Zb.gozdarstva in lesarstva, L.16, št. 1, s.109-166, Ljubljana 1978

UDK: 634.0.389.16:634.0.525.1

DOLŽINA MORSKE MILJE V ZVEZI Z OBLIKO IN DIMENZIJAMI ZEMLJE

Prof.dr. Branko VAŘACHA, dipl.inž. geodezije
Biotehniška fakulteta, VTOZD za gozdarstvo

61000 LJUBLJANA, Večna pot 83, YU

Sinopsis

Dolžina morske milje v zvezi z obliko in dimenzijami Zemlje

Študija obravnava raznolikost interpretacije definicije morske milje kot srednje meridianske minute in njej pripadajoče dolžine. Po matematičnih utemeljitvah pojma poprečnega polmera zemeljskega elipsoida sledi nedvoumna in enolična definicija za dolžino morske milje kot konstante:

Morska milja je dolžina ene minute na Zemlji kot krogli, katere polmer je geometrijska sredina iz elipsoidovih polosi:

$$nm = \sqrt[3]{a.a.b} \cdot \frac{1'}{\rho'} = 1853,26 \text{ m} .$$

Vrednosti parametrov zemeljskega elipsoida kot konvencionalni konstanti:

$$a = 6\ 378\ 160 \text{ m} \quad \text{in} \quad f = 1:298,25.$$

Synopsis

The length of sea-mile correlated with the shape and dimensions of the Earth

The study deals with the diversity of the interpretation of the sea-mile defined as the medium meridian minute and the coresponding length.

From the mathematical argumentations of the conception of the half-diameter of the Earth ellipsoid, the unequivocal and uniform definition of the sea-mile lengh as a constant is as follows:

A sea-mile is the length of one minute on the Earth as a sphere the half-diameter of which is the geometric average of ellipsoid half-axes:

$$nm = \sqrt[3]{a.a.b} \cdot \frac{1'}{\rho'} = 1853,26 \text{ m}.$$

The parameter values of the Earth ellipsoid as conventional constants are:

$$a = 6\,378\,160 \text{ m} \quad \text{and} \quad f = 1:298,25.$$

VSEBINA

1. U V O D

Vzpodbudo, da napišem študijo „Dolžina morske milje v zvezi z obliko in dimenzijami Zemlje" mi je dala 1.1968 v Ljubljani objavljena disertacija prof.dr. A. Podpečana „Prilog proučavanju deformacija i kartometrijskih problema na geografskim i tematskim kartama" [1].

V tem znanstvenem delu stoji na straneh 82 - 84 v poglavju 4. „Teorija ortodrome i loksodrome" tekst pod c) „O dužini morske milje", ki ga citiram:

„c) O dužini morske milje

Pomorci, a vrlo često i avijatičari, upotrebljavaju kod mjerenja odstojanja između pristaništa i aerodroma morsku (nautičku) milju (Nm). Međutim, o definiciji i dužini morske milje postoje u našoj stručnoj geodetskoj i kartografskoj literaturi kao i u nekim stranim djelima zastareli podaci, prema kojima je morska milja definirana kao dužina jedne minute ekvatorskog kružnog luka sa dužinom 1855,110 m. Radi boljeg razumijevanja prikazat ćemo historijski razvoj dužine morske milje.

Historija morske milje u tijesnoj je vezi sa određivanjem elemenata Zemlje. U rimsko doba, kao i u srednjem vijeku, pomorci su upotrebljavali kod plovidbe staru rimsku milju (1 miliaria = 1000 koraka od dva zakoračaja). Prema Wagneru (zur Geschichte der Seemeile, Annalen der Hydrographie u. Maritimen Meteorologie 1913) iznosi rimska morska milja 1480 m. I Kristof Kolumbo je upotrebljavao ovu milju na svojim putovanjima. Ipak se pokazalo na osnovu tačnih kartometrijskih mjerenja da je na starim pomorskim kartama (portolani) Sredozemlja morska milja bila kraća i da je iznosila oko 1230 m.

Pomorci su dužinu morske milje više puta mijenjali. Najstarija engleska morska milja predstavljala je odnos do užeta za mjerenje brzina (Logleine) kod plovidbe, kod čega je bila vremenska mjera izjednačena sa dužinskom mjerom takozvanom dužinom čvora. Richard Norwood je 1636.g. ustanovio da iznosi dužina jednog čvora 6120 engleskih stopa = 1865,35 m. Detaljni podaci nalaze se u drugoj knjizi Eckerta (4) str. 51 - 55.

U 17., 18. i 19. stoljeću bile su u upotrebi i takozvane velike morske milje i to:

španjolska	"legua maritima"	5573 m,
francuska	"lieu marine"	5556 m,
engleska	"See league"	5556 m,
i njemačka	"Seemeile"	7420 m.

Njemačka velika morska milja iznosila je $^1/15$ luka za 1° na ekvatoru. Kasnije su Nijemci izračunali da iznosi obična morska milja 1855,11 m i da je to dužina luka od 1' na ekvatoru.

U 18. stoljeću kada su Francuzi uveli elemente spljoštenog elipsoida u astronomska, geodetska i nautička računanja, u navigaciji je bilo prvi put uzeto da je morska milja dužina srednje meridijanske minute Zemljinog elipsoida. Ovo potvrđuje i Pierre Bouguer (Nouveau traité de navigation, Paris, 1753) koji u svima računanjima upotrebljava za morsku milju vrijednost dužine za jednu srednju meridijansku minutu. Ova dužina iznosi u metarskom sistemu 1852 m. Nijemci su usvojili ovu dužinu za morsku milju tek 1904 g. Ova vrijednost za dužinu jedne morske milje slaže se odlično sa Besselovim elementima Zemljinog elipsoida.

Dužina meridijanskog kvadranta po Besselovim elementima iznosi 10 000 855,76 m; 1° = 10 000 855,76 : 90 = 111 120,62 m. Jedna minuta iznosi dakle 111 120,62 : 60 = 1852,01 = 1852 m, a to je dužina morske milje. Ovu vrijednost za dužinu morske milje upotrebljavaju Francuska, Njemačka, SSSR, Italija, Švedska, Norveška, Nizozemska, Jugoslavija i još neke pomorske zemlje.

Međutim, u Americi i u Engleskoj upotrebljavaju istu definiciju za dužinu morske milje, ali nekoliko promijenjenu vrijednost koja proizlazi iz Clarkovih elemenata dimenzija Zemljinog elipsoida iz 1866.g.

$a = 6\,378\,206$ m

$b = 6\,356\,584$ m

Spljoštenost 1 : 295,0

$$R = \frac{2a + b}{3} = 6\,370\,998{,}7 \text{ m};$$

$$2R\pi = 40\,030\,131{,}6 \text{ m}, \quad 1' = 1853{,}25 \text{ m} = \text{morska milja}$$

U SAD iznosi 1 morska milja u njihovu sistemu 6080,27 feet = 1853,25 m = 1,151594 kopnene milje. Europska m. milja je za 4 fita kraća od američke tj. 6076,27 feet = 1852 m.

Ovu vrijednost za dužinu morske milje upotrebljava od 1892. g. i Japan.

Međutim, morsku (nautičku) milju ne treba zamjenjivati sa engleskom kopnenom (statutnom) miljom, koja iznosi 1609,347 m.

Prema navedenom vidimo da postoje u svijetu dvije vrijednosti morske milje 1852 i 1853,25 m. U interesu jedinstvenog mjerenja i izražavanja dužina u pomorstvu, avijaciji i kartografiji bilo bi poželjno da se usvoji jedinstvena mjera za morsku milju. Ovdje treba primijetiti da je elementima Zemljinog elipsoida po Krasovskem vrlo blizu (1853,28 m) američka dužina morske milje 1853,25 m."

Konec citata!

2. PREDGOVOR

V svojem znanstvenem delu "Prilog proučavanju deformacija i kartometrijskih problema na geografskim i tematskim kartama", ki obsega 165 strani teksta in 75 strani računskih in 1o grafičnih prilog petih kartografskih projekcij s pripadajočimi ortodromskimi diagrami, se avtor seveda lahko le skromno na treh straneh dotakne problema okrog dolžine morske milje.

Avtor najprej pravilno konstatira, da obstajajo o definiciji in dolžini morske milje tako v naši kot tudi v tuji literaturi zastareli podatki in na koncu navaja, da imamo na svetu dve vrednosti morske milje 1852 m in 1853,25m. Dalje apelira avtor, da bi bilo v interesu enotnega merjenja zaželeno, da se osvoji enotna mera za morsko miljo ter pripominja, da je elementom Zemeljskega elipsoida po Krasovskem zelo blizu (1853,28 m) ameriška dolžina morske milje 1853,25 m.

Predaleč bi nas zavedlo, če bi citiral posamezne definicije in pripadajoče dolžine morske milje, pa navajam v podkrepitev neenotnosti informacij kratko samo nekaj domačih in tujih virov iz slovarjev, leksikonov in enciklopedij:

Splošni tehniški slovar I.del; Ljubljana 1962, str. 425;

Leksikon Cankarjeve založbe; Ljubljana 1973, str. 592;

Slovar slovenskega knjižnega jezika; Ljubljana 1975, str.778 in 1o24;

Webster's New Dictionary; New York 1954, str. 978;

WEBSTER'S THIRD NEW INTERNACIONAL DICTIONARY; USA 1971, str. 15o8.

Citiram le iz Brockhausove enciklopedije, ki daje ponovno osnovo za skupno začetno izhodišče študije:

BROCKHAUS ENZYKLOPÄDIE, Wiesbaden 1971:
XII Band, S. 351 - Meile (historisch)
XII zvezek, str. 351 obravnava miljo zgodovinsko;
XVII Band, S. 234 - Seemeile, nautische Meile, Abk. sm, Schiffahrt: gebräuchliches Mass für Entfernungen. Die internationale Seemeile beträgt 1,852 km (mittlere Meridianminute), die englische nautische Meile (nautical mile) 1,853 km;

XVII zvezek, str. 234 v prevodu: morska milja, navtična milja, kratica sm, v pomorstvu uporabljana mera za razdalje. Mednarodna morska milja znaša 1,852 km (srednja meridianska minuta), angleška navtična milja (nautical mile) 1,853 km.

Ta problem okrog dolžine morske milje (nm), ki je interesanten tako zgodovinsko kakor tudi znanstveno, bom skušal osvetliti z več strani.

3. PRINCIPI KONVENCIONALNOSTI DOLOČANJA KONSTANT

V želji, da bi bila dolžina morske milje izražena kot „konstanta", je bila na zasedanju Mednarodne hidrografske konference l. 1928 v Monacu ([2], str. 421) na osnovi predloga Bureau des Longitudes sprejeta odločitev o dolžini morske milje kot dolžinske enote v pomorstvu in zrakoplovstvu:

morska milja (international nautical mile) = 1 n mile = 1852 m.

K tej konvenciji so pristopile kasneje tudi tiste države, ki so se oslanjale na anglo-ameriški merski sistem, pa so jo tudi ZDA l.1954 usvojile s sledečim tekstom:

The International Nautical Mile (1852 m) shall be used within the Departement of Commerce as the standard length of the nautical mile. This directive is effective 1 July 1954.

Pri takih in sličnih odločitvah je treba upoštevati gotove kriterije. V idealnem slučaju naj bi konstante na sploh zadovoljile sledečim trem pogojem:

konsistenci

kompatibilnosti in

kontinuiteti.

Konsistenca zahteva, da so teoretični odnosi za sprejete številčne vrednosti strogo izpolnjeni. Definicija mora biti nedvoumna.

Kompatibilnost zahteva, da usvojene konstante soglašajo z opazovanji oziroma podatki različnih vrst. Pri raznolikosti uporabljanih metod pa nastopajo v končnih rezultatih stalne diskrepance. Vzroki leže v sistematičnih pogreških, ki ostanejo lahko dalj časa nepojasnjeni.

Kontinuiteta izraža zahtevo, da bi usvojene konstante kot merske enote veljale čim dlje in jih ne bi bilo treba češče menjavati.

Iz definiranih izhodišč spoznamo, da je težko zadovoljiti vsem trem pogojem hkrati, ker si v bistvu nasprotujejo. Zahteva po kompatibilnosti pride kaj lahko v nasprotje s konsistenco in kontinuiteto.

Zato zahtevata tako definicija kakor tudi dolžina morske milje globljo analizo.

Uvodna razglabljanja o tem v zvezi sem prikazal v referatu: „Die Länge der Seemeile in Verbindung mit der Figur der Erde" na geofizikalnem seminarju dne 26. 11. 1974 na Freie Universität Berlin, Fachrichtung Geophysik.

4. DEFINICIJA MORSKE MILJE

Dokler se je smatralo, da ima Zemlja obliko krogle, je še tudi veljala definicija, da je morska milja 60. del ene ekvatorialne stopinje ali bolje rečeno dolžina ene ekvatorialne minute.

Skratka: morska milja je dolžina ene minute po velikem krogu Zemlje kot krogle.

Na Zemlji kot krogli merimo namreč razdaljo med dvema krajema sferično po loku velikega kroga s centrom v središču Zemlje. Veliki krog ima največji možni polmer in s tem najmanjšo ukrivljenost, pa predstavlja tako njegov lok najkrajšo razdaljo imenovano ortodroma. Dolžina ortodrome izražena v minutah pomeni isto toliko morskih milj.

Spoznanje pa, da Zemlja nima oblike krogle, ampak je zaradi vrtenja na polih sploščen elipsoid, je dalo prosto pot teoretikom. Definicija morske milje je ostala jasno vezana na eno minuto, kajti le-ta je za pomorščaka praktika interesantna. Vprašanje je bilo le, na kateri obseg Zemlje naj se nanaša:

na ekvator kot krog ali

meridian kot elipso,

ali pa bi bilo treba dati prednost velikemu krogu tiste krogle, ki ima z zemeljskim elipsoidom neke gotove skupne točke.

Tako je seveda dolžina morske milje vezana izključno na velikost določenega polmera Zemlje.

Pierre Bouguer, član znane ekspedicije francoske akademije v Peru, na področje Kordiljer pri glavnem mestu Quito današnjega Ekvadorja , je kot prvi v svojem delu "Nouveau Traité de Navigation" iz l. 1753 opredelil dolžino morske milje na 950 toises ([3], odstavek 31, str. 73). Pri tem je številčno izhajal iz podatkov obeh stopinjskih merjenj ob ekvatorju v Peruju 1735 - 44 in ob severnem tečajniku v Laponski 1736 - 37.

Na podlagi svojih lastnih merjenj je ugotovil, da znaša dolžina ene meridianske stopinje ob ekvatorju 56 748 toises ([3], odstavek 28, str. 72); iz merjenj v Laponski, ki jih je vodil

Maupertuis pa sledi 57 422 toises ([3], odstavek 29, str. 72) kot dolžina ene meridianske stopinje ob polarnem tečajniku. Tako je bilo z merjenjem dokazano, da Zemlja nima oblike krogle, ampak je na tečajih sploščen elipsoid. Zemlja je ob ekvatorju bolj ukrivljena, pa je dolžina ene meridianske stopinje tam najkrajša; nasprotno pa je Zemlja proti poloma vedno bolj ploska, pa so dolžine meridianskih stopinj vedno daljše.

P. Bouguer zastopa mišljenje, da je kljub različno dolgim meridianskim stopinjam možno v pomorstvu Zemljo še nadalje smatrati kot kroglo. Pri tem je treba paziti, da izbrana dolžina meridianske stopinje ne bo niti predolga, niti prekratka, ampak taka, ki se drži sredine. Na osnovi tega se je moč ustaviti pri tisti, ki je blizu 45° geografske širine in je določena na 57 ooo toises ([3], odstavek 3o, str. 73).

Interesantnosti radi prilagam kot dukumentacijo fotokopijo obeh strani 72 in 73 iz omenjenega dela z odstavki: 28, 29, 3o in 31.

Če tako smiselno izbrano dolžino ene meridianske stopinje podelimo s številom minut, dobimo dolžino morske milje:

$$\text{nm} = \frac{57\ 000\ \text{toises}}{60} = 950\ \text{toises} \quad (= 1851{,}58\ \text{m})$$

Podatka v metrih seveda pri P. Bouguer-u ni, pa ga navajam samo zaradi primerjave. Meterska vrednost je izračunana na podlagi perujskega toise ([4], str. 25 - 27):

1 perujski toise = 1,949 o27 957 m.

Na ta način je bila pred dva in četrt stoletja indirektno definirana morska milja kot dolžina srednje meridianske minute.

Pobudo za najvažnejšo stopinjsko meritev je dala francoska narodna skupščina l. 1791 z željo, da se pride do nove, na dimenzije Zemlje vezane mere za dolžinsko enoto. Meritve pariškega meridiana - izvajala sta jih Delambre in Mechain 1792-98 - kombinirane s perujskim so dale l.18oo dolžino meridianskega kvadranta tega elipsoida:

$$Q = 5\ 130\ 740\ \text{t} = 10\ 000\ 000\ \text{m}.$$

Fig. 37. & 38. » voir au Zénith lorsqu'on alloit à une des deux extrémités.
» Elle pouvoit donc servir comme de point fixe ; & il n'é-
» toit question que de mesurer par les moyens dont j'ai déja
» dit un mot, combien elle étoit éloignée de chaque Zé-
» nith. Ajoûtant ensuite les deux distances ensemble, on dé-
» couvroit la distance d'un Zénith à l'autre, ou la grandeur
» de l'arc céleste qui répondoit au-dessus des 176892 toi-
» ses. Si je m'en rapporte à mes propres observations, l'arc
» se trouva de 3 ^{d}. 7 ^{m}. 2'', & si on cherche à proportion la
» longueur du degré, il est de 56748 toises.

29. » Mais ce qui est bien digne d'attention, les degrez
» terrestres ne se sont pas trouvés de même longueur dans
» les autres Régions où on a fait des opérations semblables,
» & la différence est trop grande pour qu'on puisse l'attribuer
» aux erreurs inévitables des observations. Le degré sous le
» cercle polaire s'est trouvé de 57422 toises. Ainsi il faut
» absolument que la Terre ne soit pas parfaitement ronde,
» & qu'elle soit plus haute vers l'Equateur que vers les Po-
» les, conformément à ce que nous indiquent d'autres expé-
» riences dont il n'est pas nécessaire de parler ici. La cour-
» bure de la Terre est plus subite vers l'Equateur dans le
» sens Nord & Sud ; puisque les degrez y sont plus petits :
» & la Terre est au contraire plus plate vers les Poles, puis-
» que les degrez y sont plus grands. On croyoit que l'Equa-
» teur n'étoit distingué que par la plus grande rapidité du
» mouvement qui se fait en 24 heures ; mais il est marqué
» d'une maniére bien plus réelle par une élévation con-
» tinue, qui doit être d'environ 6 lieues marines & de-
» mie, tout autour de la Terre, & par-tout à une égale
» distance des deux Poles. On donne le nom d'*Axe* à la
» ligne droite tirée d'un Pole à l'autre par l'intérieur de la
» Terre ; & cet Axe est plus court que les diamétres de
» l'Equateur d'environ une 179^{e} partie.

30. » Au reste cette différence n'est pas encore assez gran-
» de, pour qu'on puisse l'appercevoir dans les Eclipses de
» Lune, lorsqu'on examine sur cette Planete la figure circu-

laire de l'ombre de notre Globe. On peut auſſi ſe diſpen- « Fig. 37. & 38.
ſer d'y avoir égard dans la Marine, & continuer à conſi- « dérer la Terre comme un Globe parfait. Il eſt ſeulement « à propos, puiſque les degrez du Méridien ſont de gran- « deurs un peu différentes, de leur attribuer, lorſqu'on les « ſuppoſe égaux, non pas la plus grande longueur qu'ils « ont vers les Poles, ni la plus petite qu'ils ont vers l'E- « quateur; mais celle qui tient un milieu. On peut s'arrê- « ter à celle qu'ils ont vers le 45^{me} degré de latitude, & « les fixer à 57000 toiſes. »

31. Cela ſuppoſé, nous pouvons régler aiſément la longueur de la lieue marine, en la rendant une certaine partie du degré. Il vaut incomparablement mieux prendre ce parti, que de donner d'abord au hazard une certaine grandeur à la lieue, & voir enſuite combien elle eſt contenue de fois dans les 57000 toiſes du degré. On veut en France que le degré contienne exactement 20 lieues. Ainſi nous n'avons qu'à diviſer 57000 toiſes par 20, & nous aurons 2850 toiſes du Châtelet de Paris pour la lieue marine françoiſe. Cette lieue eſt plus grande que la plûpart de celles dont on ſe ſert dans les différentes Provinces du Royaume, & elle eſt auſſi plus longue que la lieue horaire que fait ordinairement un homme de pied pendant une heure. Les Hollandois mettent 15 lieues dans le degré terreſtre; ainſi chacune de ces derniéres lieues ſera de 3800 toiſes. Les Italiens ſe ſervent de milles, qui étoient cenſés de 1000 pas géométriques ou pas doubles, qui ſont chacun de 5 pieds; & ils ſuppoſoient que 60 de ces milles faiſoient un degré. Cette maniére d'évaluer les diſtances eſt fort commode: Le mille d'Italie doit valoir une minute de degré terreſtre, ou un tiers de nos lieues marines; mais il faut donc néceſſairement en changer la longueur, & l'augmenter d'environ une 7^{me} partie. En effet 1000 pas géométriques, ou 5000 pieds de Roy ne répondent qu'à 833 toiſes un tiers; au lieu qu'il faut donner 950 toiſes au mille, pour le rendre égal à nos tiers de lieue ou

S tem smo prišli do sledeče direktne definicije, da je morska milja srednja dolžina meridianske minute izračunana kot 54oo. del zemeljskega kvadranta:

$$nm = \frac{Q}{5400} = \frac{10\ 000\ 000\ m}{90 \times 60} = 1851,\dot{8}\dot{5}\ m$$

Že dosedanje razglabljanje nas prepričuje, da obstoji teoretično več možnosti definicije morske milje kot minutne milje, če sta a in b polosi zemeljskega elipsoida in f njegova sploščenost. Ravno tako pa se z ozirom na razlikujoče se parametre zemeljskega elipsoida menja dolžina te morske milje. Oboje je zgodovinsko pogojeno in izhaja iz pomorske literature posameznih narodov.

Ob preverjanju podatkov sem naletel na sledečo dezinformacijo, ki je toliko občutljivejša, ker se ponavlja tudi v najnovejši literaturi. Večina avtorjev, med njimi Jermolaev G. G. ([5], str. 7) in Stange L. ([6], str. 192), ki citirajo parametre tega Delambrovega elipsoida, navaja za veliko polos a dolžino 6 375 653 m, kar pripelje ob sicer pravilnem podatku za sploščenost f = 1 : 334 k prekratki dolžini zemeljskega kvadranta Q = 9 999 867 m. Delambre pa je postavil definicijo metra kot desetmilijonskega dela zemeljskega kvadranta.

Na to je opozoril l. 1957 že Strasser G. v ([7], str. 26). Delambre izhaja namreč iz logaritmov za veliko polos a (log a.... 6.8o4 53o 5o7) in za malo polos b (log b ..... 6.8o3 228 274). Z antilogaritmiranjem in nadaljnjim računanjem z žepnim kalkulatorjem HP 45 sledi:

a = 6 375 738,656 m,

b = 6 356 649,638 m, kar da f = 1 : 334,o.

S temi vrednostmi za a in b sledi po sledeči približni formuli iz matematične enciklopedije ([8], str. 495) dovolj natančno dolžina zemeljskega kvadranta:

$$Q = \left[3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right] \frac{\pi}{4} = 10\ 000\ 000{,}00\ m.$$

Nadomestimo li namreč v tej približni formuli

aritmetično sredino: $\frac{a + b}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 - e^2}\right)$ in

geometrijsko sredino: $\sqrt{ab} = a\sqrt[4]{1 - e^2}$

z izrazoma desno od enačaja in jih razvijemo v potenčno vrsto, dobimo kot končni rezultat vrsto, ki se od stroge izpeljave razlikuje šele v členu z e^8 za tako majhen iznos, da ga pri praktičnem računanju lahko zanemarimo.

Da je pri elipsi

$$b = a\,(1 - f) = a\sqrt{1 - e^2}$$

in

$$e < 1\,,$$

je razvidno že na sledeči strani.

5. TEORETIČNE MOŽNOSTI ZA DEFINICIJO FORME ZEMLJE

Krogla je določena s podatkom ene številčne vrednosti za njen polmer R.

Zemeljski elipsoid pa je popolnoma določen z dvema podatkoma: velika polos a in sploščenost f.

Iz teh dveh parametrov se dajo izvesti vsi ostali elementi elipsoida, med njimi mala polos b in prva numerična ekcentriciteta e, od slej kratko imenovana ekscentriciteta.

Ker je sploščenost izražena z $\quad f = \dfrac{a - b}{a}$,

sledi iz tega $\quad af = a - b$,

oziroma $\quad b = a\,(1 - f)$

Ker je ekcentriciteta izražena z $\quad e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$

in je $\dfrac{b}{a} = 1 - f$, oziroma $\dfrac{b^2}{a^2} = (1 - f)^2$,

sledi $e^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2} = 1 - (1 - f)^2$,

oziroma $\quad 1 - e^2 = (1 - f)^2$

Obe končni formuli $\quad b = a\,(1 - f)$ in

$$1 - e^2 = (1 - f)^2$$

sta najbolj primerni za računanje z žepnim kalkulatorjem HP 45, ker izhajamo iz danih podatkov, pa se s tem zmanjšuje pogrešek zaokroževanja.

Iz kartografske literature je znan med ostalimi še izraz za izračun meridianskega krivinskega polmera:

$$M = \frac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}$$

I. Morska milja vezana direktno na elipsoid

A) Morska milja je 54oo. del dolžine meridianskega kvadranta:

$$nm = \frac{Q}{54oo} = \frac{a\,(1 - e^2)\; A \cdot \frac{9o^o}{\rho^o}}{54oo} =$$

$$= \frac{a\,(1 - e^2)\; A .\; 9o \times 6o'}{54oo\; \rho'} = a\,(1 - e^2)\; A \cdot \frac{1'}{\rho'} =$$

$$= R_Q \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

V tem izrazu je koeficient A iz razrešitve eliptičnega integrala dovolj natančno ([12], str. 35):

$$A = 1 + \frac{3}{4}\, e^2 + \frac{45}{64}\, e^4 + \frac{175}{256}\, e^6 + \frac{11\;o25}{16\;384}\, e^8 + \ldots$$

R_Q je tej dolžini minutne milje pripadajoči polmer.

B) Morska milja je meridianska minuta na 45° geografske širine:

$$nm = M_{45^o} \cdot \frac{1'}{\rho'} = \frac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - \frac{e^2}{2})^3}} \cdot \frac{1'}{\rho'} = R_M \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

R_M je tej dolžini minutne milje pripadajoči polmer.

C) Morska milja je dolžina meridianske minute v odvisnosti od geografske širine:

$$nm = M \cdot \frac{1'}{\rho'} = \frac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \cdot \frac{1'}{\rho'} \quad ,$$

kjer zavzame φ vse vrednosti od o° do 9o°.
Njene skrajne vrednosti so :

na ekvatorju, kjer je φ = o°:

$$nm = a\,(1 - e^2) \cdot \frac{1'}{\rho'} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1'}{\rho'} = R_E \cdot \frac{1'}{\rho'} \quad ;$$

na polih, kjer je $\varphi = 90^\circ$:

$$nm = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{1'}{\rho'} = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{1'}{\rho'} = R_P \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

D) Morska milja je dolžina ene minute s polmerom ekvatorja:

$$nm = a \cdot \frac{1'}{\rho'} = R_a \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

Konstantni faktor ρ je r a d i a n in ima vrednost :

$$\rho' = 3437{,}'746\ 771$$

II. Morska milja vezana indirektno preko krogle na elipsoid

E) Morska milja je dolžina tiste minute, katere polmer Zemlje kot krogle je enak aritmetični sredini iz obeh polosi meridianske elipse ([9], str. 4o6):

$$nm = \frac{a + b}{2} \cdot \frac{1'}{\rho'} = R_e \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

F) Morska milja je dolžina tiste minute, katere polmer Zemlje kot krogle je enak aritmetični sredini iz treh polosi zemeljskega elipsoida:

$$nm = \frac{a + a + b}{3} \cdot \frac{1'}{\rho'} = R_m \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

G) Morska milja je dolžina tiste minute, katere polmer Zemlje odgovarja krogli enake površine z elipsoidom:

$$nm = a\left(1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{17}{360} e^4 - \frac{67}{3024} e^6 - \ldots\right)\frac{1'}{\rho'} =$$

$$= R_f \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

Izraz za odgovarjajoči polmer R_f je vzet iz Jordana ([1o], str. 99).

H) Morska milja je dolžina tiste minute, katere polmer Zemlje odgovarja krogli enake prostornine z elipsoidom:

$$nm = \sqrt[3]{a \cdot a \cdot b} \cdot \frac{1'}{\rho'} = R_k \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

6. IZBOR PARAMETROV ZEMELJSKEGA ELIPSOIDA

Kar se tiče številčnih vrednosti morske milje, je jasno, da zavisijo od parametrov zemeljskega elipsoida. Teh pa je po Strasser-ju ([7], str. 86-88) iz l.1957 publiciranih 1o7 in do danes še nekaj več.

Od vseh teh si bom izbral le tistih nekaj najvažnejših elipsoidov, ki so globoko posegli v mednarodno astrogeodetsko in geofizikalno dejavnost.

Iz posebnih nagibov moram na tem mestu omeniti našega rojaka Ruđera J. Boškovića, ki je v svojem delu „Philosophia Recentoris ...", zv.2, Rim 176o, str. 4o6-426 kot prvi uporabil za izračun sploščenosti več kot dvoje stopinjskih merjenj, med njimi tudi svoje lastno merjenje med Rimom in Riminijem. Pri teh petih podatkih je uporabil svojevrstno metodo izravnavanja, ko se je odločil in vzel za najverjetnejšo vrednost tisto, za katero je vsota vseh popravkov enaka nič, njihova absolutna vsota (brez ozira na predznak) pa minimum ([7], str. 25 in 26).

Med prvimi si je F. W. Bessel zastavil nalogo iz 1o-tih stopinjskih merjenj s skupno amplitudo 5o° izračunati po metodi najmanjših kvadratov izravnane elemente zemeljskega elipsoida. Razen perujske in obeh vzhodno - indijskih stopinjskih merjenj, je bilo ostalih 7 evropskih. Delo je objavil v Astr. Nachr., zv. XIV; Altona 1837, str. 333-346 pod naslovom „Bestimmung der Achsen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht."

Ko ga je C. F. Gauss opozoril na grobi pogrešek v izračunu francoskega stopinjskega merjenja, je Bessel l. 1841 ponovno izračunal elemente Zemlje in jih objavil v svojem delu „Über einen Fehler in der Berechnung der francösischen Gradmessung und seinen Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde", ki je izšlo v: Astr. Nachr., zv. XIX; Altona 1842, str. 97-116.

Na podlagi parametrov a in f iz ([7], str. 39) navajam pod tekočo številko 1 še pripadajoča podatka za b in Q.

1.) Bessel, 1841: a = 6 377 397,155 m
f = 1 : (299,152 8128 ± 4,7)
b = 6 356 078,963 m
Q = 1o 000 855,77 m ± 498 m

Besselov elipsoid je dosegel mednarodno veljavo, saj na njem računajo oziroma so računali: Albanija, Avstrija, Grčija, Indonezija, Italija do 194o, Jugoslavija, Nemčija, Nizozemska, Norveška, Portugalska do 1926, Švedska, Švica, ZDA do 188o in do l. 1946: Češkoslovaška, Poljska, Estonska, Litva, Letonska, Madžarska in Sovjetska zveza do 1942.

A. R. Clarke je ponovil računanja iz raznih stopinjskih merjenj kontinentov: Evrope, Azije, Afrike in Amerike s skupno amplitudo cca 75° in prišel po ([7], str. 46) do sledečih vrednosti:

2.) Clarke, 1866: a = 6 378 2o6,4 m
f = 1 : 294,978 6982
b = 6 356 583,8 m
Q = 1o oo1 888,o4 m

Natančnost v meni dosegljivi literaturi ni navedena!

Te elemente uporabljajo: ZDA od 188o, Kanada, današnji Zaïre, Egipt in Filipini.

Teh dvoje podatkov poleg dodatnih 43 kaže, kako je starejša geodezija iskala s pomočjo stopinjskih merjenj aproksimacijo za srednji zemeljski elipsoid kot matematično obliko Zemlje. To nalogo je bilo moč rešiti čisto geometrično s koti in dolžinami.

Medtem pa se je pokazalo, da je treba pri vprašanju oblike Zemlje upoštevati tudi porazdelitev mas. V tem smislu so Ph. Fisherjevi, v „Untersuchungen über die Gestalt der Erde", Darmstadt 1868 objavljeni tehtni pomisleki proti stopinjskim merjenjem v toliko na mestu, ker nam srednji pogreški posameznih rezultatov pokažejo preveliko natančnost, elementi oblike Zemlje iz različnih stopinjskih merjenj pa prevelike diference. Odstopanja težiščnic ne smemo zaradi njihovega geofizikalnega in sistematičnega karakterja obravnavati kot slučajne pogreške ([11], str. 53). Tako ni moč samo iz stopinjskih merjenj dovolj natančno izračunati sploščenosti. Njegov predlog je bil, izračunati polosi iz stopinjskih merjenj, sploščenost pa na podlagi merjenj težnosti.

G. F. Hayford je po ([7], str. 58-6o) v svojem delu „Supplementary Investigation in 19o9 of the Figur of the Earth and Isostasy", Washington 191o objavil sledeče rezultate:

$$a = 6\ 378\ 388 \text{ m} \pm 18 \text{ m}$$
$$f = 1 : (297{,}o \pm o{,}5)$$
$$b = 6\ 356\ 9o9 \text{ m}$$

Kot osnova so mu služila stopinjska merjenja z amplitudo cca 175° in celoviti podatki merjenj težnosti; vendar oboje iz ZDA. Perujsko stopinjsko merjenje je upošteval le posredno.

Tako je razumljiva težnja mednarodne geodetske in geofizikalne unije IUGG za nekim splošnim elipsoidom, veljavnim za vse kontinente. Na njenem zasedanju l.1924 v Madridu je bil Hayfordov elipsoid iz l.191o sprejet s sledečima parametroma:

3.) Internacionalni elipsoid iz leta 1924:

$$a = 6\ 378\ 388 \pm 18 \text{ m}$$
$$f = 1 : (297{,}o \pm o{,}5)$$

in iz tega izračunana

$$b = 6\ 356\ 911{,}946 \text{ m ter}$$
$$Q = 1o\ oo2\ 288{,}3o \text{ m}$$

Interesantnosti radi navajam iz N.S. Svečnikova ([12], str.4o-42) sledečo utemeljitev, pot in zaključke:

Hayfordov elipsoid, objavljen l.191o, je takega značaja, da v danem trenutku predstavlja in to najtočneje celo Zemljo. Njegova parametra imata skoraj parkrat večjo težino kot so težine vseh ostalih - do sedaj 7o objavljenih (opomba avtorja) - elipsoidov. Kljub temu, da so za osnovo služila samo merjenja enega kontinenta, je njegova uporaba v drugih državah (Argentina, Belgija, Bolgarija do 1946, Finska, Kanarski otoki, Nova Zelandija, Romunija in Turčija) dokazala, da odgovarja ravno tako uspešno tudi tam. Njegova sploščenost 1 : (297,o ± o,5) izračunana na podlagi merjenj težnosti , se razlikuje od one, ki jo je dobil Helmert l.1915 kot 1 : (296,7 ± o,6) samo za velikost manjšo od srednjega pogreška opazovanja. To je bil Helmertov zadnji znanstveni doprinos - opomba avtorja na podlagi informacije iz ([7], str.62).

Za bodoča računanja se ne bi mogla priporočiti elipsoida Bessel-a in Clarke-a, ki imata premajhno težino in sta določana na osnovi starih, maloštevilnih merjenj, katerih parametri so izračunani pod predpostavko, da so odstopanja težiščnice slučajni pogreški.

Nikakor ne bi bilo treba zaokroževati parametrov Hayfordovega elipsoida. Boljše je zadržati originalne vrednosti, za katere poznamo srednje pogreške. V ostalem, sploščenost je že okrogla vrednost, pa so jo osvojili tudi astronomi. Niso pa se astronomi strinjali z dolžino velike polosi, ki se jim je zdela predolga, pa so ostali pri svoji, od Helmerta l.19o7 v Budimpešti predlagani dolžini: a = 6 378 2oo m ([7], str.57).

Čeprav naj bi bil internacionalni elipsoid l.1924 sprejet le kot priporočilo za znanstvene obravnave in za nova triangulacijska računanja, je zanj glasovala samo 19 držav, 17 jih je bilo proti. Prisotne niso bile Avstrija, Nemčija in Sovjetska zveza.

Parametre tega internacionalnega elipsoida so prevzele: Portugalska od l.1926, Danska od l. 1928 in Italija od l.194o.

Taka odločitev IUGG je bila torej le delno sprejeta tudi s strani mednarodne astronomske unije IAU. Astronomom je bila velika polos za 188 m predolga, sploščenost pa sprejemljiva. Zato se ni treba čuditi, da se je še nadalje stremelo za čim boljšim in za vse sprejemljivim srednjim zemeljskim elipsoidom.

Tako so v Sovjetski zvezi že l.194o pod vodstvom Krasovskega izračunali in zaradi vojne vihre šele l.1942 objavili parametre tkzv. CNIIGAiK - elipsoida ([7], str. 74,75):

4.) CNIIGAiK 1942:

$$a = 6\ 378\ 245\ \mathrm{m} \pm 15\ \mathrm{m}$$
$$f = 1 : (298{,}3 \pm 0{,}4)$$
$$b = 6\ 356\ 863{,}019\ \mathrm{m}$$
$$Q = 10\ 002\ 137{,}50\ \mathrm{m}$$

Kot podlaga izračunu so služili do sedaj najobširnejši meritveni podatki SZ, ZDA in zahodne Evrope z amplitudo aca 43o° in celotni svetovni podatki iz merjenj težnosti.

Elemente tega elipsoida uporabljajo poleg SZ še od l.1946 naprej: Bolgarija, Češkoslovaška, Madžarska, Poljska in Romunija.

Rezultati dobljeni v novejšem času na podlagi obkrožanja umetnih satelitov pa so pokazali, da sta veliki polosi Hayfordovega internacionalnega in Krasovskega CNIIGAiK - elipsoida res predolgi. Tako se je kmalu pojavila zahteva po novih, boljših parametrih.

IUGG je l.1967 v Luzernu v soglasju z IAU iz l.1964 v Hamburgu

ugotovila,

da l.1924 v Madridu vpeljani internacionalni elipsoid ne predstavlja več po velikosti in obliki Zemlje z zadovoljivo natančnostjo, čeprav za tekoča računanja še ostane v veljavi, v kolikor bi bila zamenjava z boljšimi nesmotrna in

upoštevajoč,

da so za znanstvene namene potrebne prikladnejše vrednosti, ki jih je IAU že l.1964 v posvetovanju z IUGG vpeljala in ki leže odločno bližje neki predstavi o idealnem zemeljskem elipsoidu, kakor tiste vrednosti, ki danes veljajo kot najboljše, pa

priporoča

sledeče parametre kot konvencionalne konstante:

5.) IAU 1964 - IUGG 1967 : $a = 6\ 378\ 16o$ m
$f = 1 : 298,25$

in iz tega izračunana
$b = 6\ 356\ 774,719$ m ter
$Q = 1o\ oo2\ oo1,39$ m

Ta elipsoid s konvencionalnima konstantama za veliko polos a in sploščenost f vsebuje gravimetrične, astrogeodetske in satelitske podatke avtorja W. M. Kaula iz l.1961 ([6], str. 192) in iz l.1963 ([13], str. 574), omenjan pa je tudi še v Jordanu iz l.1969 ([11], str. 566/7, 619-21, 753 in 858/9).

7. TABELARIČNI PREGLEDI

V tabeli 1 so navedene izhodiščne vrednosti parametrov vseh izbranih petih zemeljskih elipsoidov (koloni 3 in 4) in iz njih izpeljani elementi (kolone 5 do 9) potrebni za izračun dolžine morske milje.

V tabelah 2/I in 2/II so izračunane dolžine morske milje na za vseh pet elipsoidov in vseh osem teoretičnih možnosti od A do D ter od E do H s pripadajočim podatkom minutni milji odgovarjajočega polmera.

Samo iz primerjalnih in kontrolnih razlogov so v obeh tabelah 1 in 2 navedene vrednosti podane s skrajno možno natančnostjo, ki jo nudi žepni kalkulator HP 45. Za sam končni računski efekt, ko zadostuje že iz teoretičnih razlogov za dolžino morske milje podatek samo na centimeter natančno, tej dolžini pripadajoči polmer pa na meter natančno, bi bilo - kar se parametrov tiče - praktično moč računati tudi z zaokroženo metrsko vrednostjo za veliko polos a in podatkom za sploščenost na dve decimalni mesti, pa izračunana elementa za malo polos b in dolžino kvadranta Q zaokrožiti na cele metre. Temu vprid govori tudi natančnost posameznih parametrov.

Upoštevaje gornje so v tabeli 3 smotrno in pregledno podani vsi, za analizo potrebni rezultati, v petih kolonah.

DIMENZIJE ZEMELJSKIH ELIPSOIDOV

TABELA 1

Tek. št.	Elipsoid in leto	Parametri		ELEMENTI				
		a (m)	f	b (m)	$(1 - e^2)$	e^2	A	Q (m)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Bessel 1841	6 377 397,155	1:299,152 8128 0,003 342 773	6 356 078,963	0,993 325 628	0,006 674 372	1,005 037 306	10 000 855,77 10 000 855,77
2	Clarke 1866	6 378 206,4	1:294,978 6982 0,003 390 075	6 356 583,8	0,993 231 342	0,006 768 658	1,005 108 920	10 001 888,04 10 001 888,05
3	Interna- cionalni 1924	6 378 388	1 : 297,0 0,003 367 003	6 356 911,946	0,993 277 330	0,006 722 670	1,005 073 989	10 002 288,30 10 002 288,31
4	CNIIGAiK 1942	6 378 245	1 : 298,3 0,003 352 330	6 356 863,019	0,993 306 578	0,006 693 422	1,005 051774	10 002 137,50 10 002 137,50
5	IAU 1964 in IUGG 1967	6 378 160	1 : 298,25 0,003 352 892	6 356 774,719	0,993 305 458	0,006 694 542	1,005 052 625	10 002 001,39 10 002 001,39

DOLŽINE MORSKE MILJE nm VEZANE DIREKTNO NA ELIPSOID

TABELA 2 / 1

Tek. št.	Elipsoid in leto	Parametra a f	A) nm R_Q	B) nm R_M	C) nm R_E	C) nm R_P	D) nm R_a
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Bessel 1841	6,377 397,155 1:299,152 8128	1 852,010328 6 366 742,519	1 851,990 860 6 366 675,600	1 842,727 942 6 334 832,032	1 861,531 644 6 398 786,849	1 855,109 634 6 377 397,155
2	Clarke 1866	6 378 206,4 1:294,978 6982	1 852,201 489 6 367 399,686	1 852,181 465 6 367 330,851	1 842,786 838 6 335 034,502	1 861,656 189 6 399 902,552	1 855,345 034 6 378 206,4
3	Internacio-nalni 1924	6 378 388 1 : 297,0	1 852,275 611 6 367 654,501	1 852,255 858 6 367 586,595	1 842,924 631 6 335 508,202	1 861,666 094 6 399 936,606	1 855,397 859 6 378 388
4	CNIIGAiK 1942	6 378 245 1 : 298,3	1 852,247 685 6 367 558,497	1 852,228 104 6 367 491,185	1 842,937 580 6 335 552,717	1 861,596 949 6 399 698,903	1 855,556 262 6 378 245
5	IAU 1964 in IUGG 1967	6 378 160 1 : 298,25	1 852,222 480 6 367 471,850	1 852,202 893 6 367 404,514	1 842,910 942 6 335 461,141	1 861,573 191 6 399 617,227	1 855,331 537 6 378 160

DOLŽINE MORSKE MILJE n m VEZANE INDIREKTNO PREKO KROGLE NA ELIPSOID

TABELA 2 / II

Tek. št.	Elipsoid in leto	Polosi a b	Kvadrat ekscentricitete e^2	E) n m R_e	F) n m R_m	G) n m R_f	H) n m R_k
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Bessel 1841	6 377 397,155 6 356 078,963	0,006 674 372	1 852,009 029 6 366 738,060	1 853,042 564 6 370 291,091	1 853,042 104 6 370 289,510	1 853,040 256 6 370 283,158
2	Clarke 1866	6 378 206,4 6 356 583,8	0,006 768 658	1 852,200 154 6 367 395,100	1 853,248 447 6 370 998,867	1 853,247 974 6 370 997,241	1 853,246 074 6 370 990,707
3	Internacio-nalni 1924	6 378 388 6 356 911,946	0,006 722 670	1 852,274 294 6 367 649,975	1 853,315 482 6 371 229,316	1 853,315 016 6 371 227,712	1 853,313 141 6 371 221,266
4	CNIIGAiK 1942	6 378 245 6 356 863,019	0,006 693 422	1 852,246 379 6 367 554,010	1 853,283 007 6 371 117,673	1 853,282 544 6 371 116,083	1 853,280 686 6 371 109,694
5	IAU 1964 in IUGG 1967	6 378 160 6 356 774,719	0,006 694 542	1 852,221 174 6 367 467,360	1 853,257 961 6 371 031,573	1 853,257 498 6 371 029,982	1 853,255 640 6 371 023,592

DOLŽINE MORSKE MILJE n m
S PRIPADAJOČIMI POLMERI R_i
v metrih

TABELA 3

n m / R_i	Bessel 1841	Clarke 1866	Internacionalni 1924	CNIIGAiK 1942	IAU 1964 in IUGG 1967
	1	2	3	4	5
D) R_a	1 855,11 6 377 397	1 855,35 6 378 206	1 855,40 6 378 388	1 855,36 6 378 245	1 855,33 6 378 160
A) R_Q	1 852,01 6 366 743	1 852,20 6 367 400	1 852,28 6 367 655	1 852,25 6 367 558	1 852,22 6 367 472
B) R_M	1 851,99 6 366 676	1,852,18 6 367 331	1 852,26 6 367 587	1 852,23 6 367 491	1 852,20 6 367 405
E) R_e	1 852,01 6 366 738	1 852,20 6 367 395	1 852,27 6 367 650	1 852,25 6 367 554	1 852,22 6 367 367
F) R_m	1 853,04 6 370 291	1 853,25 6 370 999	1 853,32 6 371 229	1 853,28 6 371 118	1 853,26 6 371 032
G) R_f	1 853,04 6 370290	1 853,25 6 370 997	1 853,32 6 371 228	1 853,28 6 371 116	1 853,26 6 371 030
H) R_k	1 853,04 6 370 283	1 853,25 6 370 991	1 853,31 6 371 221	1 853,28 6 371 110	1 853,26 6 371 024
C) R_E	1 842,73 6 334 832	1 842,77 6 335 035	1 842,92 6 335 508	1 842,94 6 335 553	1 842,91 5 335 461
C) R_P	1 861,33 6 398 787	1 861,66 6 399 903	1 861,67 6 399 937	1 861,60 6 399 699	1 861,57 6 399 617

Iz tabele 3 razberemo sledečo ugotovitev:

Vsi rezultati za posamezne dolžine morske milje se dajo po velikosti sistematično grupirati v štiri skupine:

1 - Morska milja kot minuta po ekvatorju dolžine cca 1855 m (ad D);

2 - Morska milja kot srednja meridianska minuta dolžine cca 1852 m (ad A, B in E);

3 - Morska milja kot minuta na Zemlji kot krogli z nekim smiselno privzetim polmerom (R_m, R_f, R_k) dolžine cca 1853 m (ad F,G,H)

4 - Morska milja kot meridianska minuta v odvisnosti od geografske širine, katere dolžina se spreminja od cca 1843 m na ekvatorju preko cca 1852 m na srednji širini 45^o do cca 1862 m na polih.

Pri analizi rezultatov iz tabele 3 spoznamo, da za dolžino morske milje ni merodajna toliko izbira parametrov po posameznih elipsoidih kakor sistematične razlike, ki nastopijo zaradi različnih teoretičnih možnosti interpretacije njene definicije. Podobno grupiranje zasledimo tudi pri H. Wagner-ju v ([9], str, 4o9). V oči pa bode Bessel-ov elipsoid z najnižjimi vrednostmi zaradi očitno prekratke dolžine velike polosi a! Te sistematične razlike se izredno dobro pokažejo tudi v polmerih R , ki pripadajo tem štirim skupinam, če jih primerjamo z danimi dimenzijami obeh polosi v tabeli 2/II.

V skupini 1 je polmer $R_a \doteq 6378$ km za dolžino morske milje kot velika polos a očitno prevelik. Podatek Bessel-a 6377,4 km naj tukaj, kot že omenjeno, ne moti, kajti vse, po l.1841 izračunane dolžine velike polosi imajo na kilometer zaokroženo vrednost 6378 km, če so le izravnane iz več podatkov. Takih je po G. Strasser-ju v ([7], str. 93,94) nad 2/3 primerov.

V skupini 2 so dolžini morske milje pripadajoči polmeri R_Q, R_M in R_e s cca 6367 km očitno nekoliko premajhni.

V skupini 3 so dolžini morske milje pripadajoči polmeri R_m, R_f in R_k s cca 6371 km, razen pri Bessel-u seveda, kot polmeri Zemlje najverodostojnejši.

Med vsemi zavzema prvo mesto R_k, ker izpolnjuje indirektno dva Listing-ovi zahtevi ([7], str. 48,49) o idealnem zemeljskem elipsoidu:

- vsota vseh višin geoida nad in pod elipsoidom naj bo enaka, tako da imata geoid in elipsoid enako prostornino

  in

- vsota kvadratov vseh teh pozitivnih in negativnih višin geoida naj bo minimum.

J.B.Listing je v svojem delu „Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde" iz l.1873 prvič uporabil pojem geoid. Za reprezentativni polmer Zemlje kot krogle, ki ima enako prostornino s tem idealnim elipsoidom, pa je privzel na podlagi ocene kompenziranih višin geoida preko kontinentov kar okroglo število $R_k = \sqrt[3]{a.a.b} = 6\ 370\ 000$ m. Tako sledita še s pomočjo sploščenosti $f = 1 : 289{,}00$, ki jo je dobil kot srednjo vrednost iz različnih podatkov merjenj težnosti, računsko na metre zaokroženi polosi:

$$a = 6\ 377\ 365 \text{ m} \qquad b = 6\ 355\ 298 \text{ m},$$

kar naj bi po njegovem mnenju kot več ali manj idealni elipsoid reprezentiralo obliko Zemlje.

Prostornino rotacijskega elipsoida dobimo namreč tako, da si zamislimo neko kroglo z ekvatorskim polmerom a , katere prostornina je $\frac{4}{3}\pi a^3$, v smeri vrtilne osi stisnjeno za razmerje $b : a$ obeh polosi:

$$\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\frac{b}{a} = \frac{4}{3}\pi a^2 b .$$

Polmer Zemlje kot krogle, ki naj ima enako prostornino kot rotacijski elipsoid znaša

$$R_k^3 = a^2 b \qquad \text{ali} \qquad R_k = \sqrt[3]{a.a.b} .$$

In na podlagi tako zaokroženega polmera R_k sledi dolžina morske milje:

$$nm = R_k \cdot \frac{1'}{\rho'} = 6\,370\,000 \text{ m} \cdot \frac{1'}{\rho'} = 1\,852{,}96 \text{ m} \doteq 1853 \text{ m}$$

Skupina 4 naj za enkrat izpade iz te primerjave, postane pa aktualna takoj, čim izhajam iz matematičnega stališča, da pri Zemlji kot rotacijskem elipsoidu ne moremo pri izračunu dolžine morske milje upoštevati samo meridiana kot elipso, kajti nedvoumno je potem samo dvoje matematična resnica:

po ekvatorju kot krogu je dolžina morske milje 1855,.. m ,

po meridianu kot elipsi pa je srednja dolžina morske milje 1852,.. m , katere skrajni vrednosti sta pri $\varphi = 0^{\circ}$ 1842,.. m in pri $\varphi = 90^{\circ}$ 1861,.. m.

Oba, tako ekvator kot vsak poljubni meridian, predstavljata v tem izjemnem slučaju navigacijsko vzeto veliki krog in dajeta s tem tudi najkrajšo razdaljo, imenovano v navtiki ortodroma. Edino v teh dveh izjemnih slučajih imajo tudi daljša potovanja vedno en in isti azimut - imenovan kurs: po ekvatorju vzhod ali zahod, po meridianu sever ali jug. Zaradi konstantnega kursa je v teh izjemnih slučajih to tudi obenem loksodroma in tako po dolžini enaka ortodromi:

- če ležita v prvem slučaju dva kraja na ekvatorju in je za oba geografska širina $\varphi = 0^{\circ}$, geografski dolžini λ pa sta različni in je njihova diferenca $\Delta\lambda < 180^{\circ}$, oziroma
- če ležita v drugem slučaju dva kraja na meridianu, kjer je za oba λ isti, geografski širini φ pa različni in naj njihova diferenca ne preseže 180° ($\Delta\varphi \leqq 180^{\circ}$).

Pri potovanju proti vzhodu med krajema z isto geografsko širino, vendar različno od $\varphi = 0^{\circ}$, pa pot po paraleli kot loksodromi ni najkrajša, ampak je to na elipsoidu vedno sferoidni lok usločen proti poloma, katerega kurs se teoretično stalno menja, pa znaša samo na sredi poti v točki sferoidnega loka, ki je polu najbližja, 90°. Na ta način nas pelje pot od izhodišča v vedno višje geografske širine, tako da je začetni kurs na severni polobli vedno nekoliko manjši od 90°, se stalno veča, dokler ne doseže na sredi poti v točki najbližji k severnemu polu najvišjo geografsko širino s kursem 90^o in s tem tudi na tej poti eni minuti odgovarjajočo najdaljšo dolžino morske milje.

Tako se dolžina morske milje ne menja samo zaradi spremembe geografske širine po izrazu

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}},$$

ampak tudi s spremembo azimuta α ali kursa.

Po znanem Euler-jevom teoremu ([1o], str.58 in [11] , str.29)

$$\frac{1}{r_\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{M} + \frac{\sin^2\alpha}{N} = \frac{N\cos^2\alpha + M\sin^2\alpha}{MN},$$

je krivinski polmer poljubnega azimuta na elipsoidu

$$r_\alpha = \frac{MN}{M\sin^2\alpha + N\cos^2\alpha}.$$

Pri azimutu $\alpha = 0^o$ sledi

$$r_{\alpha=0^\circ} = \frac{MN}{N} = M,$$

kar odgovarja jasno meridianskemu krivinskemu polmeru kot najmanjšemu radiju;

pri azimutu $\alpha = 90^o$ sledi

$$r_{\alpha=90^\circ} = \frac{MN}{M} = N,$$

kar odgovarja prečnemu krivinskemu polmeru kot največjemu radiju.

Ker je vedno $N > M$, sta to tudi skrajni vrednosti kvadranta; srednja vrednost je pri azimutu $\alpha = 45^o$:

$$r_{\alpha=45^\circ} = \frac{MN}{\frac{M+N}{2}} = \frac{r^2}{d} \doteq r,$$

kajti $\sqrt{MN}$ je geometrijska sredina, $\frac{M+N}{2}$ pa aritmetična sredina iz najmanjšega in največjega krivinskega polmera elipsoida.

Vidimo, da se elipsoidno vzeto vprašanje dolžine morske milje precej zamota, saj so si samo na tečajih vsi krivinski polmeri enaki $M = N = r$ ter predstavljajo izraženi s polosmi elipsoida krivinski polmer na polih:

$$c = \frac{a^2}{b} .$$

Ko smo tako kritično pregledali vse štiri možne skupine na podlagi tabele 3, se že postavlja vprašanje, ali je dosedanja splošno uveljavljena definicija morske milje kot srednje meridianske minute še vzdržna, ali pa bi jo bilo treba tako dopolniti, da ne bi omogočala različne teoretične interpretacije.

8. MATEMATIČNE UTEMELJITVE POJMA POPREČNEGA POLMERA ZA IZRAČUN DOLŽINE MORSKE MILJE

Matematične izpeljave temelje na dveh pojmih:

a) poprečni polmer meridiana in
b) poprečni polmer elipsoida;

na tej podlagi se po splošnem obrazcu za morsko miljo kot minutno miljo izračuna njena dolžina v metrih po obrazcu:

$$nm = R_i \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

ad D) Kot poprečni polmer navajata Dinger ([14], str.41) in Helmert ([15], str.64) veliko polos a, pa definicija, da je morska milja dolžina ene minute s polmerom ekvatorja, ni iz trte izvita:

$$nm = a \cdot \frac{1'}{\rho'} = R_a \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

Dinger izhaja v poglavju „Mittlerer Werth der Erdkrümmung" iz srednjega krivinskega polmera kot geometrijske sredine iz najmanjšega in največjega krivinskega polmera elipsoida:

$$r = \sqrt{MN} = \sqrt{\frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \cdot \frac{a}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^2}} = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2\sin^2\varphi} = \frac{b}{1 - e^2\sin^2\varphi}$$

in izračuna poprečni polmer meridiana za vse φ od $- 90^\circ$ do $+ 90^\circ$ kot aritmetično sredino vseh teh vrednosti:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{b\,d\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi} = \frac{2b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi} = \frac{2b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin^2\varphi}\,d\varphi}{\frac{1}{\sin^2\varphi} - e^2} =$$

$$= \frac{2b}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \int_0^\infty \frac{d\,u}{1 + u^2} = \frac{2b}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} u \Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{2b}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} = a$$

Helmert navaja poprečno vrednost srednjega krivinskega polmera v eni točki v odnosu na vse vrednosti φ meridianskega kvadranta z izrazom:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sqrt{1 - e^2}\, d\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, .$$

Ker je $a\sqrt{1 - e^2} = b$ in $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$, pridemo z substitucijo

$$u = \operatorname{ctg}\varphi : \sqrt{1 - e^2}$$

tudi v tem primeru do poprečne vrednosti srednjega krivinskega polmera za vse točke enega meridiana:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b\, d\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin^2\varphi}\, d\varphi}{\frac{1}{\sin^2\varphi} - e^2} =$$

$$= \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \int_0^\infty \frac{d\,u}{1 + u^2} = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} u \Big|_0^\infty = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= a \cdot \frac{\pi}{2} \, ;$$

torej

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sqrt{1-e^2}\, d\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = a\cdot\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} = a$$

ad A) Dolžina loka meridiana od ekvatorja do poljubne paralele za geografsko širino φ se da izračunati z eliptičnimi integrali in izpeljava da sledeči, iz matematične kartografije ([16], str.14) in ([13], str.26) znan izraz:

$$B_0^{\varphi} = a(1-e^2)\left[A\frac{\varphi^\circ}{\rho^\circ} - \frac{B}{2}\sin 2\varphi + \frac{C}{4}\sin 4\varphi - \frac{D}{6}\sin 6\varphi + \ldots\right] .$$

Pri $\varphi = 90^\circ$ so sin 2φ, sin 4φ, sin 6φ itd. vsi enaki nič in za dolžino meridianskega kvadranta dobimo:

$$Q = a(1-e^2)\,A\,\frac{90^\circ}{\rho^\circ} = a(1-e^2)\,A\,\frac{5\,400'}{\rho'} ,$$

oziroma:

$$Q = a(1-e^2)\,A\cdot 90^\circ\frac{1}{\rho^\circ} = a(1-e^2)\,A\cdot 90^\circ\,\frac{\pi}{180^\circ} =$$

$$= a(1-e^2)\,A\cdot\frac{\pi}{2}$$

Dolžino morske milje dobimo kot 5 4oo. del dolžine meridianskega kvadranta:

$$n\,m = \frac{Q}{5\,400} = a(1-e^2)\,A\cdot\frac{1'}{\rho'} = R_Q\cdot\frac{1'}{\rho'} ,$$

kjer je koeficient A iz razrešitve eliptičnega integrala dovolj natančno:

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11\,025}{16\,384}e^8 .$$

To definicijo morske milje in način izračuna iz dolžine meridianskega kvadranta navaja v svoji knjižici „Navodilo h kartografičnim osnovam" leta 19o7 tudi prof. J.Kožuh ([17], str.11 in 16). Iz dolžine meridianskega kvadranta po Bessel-u izračuna Kožuh najprej s pomočjo delitve z 9o° srednjo meridiansko stopinjo, ki jo razdeli na 6o delov. Ta del se imenuje meridianska minuta ali pri mornarjih morska milja:

Meridianska minuta = morska milja (Nautical miles) = 1,852 km.

S tem je seveda mišljena srednja dolžina meridianske minute (opomba avtorja študije)!

Za dovolj natančen izračun dolžine meridianskega kvadranta pa se lahko poslužimo tudi približne formule iz že omenjene matematične enciklopedije ([8], str.495) z uporabo obeh polosi elipse:

$$Q = \left[3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right]\frac{\pi}{4} ,$$

kjer predstavlja $\frac{a+b}{2}$ aritmetično sredino in $\sqrt{ab}$ geometrijsko sredino.

Izraz

$$\left[3\,r_a - r_g\right]\pi = 2\,r_s\,\pi$$

nas privede do obsega elipse izračunanega na podlagi nekega srednjega polmera r_s elipsi aproksimiranega kroga, ki je jasno identičen z R_Q.

ad B) Ko so Francozi s stopinjskim merjenjem ob ekvatorju in severnem tečajniku prišli številčno do dveh različnih dolžin meridianske stopinje, je Bouguer ([3],str.73) smatral, da more pomorstvo izhajati še naprej z Zemljo kot kroglo z nekim polmerom blizu 45°geografske širine. Kot smo videli je Bouguer pri tem izhajal iz neke srednje meridianske stopinje, dolge 57 ooo toises. Da se izognemo dvoumnostim in poenotimo izračun, naj bo to meridianski krivinski polmer za $\varphi = 45°$:

$$nm = M_{45^\circ} \cdot \frac{1'}{\rho'} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 45^\circ)^3}} \cdot \frac{1'}{\rho'} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-\frac{e^2}{2})^3}} \cdot \frac{1'}{\rho'} =$$

$$= R_M \cdot \frac{1'}{\rho'} \quad .$$

Iz tega slede na podlagi tabele 2/I oziroma 3 za po 2 cm krajše dolžine morske milje kot pod A).

ad C) Morska milja kot dolžina meridianske minute v odvisnosti od geografske širine niha med cca 1843 m ob ekvatorju in cca 1862 m na polih in s tem izključuje dolžino morske milje kot konstanto, kar je pripeljalo pri konstrukciji pomorskih kart do izračunavanja tabel, ki imajo za osnovo najčešče Bessel-ove in Clarke-ove parametre zemeljskega elipsoida. Iz tega razloga je bila v nekaterih pomorskih učbenikih pri številčnih primerih upoštevana vedno geografski širini odgovarjajoča dolžina morske milje ([9], str.441-443).

ad E) Ker je razlika obeh polosi meridianske elipse (a-b) samo cca 21,5 km, se je v nekaterih učbenikih srednjih pomorskih šol prejšnjega stoletja ([9], str.411 in 412) prej iz pedagoških kot teoretično utemeljenih razlogov zakoreninila pot, iz meridiana kot elipse preiti na krog s srednjim polmerom iz obeh polosi:

$$R_e = \frac{a+b}{2}$$

Tako je le slučaj hotel, da se na ta način izračunana dolžina morske milje

$$nm = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1'}{\rho'} = R_e \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

na cm natančno ujema z ono , dobljeno iz dolžine meridianskega kvadranta.

To je empirično podoben poiskus, kot ga je l.1882 nakazal

Germain ([9], str.411), namreč iz skrajnih vrednosti dolžin morske milje za $\varphi = 0^{\circ}$ in $\varphi = 90^{\circ}$ z enostavno aritmetično sredino izračunati srednjo dolžino morske milje.

Iz tega slede pa na podlagi tabele 2/I. za po 2 cm daljše dolžine morske milje.

ad F), G) in H)

Če ne upoštevam posameznega meridiana, ampak Zemljo kot celoto, se moram skoncentrirati smiselno na nek poprečni polmer za elipsoid. Vse tri v poglavju 5 pod F), G) in H) navedene teoretične možnosti vodijo praktično, kljub različno dolgim poprečnim polmerom, do istega, na centimeter zaokroženega rezultata za dolžino morske milje.

Pod F) navedeni obrazec za polmer Zemlje kot krogle

$$R_m = \frac{a + a + b}{3} = \frac{2a + b}{3}$$

se da, če nadomestimo b z $a\sqrt{1-e^2}$, po Jordanu ([1o], str.99) razvrstiti v vrsto:

$$R_m = \frac{2a + a\sqrt{1 - e^2}}{3} = a(1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{1}{24} e^4 - \frac{1}{48} e^6 - \ldots).$$

Na isti strani je podana tudi vrsta za polmer Zemlje kot krogle, ki ima z elipsoidom isto površino:

$$R_f = a(1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{17}{360} e^4 - \frac{67}{3024} e^6 - \ldots).$$

Pod H) navedeni obrazec geometrijske sredine $R_k = \sqrt[3]{a^2 b}$ se da z upoštevanjem, da je $b = a\sqrt{1-e^2}$, po Jordanu ([1o], str.1oo) razviti v vrsto:

$$R_k = a\sqrt[6]{1 - e^2} = a(1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{5}{72} e^4 - \frac{55}{1296} e^6 - \ldots)$$

Vse te tri vrste za poprečni polmer elipsoida, ki jih navaja že Helmert l.1880 ([15], str.68), se razlikujejo šele od vključno tretjega člena naprej in dajo s HP 45 egzaktnejše rezultate.

Razlagi pod H), da je morska milja dolžina tiste minute, katere polmer Zemlje odgovarja krogli enake prostornine z elipsoidom, se v svoji knjigi „Učbenik terestične navigacije", Rijeka 1895 priključuje tudi naš rojak A. Stupar ([9], str.413), profesor na pomorski akademiji.

Prednost obrazcev

$$R_m = \frac{a + a + b}{3} \qquad \text{in} \qquad R_k = \sqrt[3]{a \cdot a \cdot b}$$

je praktično očitna pri morebitni uvedbi elementov triosnega elipsoida a_1, a_2 in b.

9. TRIOSNI ZEMELJSKI ELIPSOID

Vedno novi postopki izravnavanja in kombinacije posameznih stopinjskih merjenj s ciljem dobiti čim verodostojnejše vrednosti parametrov zemeljskega elipsoida so privedli do spoznanja, da še ekvatorja ne moremo smatrati za krog, ampak je le ta tudi elipsa, čeprav z izredno majhno sploščenostjo.

Prvi je izračunal dimenzije triosnega zemeljskega elipsoida po Strasser-ju ([7], str. 43 in 44) T.F. Schubert in jih objavil v „Essai d'une détermination de la veritable figure de la terre" v tedanjem Petrovgradu l.1859. Njegova računska metoda pa ni bila stroga, s kombinacijami raznih stopinjskih merjenj celo prilagojena končnemu cilju in zaradi tega nezanesljiva.

To je l.186o vzpodbudilo Clarke-a ([7], str.44), da je namesto matematično nezadovoljivega postopka vpeljal strogo izravnavo.

Ravnina osi ekvatorja a_1 ima smer, ki gre od severnega pola skozi Spitzberge, Skandinavijo, Nemčijo, Italijo, Libijo, jugozahodno Afriko, Wohltatmasiv na Antarktiki v Enderbyjevem kvadrantu do južnega pola in od tod preko Male Amerike v Rossovem kvadrantu, vzhodno od otočja Samoa, zahodno od Honoluluja in vzhodno od Behringove ceste nazaj na severni pol.

Ravnina osi ekvatorja a_2 ima smer, ki poteka od severnega pola skozi Komsomolski otok, Irkutsk, Mongolijo, Kampučijo, vzhodno od Singapurja, jugovzhodno Sumatro preko južnega tečaja na zahodno obalo Južne Amerike, skozi Ekvador, vzhodno Kubo, Washington in Baffinov zaliv nazaj na severni pol.

Clarke je l.1866 ponovil računanja in ta so pripeljala na podlagi popravljenih meridianskih stopinjskih merjenj do novih dimenzij triosnega elipsoida ([7], str.46).

L. 188o je Clarke prvič upošteval v svojih računanjih poleg meridianskih stopinjskih merjenj tudi stopinjska merjenja po paralelah ([7], str.51-53) in ker se vzhodnoindijski podatki niso zadovoljivo prilegali izračunanima parametroma,je uvedel triosni zemeljski elipsoid.

Ravnina osi a_1 ima smer, ki gre skozi Irsko, Portugalsko, Zahodno Saharo, Liberijo, Novo Švabsko na Antarktiki in preko južnega tečaja na južni otok Nove Zelandije, vzhodno od Marschallskih otokov na zahodne Aleute.

Ravnina osi a_2 ima smer, ki poteka zahodno od Novosibirska preko Sinkianga, Sri Lanke in nato preko Mehike, sredine ZDA in Winnipeg- jezera.

Obstoj eliptičnosti ekvatorja je ugotovil tudi **W. Heiskanen** že l.1928., ko je prišel do znane formule s podatkom za težnost na ekvatorju.([7], str.69). Iz tega je rezultirala maksimalna sploščenost meridianske elipse 1 : 295,7 pri $\lambda = 0^o$ in 180^o in minimalna sploščenost 1 : 299,0 pri $\lambda = \pm 90^o$ ter razlika obeh ekvatorskih polosi: $a_1 - a_2 = 242$ m. Te podatke je W.Heiskanen objavil v razpravi „Ist die Erde ein dreiachiges Ellipsoid?" v Leipzigu l.1928.

Z vključitvijo še geodetskih merjenj Severne Amerike, zahodne Evrope in rusko-skandinavskega meridiana pa je prišel l.1929 ([7], str.7o) do novih podatkov o eliptičnosti ekvatorja. Razlika obeh ekvatorskih polosi in pozicija a_1 pa je nesigurna, ker pokrivajo tu uporabljena geodetska merjenja le relativno majhen del Zemlje. Te podatke je W. Heiskanen objavil v razpravi „Über die Elliptizität des Erdäquators"; Helsinki 1929.

Tudi prvotni rezultat izravnavanja iz do takrat najobsežnejših meritvenih podatkov l.194o v SZ je potrdil obstoj triosnega zemeljskega elipsoida ([7], str.74 in 75), iz katerega je bil aproksimiran dvoosni elipsoid CNIIGAiK l.1942 z enostavno aritmetično sredino za veliko polos a in sploščenost:

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} \qquad \text{in} \qquad f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Sledeča tabela 4 teh šestih od vsega 15 publiciranih triosnih elipsoidov služi predvsem zato, da prikažem na podlagi treh polosi izračunani poprečni polmer Zemlje kot krogle po obrazcih:

$$R_m = \frac{a_1 + a_2 + b}{3} \qquad \text{in} \quad R_k = \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot b}$$

in iz tega izhajajoče dolžine morske milje.

Med temi petnajstimi triosnimi elipsoidi je tudi Helmert-ov zadnji znanstveni doprinos k temu problemu iz l.1915 z razliko obeh ekvatorianih polosi ([7], str.57 in 92)

$a_1 - a_2 = 230$ m $\pm$ 51 m in orientacijo $\lambda_1 = 17^\circ$ W.

DOLŽINE MORSKE MILJE IZ DIMENZIJ TRIOSNEGA ELIPSOIDA TABELA 4

Tek. štev.	Triosni elipsoid, leto orientacija	Ekvatorske polosi a_1 a_2	b	$R_m = \frac{a_1+a_2+b}{3}$ n m	$R_k = \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot b}$ n m
1	2	3	4	5	6
1	Schubert 1859 λ_1 = 41°04'E	6 378 556 6 377 838	6 356 719	6 371 038 1 853,26	6 371 030 1 853,26
2	Clarke 1860 λ_1 = 13°58'E	6 378 402 6 376 785	6 356 238	6 370 475 1 853,10	6 370 467 1 853,10
3	Clarke 1866 λ_1 = 15°34'E	6 378 361 6 376 417	6 356 135	6 370 304 1 853,05	6 370 296 1 853,04
4	Clarke 1880 λ_1 = 8°15'W	6 378 446 6 377 982	6 356 454	6 370 961 1 853,24	6 370 952 1 853,23
5	Heiskanen 1929 λ_1 = 38°E ±10°	6 378 482,5 6 378 317,5	6 357 010	6 371 270 1 853,33	6 371 262 1 853,33
6	CNIIGAiK 1942 λ_1 = 15°E	6 378 351,3 6 378 138,7	6 356 863,0	6 371 118 1 853,28	6 371 110 1 853,28

Tabela 4 nam glede dolžine morske milje ne odkrije sicer nič novega. Prebrana v celih metrih nam da vedno navzdol zaokroženo dolžino 1853 m. Dokazuje nam pa, da definicija morske milje kot srednje dolžine meridianske minute ni več vzdržna. Pri triosnem zemeljskem elipsoidu prvič meridiani niso več strogo vzeto enako dolgi, drugič pa ekvator ni strogo vzeto več krog, ampak elipsa z izredno majhno sploščenostjo (Heiskanen 1929 : $f_{ekv} = 1 : 38\ 657$ in CNIIGAiK 1942 : $f_{ekv} = 1 : 30\ 000$), tako, da je po mojem mišljenju treba dati v navtiki prednost velikemu krogu tiste krogle, ki ima tudi s triosnim zemeljskim elipsoidom neke gotove skupne lastnosti. Te skupne lastnosti pa so računsko najenostavneje razvidne iz obeh uporabljenih obrazcev.

Če bi bil pojem triosnega zemeljskega elipsoida poznan že pred 225 leti, ne pa šele zadnjih nekaj nad 100 let, do prvotne definicije morske milje , vezane na meridian kot elipso, ne bi niti prišlo, niti se le ta ne bi mogla tako globoko zakoreniniti, da je bila njena srednja dolžina 1852 m l.1954 ne samo potrjena, ampak kot konstanta tudi internacionalno priznana.

Veliko lažje bi potem definicijsko prodrla skupina 3 s poprečnimi polmeri R_m, R_f in R_k, ko je iz njih izhajajoča dolžina morske milje, zaokrožena na cel meter nm = 1853 m neodvisna ne samo od izbire parametrov, ampak neodvisna tudi od izbire dvoosnega ali triosnega zemeljskega elipsoida.

Pojem in obstoj triosnega elipsoida sta v pričujoči študiji le „moralnega pomena", čeprav je jasno, da nas že porazdelitev in razvrstitev kontinentov in oceanov o tem prepričuje ([11], str. 618-621). To ima pa zopet za posledico tudi dokaj enostransko porazdeljene podatke iz ugotavljanja težnosti. Izredno majhna eliptičnost ekvatorja dovoljuje namreč celo računsko aproksimacijo na dvoosni elipsoid, kot smo videli pri CNIIGAiK-u.

10. NEDVOUMNA IN ENOLIČNA DEFINICIJA ZA DOLŽINO MORSKE MILJE KOT KONSTANTE

Na podlagi dosedanjih razglabljanj prehajam na sledeči predlog:

Morska milja je dolžina ene minute na Zemlji kot krogli, katere polmer je geometrijska sredina iz elipsoidovih polosi:

$$n\ m = \sqrt[3]{a.a.b.}\ \frac{1'}{\rho'} = R_k \cdot \frac{1'}{\rho'}$$

V vseh slučajih in za katerikoli od obravnavanih elipsoidov v tabelah 2/II. oziroma 3 in 4 rezultira praktična dolžina morske milje, zaokrožena na cele metre:

$$n\ m = 1\ 853\ m$$

Ta dolžina morske milje od 1853 m bi kot konstanta tudi bolje odgovarjala za praktične navtične namene in dejanskemu stanju kot dosedaj od 1.1954 tudi internacionalno priznana konstantna dolžina od 1852 m, kajti hipoteze o obstoju triosnega zemeljskega elipsoida ni več moč vsaj pojmovno mimoiti.

Utemeljitev gornjega predloga bom skušal vskladiti s principi konvencionalnosti določanja konstant, prikazanih v poglavju 3.

Nesporno je, da je v mednarodnih hidrografskih krogih 1.1928 v Monaku prevladal princip kontinuitete, saj je imela morska milja od 1 852 m kot srednja meridianska minuta takrat že skoro 2oo letno tradicijo, katere dolžine, zaokrožene na cele metre niso mogli spremeniti prav nobeni izboljšani parametri zemeljskega elipsoida (vidi tabeli 2/I. in 3).

Tako ni bilo potrebe niti po egzaktnejši definiciji, saj je rezultat dolžine morske milje, zaokrožen na cele metre, zadovoljeval tudi izboljšane parametre in je bila do te meje kot merske enote v navtiki, očuvana njena kontinuiteta dolžine kot konstante.

Praktični pomorski vedi namreč zadostuje na cele metre zaokrožena dolžina morske milje kot konstanta, pa te minimalne razlike od cca 25 cm sploh ne registrira ([9], str.4o4,4o6 in 442), kajti praktičnega pomorščaka zanima v glavnem le število morskih milj kot sferična razdalja. Enota za miljo je pa zanj ena minuta na Zemlji kot krogli dolžine 1 852 m. Taka dolžina morske milje je prikladna tudi pri uporabi pomorskih merskih instrumentov, ki morajo biti justirani za vrednost zaokroženo na metre ([2], str. 422 in tabela 4 v prilogi P6).

Vsa moja prizadevanja v tej študiji je treba gledati iz teoretičnega vidika, pa ni moj namen rušiti kontinuitete pri tej mednarodno priznani dolžini od 1 852 m kot merski enoti v navtiki. Zavedati se moramo le, da ji pripada v vseh ozirih prekratek polmer:

$$R = 6\ 366\ 7o7\ m \doteq 6\ 366,7\ km$$

To dejstvo v praktični pomorski literaturi ni vedno dovolj jasno in odkrito prikazano in se celo pri enem in istem avtorju različno tretira ([18], str.9; [19], str.2o in [2o], str.16). Prof. L. Uhlig kot soavtor teh treh učbenikov v NDR se v prvih dveh učbenikih enostavnosti radi sklicuje na srednji obseg Zemlje kot krogle dolžine 4o ooo km ali 21 6oo morskih milj, kajti polni krog ima 36o x 6o' = 21 6oo'. Iz tega izhaja dolžina ene milje 1,851 85 km ali zaokroženo 1,852 km. Kot srednji polmer pa navaja s tem v zvezi prvič 6 371 km, kar daje zaokrožen rezultat 1,853 km, drugič pa 6 376 km, kar je očitno vezano na tiskarskega škrata in bi se moralo glasiti 6 367 km, kar daje odgovarjajočih 1,852 km. V tretjem učbeniku pa podaja pri praktičnih primerih računanja sferične razdalje rezultate le v morskih miljah kot minutnih miljah, saj odgovarja sferična razdalja med dvema točkama na Zemlji kot krogli pripadajočemu centričnemu kotu v središču Zemlje. Njena dolžina v kilometrih pa zavisi od smiselno izbranega, Zemlji kot krogli pripadajočega polmera.

Dejstvo, da je ekvator tudi eliptičen, pa čeprav z izredno majhno sploščenostjo, nas navaja k pojmovno drugačni, egzaktnejši in s tem nedvoumni definiciji. Predlagana definicija morske milje, citirana na začetku tega poglavja 1o, je nedvoumna in ne dopušča nobenih teoretičnih možnosti več za njeno raznoliko interpretacijo. S tem spoznanjem se je pojmovno vzeto jasno pokazalo, da ne moremo te definicije več vezati na meridiansko elipso kot lik, ampak na kroglo kot telo z določenim, geoidu smiselno prilagojenim najprikladnejšim poprečnim polmerom.

Ta poprečni polmer pa je po Listing-u ([7], str.48 in 49) kot že omenjeno geometrijska sredina iz elipsoidovih polosi.

Kompatibilnost zahteva soglasje med konstanto in izbranimi podatki za njen izračun. Tudi pri tej , na Zemljo kot telo vezani definiciji ne zadenemo, kar se zaokrožitve na cele metre tiče, na nobene težave. Izbrana dolžina nm = 1 853 m ostane konstantna za vse že citirane in v tabelah 2/II., 3 in 4 navedene dimenzije zemeljskih elipsoidov.

Tej, na metre zaokroženi dolžini morske milje od 1 853 m pripada seveda že večji polmer Zemlje kot krogle:

$$R = 6\,370\,145 \text{ m} \doteq 6\,370{,}1 \text{ km} ,$$

ki pa kot tak zadovolji praktično samo najstarejše internacionalno priznane parametre Bessel-a iz l.1841, za katere je pa značilno, da je bila velika polos a prekratka.

Kontinuitete v starem smislu ni. Skok enega metra od 1 852 m na 1 853 m je sistematičnega značaja in je pogojen tudi s pojmovno spremembo definicije morske milje.

Če smo do skrajnosti objektivni, je hipoteza o triosnem elipsoidu stara tudi že nad 1oo let. Čeprav posledice tega spoznanja do danes niso prišle direktno do veljave, so se vendarle indirektno pokazale pri anglo-amerikancih , kjer je ta dolžina morske milje izračunana iz treh polosi imela že od l.188o naprej lepo tradicijo. Njihova, konvencionalno priznana morska milja ter iz znanih in obrazloženih razlogov od 6 o8o,27 feet na celih 6 o8o feet zaokrožena, je znašala, preračunana v metre

$$nm = 6\,080 \text{ feet} = 1\,853{,}18 \text{ m}$$

([2], str.421 in tablica 4 v prilogi P6; [9], str.412).

Tej anglo-ameriški dolžini morske milje nm = 6 o8o feet kot konstanti odgovarja sledeči , Zemlji kot krogli,pripadajoči polmer:

$$R = 6\,370\,764 \text{ m} \doteq 6\,370{,}8 \text{ km} .$$

Za teoretične in znanstvene raziskave pa je vsekakor potrebno poleg dolžine morske milje na centimetre natančno obvezno navesti tudi najnovejše parametre tistega zemeljskega elipsoida, na katerega se ta dolžina nanaša ter zaradi enoličnosti dobljenih rezultatov smiselno upoštevati tudi pripadajoči poprečni polmer Zemlje kot krogle. S tem se seveda že vnaprej odpovemo principu kontinuitete. Te pa pri določanju parametrov zemeljskega elipsoida že doslej ni bilo in tudi ni moglo biti.

Zadnje od IUGG l.1967 mednarodno priporočene in od IAU že l.1964 vpeljane vrednosti parametrov zemeljskega elipsoida kot konvencionalne konstante so:

$$a = 6\,378\,16o \text{ m} \quad \text{in} \quad f = 1 : 298{,}25$$

Konstante predstavljajo tako po izvoru podatkov, kakor tudi ob vseh izvirnih astronomskih, geodetskih in geofizikalnih dosežkih ter upoštevajoč najnovejša satelitska spoznanja trudapolno sukcesivno aproksimacijo, ki je odločno boljša od vseh dosedanjih parametrov.

Na osnovi teh navedenih konvencionalnih konstant sledi po predlagani definiciji, da je morska milja dolžina ene minute na Zemlji kot krogli, katere polmer je geometrijska sredina elipsoidovih polosi, nedvoumna dolžina morske milje:

$$\begin{aligned} nm &= R_k \cdot \frac{1'}{\rho'} = \sqrt[3]{a^2 b} \cdot \frac{1'}{\rho'} = \sqrt[3]{a^2 . a(1-f)} . \frac{1'}{\rho'} = a \sqrt[3]{(1-f)} . \frac{1'}{\rho'} = \\ &= 6\,378\,16o \text{ m} \times 0{,}998\,881\,118 \cdot \frac{1'}{\rho'} = \\ &= 6\,371\,o23{,}592 \text{ m} \frac{1'}{\rho'} = 1\,853{,}255\,64o \text{ m} \doteq \\ &\doteq 1\,853{,}26 \text{ m} , \end{aligned}$$

pa daje ob upoštevanju, da ji odgovarja sledeči poprečni in smiselno izbrani polmer Zemlje kot krogle

$$R_k = \sqrt[3]{a.a.b} = 6\,371\,o23{,}592 \text{ m} \doteq 6\,371\,o24 \text{ m}$$

tudi enolične rezultate sferičnih razdalj ortodrome in loksodrome.

Tako bi morali tudi v kartografiji kot znanstveni vedi od končno že definicijsko zastarelega, vendar še uporabljanega poprečnega polmera 6 37o 29o m ≐ 6 37o,3 km po Bessel-u že zaradi doslednosti preiti na ta poprečni polmer Zemlje kot krogle:

$$R = 6\ 371\ 024 \text{ m} \doteq 6\ 371,0 \text{ km}.$$

Ker ob tej nedvoumni in enolični definiciji morske milje kontinuitete seveda ni, smo resnici na ljubo le dolžni upoštevati in tudi praktično akceptirati novo spoznanje ter ga pri teoretičnih raziskavah vpeljati in slediti.

Dosedanja razglabljanja se oslanjajo v glavnem na parametre tistih zemeljskih elipsoidov, ki so globoko posegli v mednarodno astrogeodetsko in geofizikalno dejavnost in so bili več ali manj tudi uspešno uporabljeni. Študijo sem razumljivo zaključil z najnovejšimi, po dinamični poti dobljenimi, od IAU l.1964 v Hamburgu vpeljanimi in od IUGG l. 1967 v Luzernu potrjenimi ter v znanstvene namene kot konvencionalne konstante priporočanimi parametri a in f .

Med tem pa kažejo novi satelitski podatki, objavljeni po Kauli 1961, sledečo tabelarično sliko ([6], str.192):

Tabela 5

PARAMETRI ZEMELJSKIH ELIPSOIDOV IZ SATELITSKIH PODATKOV

Avtor in leto	Velika polos a (m)	Sploščenost f
Kaula/1961	6 378 163	1 : 298,24
Veis/ 1965	6 378 142	1 : 298,25
Lambec/ 1971	6 378 14o	1 : 298,25
Rapp/ 1973	6 378 142,8	1 : 298,256
Khan/ 1973	6 378 142	1 : 298,255

Iz podatkov iz tabele 5 je očitno razviden trend k zmanjšanju velike polosi a za okroglih 2o m! ob skoro konstantni sploščenosti, saj je že podatek natančnosti pri Kauli ([11], str.621) dan na stotinko $f = 1 : (298,24 \pm 0,01)$.

Na tem mestu bi opozoril na presenetljivo slučajnostno koincidenco z eno od variant Helmert-a iz l.19o6 ([7], str.57):

$$a = 6\ 378\ 140 \text{ m} \quad \text{in} \quad f = 1 : (298{,}3 \pm 1{,}1)$$

Helmert je izračunal veliko polos a iz po dveh evropskih meridianskih in paralelnih lokov s skupno amplitudo 14o$^{\circ}$ ob že privzeti sploščenosti 1 : 298,3 , ki jo je dobil na podlagi izravnave 16o3 merjenj težnosti l.19o1.

Res je to lahko samo neverjeten slučaj, da se rezultati te kombinirane metode iz l.19o6 razmeroma tako presenetljivo ujemajo n.pr. z Lambec-ovimi satelitskimi iz l.1971.

Zmanjšanje velike polosi a od 6 378 16o m na 6 378 14o m, tj. za 2o m povzroči ob istem podatku za sploščenost 1 : 298,25 tudi za 2o m krajšo malo polos b = 6 356 755 m in za 2o m krajši poprečni polmer Zemlje kot krogle

$$R_k = 6\ 371\ 004 \text{ m} \doteq 6\ 371{,}00 \text{ km},$$

pa se s tem le ta še bolj približa okroglim 6 371 ooo m. Ob znanem dejstvu, da znaša lok 1' na razdalji 1oo m 29 mm, oziroma lok 1' na razdalji 1 km 29 cm, se ob za 2o m krajšem polmeru Zemlje kot krogle zmanjša dolžina minutne milje za 29 mm : 5 = 6 mm, kar da, zaokroženo na centimetre, dolžino morske milje nm = 1 853,25 m.

To pa seveda ni še noben zadosten argument, enostavno - pa čeprav bi bilo še tako vabljivo - preiti na novo primarno konstanto za veliko polos a , zmanjšano za 2o m. To bi imelo namreč za posledico verižno spremembo celotnega sistema iz konvencionalno sprejetih podatkov izračunanih konstant. Podatek za n.pr. Sončevo paralakso $\pi_{\odot}$ bi se zmanjšal za

$$\Delta \pi_{\odot} = \frac{\Delta a}{(AE)} \cdot \rho'' = \frac{2 \cdot 10^{1} \text{ m}}{15 \cdot 10^{10} \text{m}} \cdot 2'' \cdot 10^{5} \doteq 3'' \cdot 10^{-5} ,$$

torej od $\pi_{\odot} = 8'',794\ 05$ na $8'',794\ 02$;

podobno bi se spremenili geocentrična gravitacijska konstanta GE in tudi težnost na ekvatorju γ_0, ko bi se slednja povečala za 5 mGal.

V še večjo računsko zmoto bi nas privedla pot, kot jo je ubral pred dobrimi loo leti Listing 1.1873: iz tokrat surovega podatka za

$$R = \sqrt[3]{a.a.b} = 6\ 371\ 000 \text{ m} \quad \text{in}$$

dani sploščenosti f = 1: 298,25 izračunati polosi a in b, kar bi nas nujno privedlo do prekratkih vrednosti:

$$a = 6\ 378\ 136 \text{ m} \quad \text{in} \quad b = 6\ 356\ 751 \text{ m}.$$

Ostali bomo torej pri rezultatih, ki izvirajo iz najnovejših, v znanstvene namene konvencionalno priporočanih konstant parametrov zemeljskega elipsoida (vidi tabele 1,2 in 3).

$$a = 6\ 378\ 160 \text{ m} \quad \text{in} \quad f = 1 : 298,25 \ ;$$

morska milja nm = 1 853,255 640 m ≐ 1 853,26 m s

polmerom Zemlje kot krogle R_k = 6 371 023,592 m ≐ 6 371 024 m

ter v kartografiji R = 6 371 024 m ≐ 6 371,0 km.

In v tem vidim tudi smisel in smoter pričujoče študije o dolžini morske milje v zvezi z obliko in dimenzijami Zemlje.

Die Länge einer Seemeile im Zusammenhang mit Form und Dimensionen der Erde

Zusammenfassung

In der Studie werden die stark divergierenden Interpretierungen der Definition der Seemeile als der mittleren Meridianminute und der ihr entsprechenden Länge behandelt.

Nach der Analyse von Parametern der fünf Erdellipsoide, welche tief in die internationale astrogeodätische Tätigkeit eingegriffen haben, drängt sich die Frage auf, ob die bisherige Definition der Seemeile als der mittleren Meridianminute noch haltbar ist, oder derart ergänzt werden sollte, daß keine divergierende theoretischen Interpretierungen möglich wären.

Gemäß den mathematischen Begriffs begründungen des durchschnittlichen Halbdurchmessers des Erdellipsoides folgt die unzweideutige und einheitliche Definition der Seemeilenlänge als Konstante.

Die Seemeile ist die Länge einer Minute auf der Erde als der Kugel, deren Halbdurchmesser die geometrische Mitte aus den Halbachsen des Erd-Ellipsoides ist:

$$nm = \sqrt[3]{a.a.b} \cdot \frac{1'}{\varrho'} = 1\,853,26 \text{ m}$$

Die neuesten und international empfohlenen Parameterwerte des Erdellipsoides als konventionelle Konstanten

$$a = 6\,378\,160 \text{ m} \quad \text{in} \quad f = 1:298,25$$

stellen sowohl nach dem Datenursprung als auch angesichts aller originellen astronomischen, geodätische und geophysikalischen Erkenntnisse und unter Beachtung der neuesten Satellitenbeobachtungen eine schwierige sukzessive Approximation dar, die entschieden besser ist als bei allen bisherigen Parametern.

Aufgrund dieser Parameter als konventioneller Konstanten folgt gemäß der unzweideutigen und einheithichen Definition der Seemeile auch deren Länge: 1 853,26 m.

L I T E R A T U R A

k študiji : „Dolžina morske milje v zvezi z obliko
in dimenzijami Zemlje"
po vrstnem redu virov

1 Podpečan A. Prilog proučavanju deformacija i kartometrijskih problema na geografskim i tematskim kartama (disertacija); Ljubljana 1968

2 Brezinšćak M. Mjerenje i računanje u tehnici i znanosti;
Zagreb 197o

3 Bouguer P. Nouveau Traité de Navigation;
Paris 1753

4 Orlov P.M. Kurs geodezije;
Moskva 1947

5 Jermolaev G.G. Kartografske projekcije in pomorske karte;
Moskva 1965

6 Stange L. Nutzung künstlicher Satelliten für Geodäsie und Navigation. Izšlo kot samostojen prispevek v: Weltraum und Erde;
Berlin 1975

7 Strasser G. Ellipsoidische Parameter der Erdfigur;
München 1957

8 Kleine Enziklopädie Mathematik;
Leipzig 1974

9 Wagner H. „Zur Geschichte der Seemeile"; Študija izšla v: Annalen der Hydrographie und Maritimer Meteorologie, Heft VIII und IX; Göttingen 1913

1o Jordan, Eg.,Kn. Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, Erste Hälfte; Stutgart 1961

11 Jordan, Eg.,Kn. Handbuch der Vermessungskunde, Band V. (Erdmessung); Stutgart 1969

12 Svečnikov N.S. Viša geodezija; Prva knjiga; Beograd 1953

13 Heiskanen W.A. International Dictionary of Geophysies, Volume I.; London 1967

14 Dinger J. Abbildung Krummer Oberflächen, Braunschweig 1858

15 Helmert F.R. Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie I; Leipzig 188o

16 Borčić B. Matematička kartografija; Zagreb 1955

17 Kožuh J. Navodilo h kartografičnim osnovam; Celje 19o7

18 Uhlig L. Leitfaden der Nautik; Berlin 1963

19 Uhlig L. Terrestische Navigation;
Berlin 1975

2o Uhlig L. Astronomische Navigation;
Berlin 1975

Navedena uporabljena literatura z odgovarjajočimi, v tekstu navedenimi stranmi, je zbrana in je na razpolago pri avtorju študije.