + 1$  Lösungen. Die Behandlung stösst auf keine besondere Schwierigkeit und ist der Weg der bisherige.

In Falle jedoch, wenn  $-a + \beta + \gamma > 1$  oder  $a + \beta - \gamma > 1$  ist, konnte ich nichts vollständiges nachweisen. Eine Lösung existiert bei jedem  $x$  sicher immer.

Um ein einmaliges Bild der ganzen  $x$ -Ebene zu erhalten, spiegele man das Fünfeck über die Seite  $ae$  oder  $ce$ . Man bekommt so ein zweifach zusammenhängendes Bild, ein Viereck, aus dem ein Zweieck herausgeschnitten ist. Hat  $Y_{e_2}$  ausser in  $e_1$  noch weitere  $x$  Nullpunkte auf  $e_2e_1$ , so beschreibt  $\tau a$ , wenn  $x$  von  $e_2$  bis  $e_1$  bewegt wird, den Kreis  $\kappa$  (Figur 5)  $x$ -mal und noch dazu einen Bogen  $e_2e_1$ . Es lässt sich leicht erkennen, dass beim Spiegeln über  $ae_2$  das Bild, das der vollen Ebene entspricht, sich in unmittelbarer Nähe des Zweieckes durch  $2x + 1$  Blätter windet. Wird diese Anzahl als Oszillationzahl eingeführt, so stimmt die Zahl auch mit der Anzahl  $2x + 1$  von Lösungen, die man bekommt, wenn man dem  $Y_{zb}$  auf  $e_2e_1$  genau  $x$  Nullpunkte vorschreibt.

## VSEBINA

Kleinovi teoremi v teoriji linearnih diferencialnih enačb . . . . .	5—45
Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen . . . . .	45—65



## Publikacije akademije

### I. V filozofsko = filološko = historičnem razredu:

- Korespondenca pomembnih Slovencev I.: **Kidrič** France, Zoisova korespondenca 1808—1809. Ljubljana 1939 . . . L 30'40
- Viri za zgodovino Slovencev. Knjiga prva: Srednjeveški urbarji za Slovenijo. Zvezek prvi: Urbarji salcburske nadškofije. Objavil **Kos** Milko, Ljubljana 1939 . . . L 30'40
- Euchologium Sinaiticum. Starocerkenoslovanski glagolski spomenik. Izdajo priredil **Nahtigal** Rajko. I. del: Fotografski posnetek, Ljubljana 1941 . . . . . L 53'20  
za inozemstvo L 76'—
- Veber** France: Vprašanje stvarnosti. Dejstva in analize. Ljubljana 1939 . . . . . L 47'—

### II. V pravnem razredu:

- Pravni spomeniki slovenskega naroda. Knjiga prva: **Dolenc** Metod, „Gorske bukve“ v izvirniku, prevodih in priredbah. Ljubljana 1940 . . . . . L 30'40
- Razprave, Zvezek prvi: Ljubljana 1941 . . . . . L 30'40

### III. V matematično = prirodoslovnem razredu:

- Razprave. Knjiga prva. Ljubljana 1940 . . . . . L 19'—
- Prirodoslovne razprave. Knjiga IV. Tome IV. Ljubljana 1940 (v svetovnih jezikih) . . . . . L 19'—

### Cena je nižana:

- a) za naročnike publikacij vseh razredov za 33'3 %;
- b) za naročnike publikacij posameznega razreda za 25 %;
- c) za slušatelje univerze za 20 %.